

Bruno da Costa Flach

Estratégia de oferta de agentes hidroelétricos sob incerteza e múltiplos estágios

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Professores Orientadores:

Oscar Porto, D. Sc.
Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.

Rio de Janeiro
Novembro de 2004

Bruno da Costa Flach

Estratégia de oferta de agentes hidroelétricos sob incerteza e múltiplos estágios

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Oscar Porto
Professor Orientador
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Dr. Mario Veiga Ferraz Pereira
PSR Consultoria

Dr. Sergio Granville
PSR Consultoria

Dr. Edson Luiz da Silva
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Álvaro Veiga Filho
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de outubro de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Bruno da Costa Flach

Graduou-se em Engenharia Elétrica com ênfase em Telecomunicações e Engenharia de Produção na PUC-RJ em 2002. Participou de intercâmbio internacional durante um ano na Universidade da Califórnia, San Diego. Estagiou na Wireless Facilities Inc. e na Alcatel Telecomunicações. Atualmente participa de estudos e projetos na PSR Consultoria ligados à otimização da operação de sistemas hidrotérmicos, desenvolvimento de ferramentas para oferta estratégica em ambientes de mercado e integração dos setores de gás natural e geração termoeleétrica.

Ficha Catalográfica

Flach, Bruno da Costa

Estratégia de oferta de agentes hidroelétricos sob incerteza e múltiplos cenários / Bruno da Costa Flach; orientadores: Oscar Porto, Mario Veiga Ferraz Pereira – Rio de Janeiro, PUC, Departamento de Engenharia Elétrica, 2004.

92 f. : il.; 30 cm

1. Tese (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Otimização Estocástica. 3. Otimização não linear. 4. Despacho hidrotérmico 5. Despacho baseado em ofertas I. Porto, Oscar. II Pereira, Mário Veiga Ferraz. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

Aos meus pais, Otto e Lânia.

À minha irmã, Luciana.

Agradecimentos

À Deus, pela minha vida.

Aos meus pais e minha irmã, por serem exatamente como são e pelo amor, carinho e estímulo incessantes, sem os quais este trabalho não poderia ter sido concluído.

À minha família, pelo amor, compreensão e incentivo durante todos os momentos.

À Isabel Soares Veiga de Carvalho, por tudo e, em especial, pelo carinho, companhia e estímulo.

Ao amigo Mário Veiga Ferraz Pereira, pela oportunidade de realização deste trabalho e pela orientação indispensável em todas as etapas do desenvolvimento.

Ao amigo Luiz Augusto Barroso, pela excelente orientação e disposição inabalável para ajudar durante toda a realização deste trabalho.

Ao professor Oscar Porto, pelas aulas e pelo estímulo e apoio.

A todos os meus amigos, pelo incentivo e ajuda, ainda que indireta, para a realização deste trabalho.

A todos os amigos da PSR/Mercados de Energia.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Flach, Bruno da Costa. **Estratégia de oferta de agentes hidroelétricos sob incerteza e múltiplos estágios**. Rio de Janeiro, 2004, 92 p. Tese de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desta dissertação é desenvolver uma metodologia para oferta estratégica de uma empresa geradora em ambiente de mercado com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluições, e ilustrar a aplicação da mesma em sistemas realistas. Mostra-se inicialmente que o problema de oferta estratégica pode ser formulado como uma recursão de programação dinâmica estocástica (PDE), onde as variáveis de estado são os níveis de armazenamento dos reservatórios no início de cada estágio e as afluições observadas nos estágios anteriores. Entretanto, a dificuldade computacional dos algoritmos de PDE restringe sua aplicação a sistemas com poucos reservatórios, limitando bastante a aplicação da técnica a sistemas realistas. Assim, a abordagem proposta nesta dissertação é estender a metodologia de programação dinâmica dual estocástica (PDDE), até então aplicada a problemas de minimização de custos, ao problema de otimização da oferta. Isto é feito através de dois passos principais: (i) Uso de uma estratégia de oferta por quantidade somente (análogo a um modelo de Cournot em problemas de equilíbrio econômico) e (ii) a recursão de PDDE, que por ser baseada numa aproximação por hiperplanos requer que o problema seja convexo, o que não ocorre necessariamente no caso da oferta estratégica. A abordagem proposta consiste em aproximar a cada estágio a função de benefício futuro (FBF) por sua envoltória côncava (“concave hull”). Com isso, a técnica de PDDE pode ser aplicada para resolver o problema de ofertas multi-estágio e estocástico de uma empresa hidroelétrica com múltiplas usinas. Exemplos e estudos de caso serão ilustrados com os sistemas reais da Romênia e El Salvador, ilustrando a aplicabilidade da metodologia proposta em estudos e análises de poder de mercado.

Palavras-chave

Engenharia Elétrica, Otimização Estocástica, Otimização não linear, Despacho Hidrotérmico, Despacho baseado em ofertas, Teoria Marginalista.

Abstract

Flach, Bruno da Costa. **Bid-based strategies for hydro plants in a multi-stage and stochastic framework** Rio de Janeiro, 2004, 92 p. Master Thesis – Electrical Engineering Department, Catholic University of Rio de Janeiro.

The objective of this work is to present a methodology for the strategic bidding (or bid-based) problem of a hydropower based company, taking into account multiple hydro plants, time-coupling, multiple inflow scenarios and illustrate its application for real case studies. It is initially show that the bid-based dispatch for a hydro plant can be formulated as a stochastic dynamic programming (SDP) recursion scheme, where the state variables are the storage levels and the past inflows. As widely known, the computational effort of the SDP algorithms restricts its applications for systems with just a few reservoirs, which is not the case of the “real world” systems. Therefore, the approach proposed in this thesis is to extend the stochastic dual dynamic programming (SDDP) scheme, usually applied to cost minimization problems, to the strategic bidding problem. This is done through two main steps: (i) use of a quantity-only bidding scheme (similar to the Cournot model of economic equilibria); (ii) SDDP recursion, which is based on a linear approximation by piecewise linear segments and thus requires that the underlying problem to be convex. This is not necessarily observed in the strategic bidding problem. Thus, the proposed approach consists in approximating, at each stage, the future benefit function (FBF) by its concave hull, which then assures that the SDDP scheme can be applied to solve the multi-stage and stochastic strategic bidding problem of a company with a portfolio of several hydro plants. The proposed approach is illustrated with examples and case studies from real hydro systems from Rumania and El Savador, where market power analysis will be presented.

Keywords

Electrical Engineering, Stochastic Optimization, Non-linear optimization, Hydrothermal Scheduling, Strategic-Bidding, Marginalist Theory.

Sumário

1 INTRODUÇÃO **12**

1.1	O PROCESSO DE REFORMA NOS SETORES ELÉTRICOS	12
1.2	OFERTA DE PREÇOS/QUANTIDADES NO MERCADO DE CURTO PRAZO	12
1.3	ESTRATÉGIA DE OFERTA PARA <i>PRICE TAKERS</i>	13
1.4	ESTRATÉGIA DE OFERTA PARA <i>PRICE MAKERS</i>	14
1.5	OFERTA ESTRATÉGICA MULTI-ESTÁGIO	14
1.5.1	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA (PDE) E DUAL ESTOCÁSTICA (PDDE)	15
1.6	OBJETIVO DA TESE	16
1.7	ORGANIZAÇÃO DA TESE	16

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OFERTA **18**

2.1	DESPACHO DE MÍNIMO CUSTO	18
2.2	ESTRATÉGIA DE OFERTA PARA O <i>PRICE MAKER</i>	20
2.3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE OFERTA	21
2.4	MODELO DE OFERTA POR QUANTIDADE	23
2.5	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26

3 ESTRATÉGIA DE OFERTA MULTI-ESTÁGIO – CASO DETERMINÍSTICO

30

3.1	INTRODUÇÃO	30
3.2	ESTRATÉGIA DE OFERTA DE UM AGENTE HIDROELÉTRICO – 2 ESTÁGIOS	31
3.3	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA	32
3.3.1	EXEMPLO	33
3.3.2	EXTENSÃO PARA MÚLTIPLOS ESTÁGIOS	37
3.4	CONCLUSÃO	38

4	<u>ESTRATÉGIA DE OFERTA MULTI-ESTÁGIO – CASO ESTOCÁSTICO</u>	39
4.1	INTRODUÇÃO	39
4.2	EXTENSÃO PARA MÚLTIPLAS USINAS	40
4.3	SOLUÇÃO – CASO DETERMINÍSTICO	41
4.4	ESTOCASTICIDADE DAS AFLUÊNCIAS	43
4.4.1	ÁRVORE DE AFLUÊNCIAS	43
4.4.2	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA (PDE) – AFLUÊNCIAS INDEPENDENTES	44
4.5	AFLUÊNCIAS COM DEPENDÊNCIA SERIAL	46
4.5.1	REPRESENTAÇÃO DA CORRELAÇÃO SERIAL POR CADEIAS DE MARKOV	46
4.5.2	DIFICULDADE COMPUTACIONAL DA PDE	48
5	<u>METODOLOGIA PROPOSTA</u>	50
5.1	INTRODUÇÃO	50
5.2	APLICAÇÃO DA PDDE AO PROBLEMA DE OFERTA ESTRATÉGICA	50
5.2.1	CONSTRUÇÃO DA FBF	51
5.3	CONCAVIDADE NA PDDE	53
5.4	O CASO DO PROBLEMA DE OFERTA ESTRATÉGICA COM CUSTO TÉRMICO LINEAR POR PARTES	56
5.4.1	CONCAVIZAÇÃO DA FUNÇÃO DE REMUNERAÇÃO	57
6	<u>RESULTADOS</u>	60
6.1	INTRODUÇÃO	60
6.1.1	ROMÊNIA	61
6.1.2	EL SALVADOR	67
7	<u>CONCLUSÃO</u>	75
8	<u>REFERÊNCIAS</u>	77

9 APÊNDICE B - DETALHAMENTO DA METODOLOGIA PROPOSTA 82

9.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	82
9.2	PASSOS DO ALGORITMO SDDP	83
9.2.1	SELEÇÃO DO CONJUNTO INICIAL DE ESTADOS	83
9.2.2	CÁLCULO DA FUNÇÃO APROXIMADA DE BENEFÍCIO FUTURO	84
9.2.3	CÁLCULO DO LIMITE SUPERIOR	88
9.2.4	CÁLCULO DO LIMITE INFERIOR	89
9.2.5	VERIFICAÇÃO DA OTIMALIDADE	91

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Processo de Reforma nos setores elétricos

A indústria de eletricidade em muitos países vem passando por um processo de reestruturação [26], que busca uma maior eficiência para o consumidor final. Embora os detalhes do processo de reforma e o desenho institucional sejam diferentes em cada país [12], a organização geral, na maioria dos casos, passa pela substituição do planejamento centralizado, tanto da operação quanto da expansão do sistema, por procedimentos de mercado, onde os agentes geradores são livres para tomar suas decisões de investimento e produção, sendo também responsáveis pelos riscos decorrentes destas decisões.

1.2 Oferta de preços/quantidades no mercado de curto prazo

Um dos componentes básicos dos sistemas reestruturados é o mercado de energia de curto prazo, onde ocorre toda a compra e venda de energia elétrica. De modo simplificado, o mercado de curto prazo funciona da seguinte maneira [12,13,44]:

- a) no final de cada estágio (tipicamente, um dia ou uma semana), os geradores submetem ofertas de quantidade e preço para cada uma das horas do estágio seguinte (24 ou 168 horas); em alguns mercados a demanda também participa com ofertas de quantidade e preço;
- b) para cada hora, um operador de mercado coloca as ofertas dos geradores em ordem crescente de preço - se for o caso, também coloca as dos consumidores em ordem decrescente - e encontra o preço de equilíbrio, também conhecido como preço *spot*, onde a oferta total iguala a demanda total.
- c) a seguir, é realizada a contabilização/liquidação das vendas e compras de energia: os geradores (demandas) recebem (pagam) um montante (\$) igual à quantidade

produzida (consumida) (MWh) multiplicada pelo preço de equilíbrio (\$/MWh). Como a geração e demanda são iguais, a receita total dos geradores é igual ao pagamento total das demandas, isto é, o balanço contábil é igual a zero.

A existência de um despacho baseado em ofertas tem criado diversos desafios técnicos e institucionais, que tem sido amplamente discutidos e estudados na literatura durante os últimos anos ([8,13,21,47]). Para as empresas geradoras de energia, a questão é desenvolver estratégias de oferta que maximizem sua rentabilidade; por outro lado, reguladores estariam interessados em estudar estas estratégias de atuação no mercado buscando identificar abusos de posição dominante e manipulação de mercado que possam ser danosas ao consumidor final. Este poder está relacionado com a capacidade do gerador afetar, sozinho, o preço spot do sistema, seja através do aumento do preço ou da redução do montante ofertado; ele pode existir, por exemplo, em mercados concentrados (oligopólios), em horários de pico de demanda, e em sistemas com restrições de transmissão. Geradores com poder de mercado são conhecidos como *price makers*; os demais, como *price takers*. Será visto a seguir que estes dois tipos de geradores têm diferentes estratégias de oferta.

1.3 Estratégia de oferta para *price takers*

O objetivo do gerador é maximizar sua renda líquida, dada pela diferença entre o preço *spot* e o custo variável de operação, multiplicada pela energia que foi despachada pelo operador de mercado (passo (b) do processo descrito acima). Para um *price taker*, a estratégia ótima é ofertar seu custo variável de operação, conforme mostrado em [20]. A razão é que qualquer oferta diferente deste custo leva ao risco do gerador não ser despachado quando o preço spot excede o custo de operação, e portanto reduz sua rentabilidade.

No caso de usinas térmicas, o custo variável depende diretamente do custo de combustível e da eficiência da usina. No caso de usinas hidrelétricas, o cálculo do custo variável não é tão direto. A razão é que usinas hidrelétricas podem optar entre produzir hoje ou armazenar sua energia nos reservatórios para produzir no futuro. Em outras

palavras, o custo variável de uma hidrelétrica é na verdade um *custo de oportunidade*, que depende dos cenários de hidrologia, demanda e produção de outros geradores no futuro. O cálculo de custos de oportunidade para usinas hidrelétricas é um problema complexo de otimização sob incerteza, usualmente resolvido por técnicas de programação dinâmica estocástica [38,39].

1.4 Estratégia de oferta para *price makers*

Assim como no caso anterior, o objetivo é maximizar a renda líquida do gerador. A diferença é que, no caso de um *price maker*, o preço *spot* depende da oferta do próprio gerador, o que torna a estratégia de oferta mais complexa. Por exemplo, é possível que diminuir a quantidade ofertada – o que causa escassez e eleva o preço *spot* – resulte em uma renda líquida maior do que ofertar toda a capacidade disponível.

Como será visto no decorrer desta dissertação, a determinação da estratégia ótima de oferta para uma determinada semana é um problema de otimização não linear e não convexo. Entre as metodologias de solução propostas, encontram-se modelos iterativos e heurísticos [8,9,28,35,36], de complementariedade [7, 22-25, 41,50], e de programação inteira [1,37,46].

1.5 Oferta estratégica multi-estágio

A complexidade do problema de otimização da oferta aumenta quando a estratégia para um determinado estágio depende dos estágios seguintes, isto é, quando há um *acoplamento* entre os problemas. Isto ocorre, por exemplo, quando o agente possui usinas hidrelétricas: ele pode escolher entre ofertar a energia hidrelétrica armazenada nos reservatórios no estágio (semana) corrente, ou deixá-la para uma oferta futura. Esta situação é análoga ao de despacho de mínimo custo das hidrelétricas, mencionado anteriormente, que depende do custo de oportunidade da geração no futuro; no caso atual, a oferta da semana corrente depende do “benefício de oportunidade” da oferta futura.

O acoplamento temporal, por si só, já aumenta a complexidade do problema de oferta, pois o número de variáveis de decisão e restrições não lineares cresce em proporção ao número de estágios. Quando, adicionalmente, se considera a incerteza nas afluências futuras, que formam uma “árvore” de cenários que cresce exponencialmente com o número de estágios, a solução direta do problema se torna rapidamente inviável.

1.5.1 Programação dinâmica estocástica (PDE) e dual estocástica (PDDE)

Uma abordagem tradicional para a solução de problemas de decisão multi-estágio e estocásticos é a programação dinâmica estocástica (PDE) [14,48]. O algoritmo PDE é baseado numa recursão no sentido inverso do tempo (variando de T , a semana horizonte, até o primeiro estágio), onde o problema de otimização em cada estágio t é resolvido para diversos valores discretizados das chamadas *variáveis de estado*, que representam o acoplamento entre os estágios. Mostra-se nesta dissertação que o problema de oferta estratégica pode ser formulado como uma recursão de PDE: as variáveis de estado são os níveis de armazenamento dos reservatórios no início de cada estágio e as afluências observadas nos estágios anteriores¹; e o conjunto de valores ótimos em cada estágio t representa o valor esperado da renda líquida de t até o horizonte, T . Estes valores são passados para o estágio anterior, $t-1$, sob a forma de uma “função de benefício futuro” (FBF). Esta função possibilita comparar o benefício “imediatamente” de se ofertar a energia hidrelétrica em $t-1$, com o benefício de deixá-la armazenada para uso futuro, permitindo portanto a otimização global da estratégia. Esta foi a abordagem adotada em [4,29] para simular o processo competitivo entre empresas hidroelétricas price makers.

Embora a técnica de PDE seja bastante poderosa e, em particular, capaz de lidar simultaneamente com a incerteza das afluências e com a não convexidade do problema de oferta estratégica, seu esforço computacional cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado. Como consequência desta “maldição da dimensionalidade”, a

¹ Como será visto em detalhe nesta tese, as afluências dos estágios anteriores também são variáveis de estado porque há uma correlação temporal entre as afluências de sucessivas semanas, causadas pela existência de armazenamentos subterrâneos (aquíferos) que absorvem parte da chuva.

aplicação de PDE à oferta estratégia estaria limitada a sistemas com dois ou três reservatórios.

A “maldição da dimensionalidade” da PDE pode ser evitada através de uma técnica mais recente, a programação dinâmica *dual* estocástica (PDDE) [40]. Este algoritmo aproxima a tabela de valores futuros, em cada estágio, por uma função linear por partes (conjunto de hiperplanos), evitando desta forma a discretização das variáveis de estado e o crescimento exponencial do esforço computacional. A PDDE vem sendo aplicada com sucesso no despacho hidrotérmico estocástico de mínimo custo, em diversos países, em sistemas com até duas centenas de variáveis de estado [19].

1.6 Objetivo da tese

O objetivo desta tese é desenvolver uma metodologia para oferta estratégia de uma empresa geradora com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluições, e ilustrar a aplicação da mesma em sistemas realistas. A abordagem proposta é estender a metodologia PDDE, até então aplicada a problemas de minimização de custo, ao problema de otimização da oferta. Isto é feito através de dois passos principais: (i) Uso de uma estratégia de oferta por quantidade somente, onde o preço é igual a zero (análogo a um modelo de Cournot em problemas de equilíbrio econômico); e (ii) aproximar a cada estágio a função de benefício futuro (FBF) por sua envoltória côncava (“concave hull”); a razão é que a recursão de PDDE, por ser baseada numa aproximação por hiperplanos requer que o problema seja convexo, o que não ocorre necessariamente no caso da oferta estratégica.

1.7 Organização da Tese

Esta tese está organizada da seguinte maneira:

O capítulo 2 formula o problema de oferta de preços para um estágio como um modelo não linear e não convexo, e apresenta o esquema de solução que será utilizado nas extensões propostas: oferta por quantidade (preço = zero) e programação inteira. O

Capítulo 3 estende a formulação do problema para múltiplos estágios. O acoplamento é representado por uma restrição na quantidade total de energia disponível ao longo do período de análise. Mostra-se que problema pode ser resolvido um esquema de programação dinâmica determinística, onde a variável de estado é a quantidade de energia ainda disponível no início de cada estágio.

No capítulo 4, a formulação é mais uma vez estendida para representar usinas hidrelétricas e a incerteza nas afluências, e como utilizar a programação dinâmica estocástica (PDE) para este caso. Mostra-se a seguir que o esforço computacional da PDE cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado, o que introduz o tema do capítulo 5, a programação dinâmica estocástica dual (PDDE). Além de apresentar os pontos principais do algoritmo PDDE, mostra-se neste capítulo que a função de benefício futuro (BFB) do agente, apesar de não-côncava, pode ser aproximada por sua envoltória côncava e com isso permitir a aplicação da PDDE para o problema de estratégia de oferta.

O Capítulo 6 ilustra a aplicação da metodologia proposta para dois sistemas hidrotérmicos reais, Romênia e El Salvador. Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as conclusões e as sugestões para desenvolvimentos futuros.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OFERTA

2.1 Despacho de mínimo custo

O sistema é composto de J geradores *price takers*, indexados por $j = 1, \dots, J$; e de um único gerador *price maker*, indexado por “o”. Por facilidade de notação, supõe-se que a demanda não faz ofertas, e que o estágio tem duração de uma hora. Portanto, cada gerador faz uma única oferta de preço e quantidade. Como visto no capítulo anterior, a oferta ótima de cada gerador *price taker* j é composta de seu custo variável de operação, c_j , e de sua capacidade máxima \bar{g}_j . Por sua vez, as ofertas de preço e quantidade do *price maker* serão representadas por λ e E .

Conhecidas as ofertas de todos os geradores, o operador de mercado realiza um despacho de mínimo custo, formulado como o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min} \quad z = \lambda g_o + \sum_{j=1}^J c_j g_j \quad (2-1)$$

Sujeito a multiplicador

$$g_o + \sum_{j=1}^J g_j = d \quad \pi_d \quad (2-2)$$

$$g_j \leq \bar{g}_j \quad \pi_{g_j} \quad (2-3)$$

$$g_o \leq E \quad \pi_{g_o} \quad (2-4)$$

onde:

z	custo de operação total do sistema
g_o	geração do gerador <i>price maker</i> (MWh)
g_j	geração do gerador <i>price taker</i> j (MWh)
d	demanda (MWh)

A equação (2-2) representa o atendimento à demanda; as restrições (2-3)-(2-4) definem os limites de geração (é implicitamente assumido que $g \geq 0$).

A Figura 2.1 ilustra um exemplo de um despacho de mínimo custo com 3 geradores, considerados em ordem crescente de ofertas de preços. Observa-se que os geradores 1 e 2 estão gerando a toda capacidade, enquanto o gerador 3 gera parcialmente, o suficiente para atender à demanda.

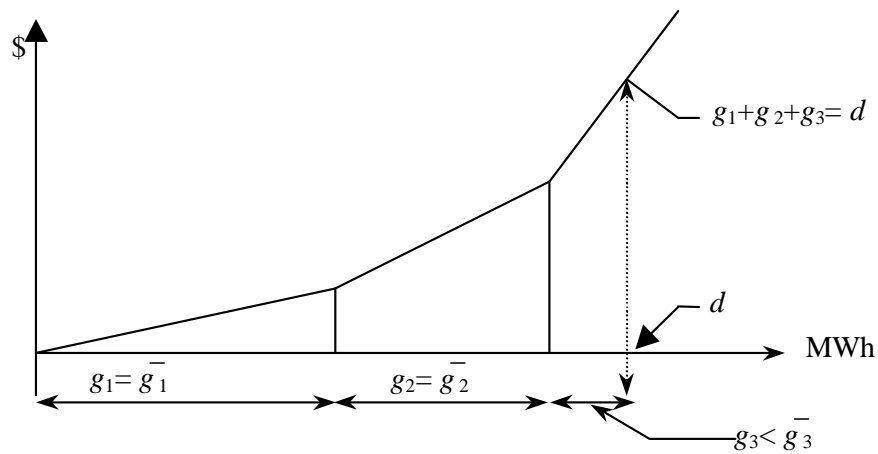


Figura 2.1 – Despacho do sistema

Associado às restrições (2-2)-(2-4) do despacho de mínimo custo, existe um conjunto de multiplicadores simplex. Em particular, o multiplicador π_d representa o custo marginal de operação, isto é, o aumento do custo operativo z se houver um aumento infinitesimal na demanda. O custo marginal π_d corresponde ao preço *spot*, que remunerará todos os geradores.

Da Figura 2.1, pode-se observar que o custo marginal é igual ao preço ofertado pelo último gerador despachado - no caso, o gerador 3. Por esta razão, este último gerador é conhecido como “marginal do sistema”.

2.2 Estratégia de oferta para o *price maker*

Para o agente *price maker*, a oferta ótima é a solução do seguinte problema:

$$\text{Max } R_o \quad (2-5)$$

Sujeito a

$$E \leq \bar{E} \quad (2-6)$$

onde \bar{E} é a capacidade máxima e R_o é a remuneração líquida do gerador:

$$R_o = [\pi_d - c_o] g_o \quad (2-7)$$

Observe que c_o é o custo variável de operação do *price maker*, o qual, como já comentado, pode ser diferente do preço ofertado, λ .

O problema (2-5)-(2-6) é conhecido como um problema de otimização de dois níveis, onde os componentes da função objetivo R_o em (2-7) - o preço spot π_d e a produção de energia g_o - resultam da solução de um outro problema de otimização, o despacho de mínimo custo (2-1)-(2-4). A solução do despacho de mínimo custo, por sua vez, depende das ofertas de preço e quantidade $\{\lambda\}$ e $\{E\}$ do próprio agente, das ofertas $\{c_j\}$ e $\{\bar{g}_j\}$ dos demais agentes e da demanda d . A figura 2.2 abaixo ilustra o processo de decisão.

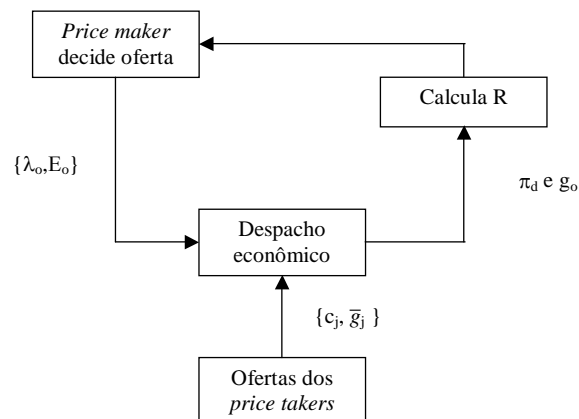


Figura 2.2 – Processo de decisão do agente *price maker*

2.3 Formulação matemática do problema de oferta

Como visto em (2-7), a remuneração líquida envolve variáveis primais – g_o – e duais – π_d – associadas à solução do problema de despacho de mínimo custo. Uma maneira de representar explicitamente ambas as variáveis é utilizar as condições de complementaridade da programação linear. Seja um problema qualquer de PL:

$$\begin{aligned} z = & \text{Min } cx \\ & \text{sujeito a} \\ & Ax \geq b \end{aligned} \tag{2-8}$$

O problema dual é:

$$\begin{aligned} w = & \text{Max } \pi b \\ & \text{sujeito a} \\ & \pi A \leq c \end{aligned} \tag{2-9}$$

Da teoria de programação linear, sabemos que as variáveis π do problema dual (2-9) são os multiplicadores simplex associados à solução ótima do problema primal (2-8). O valor das soluções ótimas z e w também é igual. Portanto, os valores ótimos de x e π podem ser representados *simultaneamente* como vetores solução viáveis do seguinte conjunto de restrições:

- a) *restrições primais*: $Ax \geq b$
- b) *restrições duais*: $\pi A \leq c$
- c) *igualdade primal-dual*: $cx = \pi b$

Do problema primal (2-1)-(2-4), temos:

$$g_o + \sum_{j=1}^J g_j = d \tag{2-10}$$

$$g_o \leq E \quad (2-11)$$

$$g_j \leq \bar{g}_j \quad (2-12)$$

Do problema dual, temos:

$$\pi_d + \pi_{g_o} - \lambda \leq 0 \quad (2-13)$$

$$\pi_d + \pi_{g_j} \leq c_j \quad (2-14)$$

$$\pi_{g_o} \leq 0 \quad (2-15)$$

$$\pi_{g_j} \leq 0 \quad (2-16)$$

Finalmente, a igualdade primal-dual é dada por :

$$\lambda g_o + \sum_{j=1}^J c_j g_j - \pi_d d - \pi_{g_o} E - \sum_{j=1}^J \pi_{g_j} \bar{g}_j = 0 \quad (2-17)$$

A formulação final é dada pela união de (2-5)-(2-7) e (2-10)-(2-17):

$$\text{Max} \quad [\pi_d - c_o] g_o \quad (2-18)$$

Sujeito a

$$E \leq \bar{E} \quad (2-19)$$

$$g_o + \sum_{j=1}^J g_j = d \quad (2-20)$$

$$g_o - E \leq 0 \quad (2-21)$$

$$g_j \leq \bar{g}_j \quad (2-22)$$

$$\pi_d + \pi_{g_o} - \lambda \leq 0 \quad (2-23)$$

$$\pi_d + \pi_{g_j} \leq c_j \quad (2-24)$$

$$\pi_{g_o} \leq 0 \quad (2-25)$$

$$\pi_{g_j} \leq 0 \quad (2-26)$$

$$\lambda g_o + \sum_{j=1}^J c_j g_j - \pi_d d - \pi_{g_o} E - \sum_{j=1}^J \pi_{g_j} \bar{g}_j = 0 \quad (2-27)$$

Observe que as ofertas de quantidade e preço do agente price maker, λ e E , são variáveis de decisão, enquanto as ofertas dos demais agentes são valores conhecidos.

O problema (2-18) – (2-27) é uma instância de uma classe de problemas de programação matemática conhecida como um “Problemas de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio” (ou MPEC – Mathematical Programs with Equilibrium Constraints) [32].

A maior dificuldade para a solução de (2-18)-(2-27) está nos produtos de variáveis na função objetivo – $\pi_d g_o$ – e na igualdade primal-dual – λg_o e $\pi_{g_o} E$ – os quais introduzem não linearidades e não convexidades. As dificuldades decorrentes de MPEC para a programação não linear são bem conhecidas [32] e uma grande variedade de algoritmos específicos têm sido desenvolvidos e aplicados para estes problemas nos últimos anos, como por exemplo os métodos de pontos interiores, algoritmos baseados em funções de penalidades (por exemplo Fischer-Burmeister) e algoritmos de programação quadrática combinados com métodos de penalidades ([5, 22, 25, 33, 34]).

A maior dificuldade associada a estas abordagens de solução é a inexistência de garantia de otimalidade global, como visto em [22, 23, 45].

A Referência [37] apresenta uma metodologia de solução deste problema buscando a otimalidade global, conhecida como expansão binária, que transforma o problema não linear em um problema de programação linear inteira.

Mostra-se a seguir uma simplificação do problema de oferta que permite uma solução mais simples, também baseada em programação inteira.

2.4 Modelo de oferta por quantidade

A idéia básica é considerar o preço de oferta $\lambda = 0$, e otimizar somente a quantidade ofertada, E . Neste caso, o aumento da remuneração líquida do agente resulta da restrição

de oferta. Embora a quantidade de energia total (MWh) a ser remunerada seja menor, o preço spot será maior, resultando numa remuneração total mais elevada. O modelo de oferta por quantidade é representado como:

$$\text{Max} \quad R(E) = \pi_d E \quad (2-28)$$

sujeito a

$$E \leq \bar{E} \quad (2-29)$$

Como a quantidade E é oferecida a preço nulo, ela é automaticamente despachada. Portanto, a informação que vem do despacho de mínimo custo é apenas o preço *spot* π_d :

$$z(E) = \text{Min} \quad \sum_{j=1}^J c_j g_j \quad (2-30)$$

sujeito a

multiplicador

$$\sum_{j=1}^J g_j = d - E \quad \pi_d \quad (2-31)$$

$$g_j \leq \bar{g}_j \quad \pi_{g_j} \quad (2-32)$$

A Figura 2.3 mostra o custo operativo z em função da energia ofertada E . Como o despacho de mínimo custo é um problema de programação linear, $z(E)$ corresponde à parametrização da solução ótima em função do lado direito da restrição (2-31). Da teoria de programação linear, sabemos que $z(E)$ é uma função linear por partes.

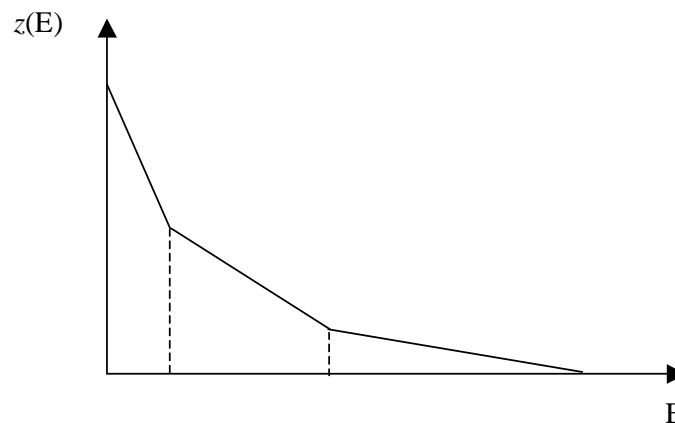


Figura 2.3 – Custo operativo em função da quantidade de energia ofertada

A Figura 2.4 mostra a variação dos preços *spot* π_d com a quantidade ofertada. Como visto, o preço spot é o custo do último gerador despachado, o gerador marginal. Portanto, os patamares da curva correspondem às inclinações dos segmentos da função linear por partes da Figura 2-3.

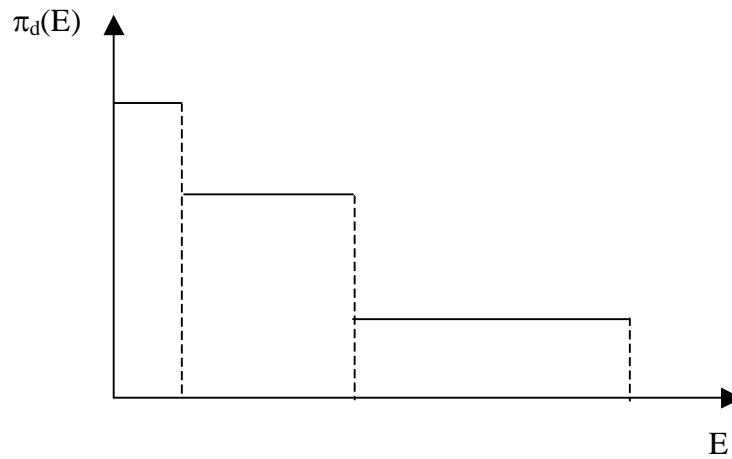


Figura 2.4 – Preço spot versus quantidade de energia ofertada

Finalmente, a Figura 2.5 mostra a remuneração do gerador em função da quantidade ofertada. Dado que $R(E) = \pi_d(E) \times E$, isto corresponde a multiplicar os patamares de preço da Figura 2-3 pela respectiva quantidade.

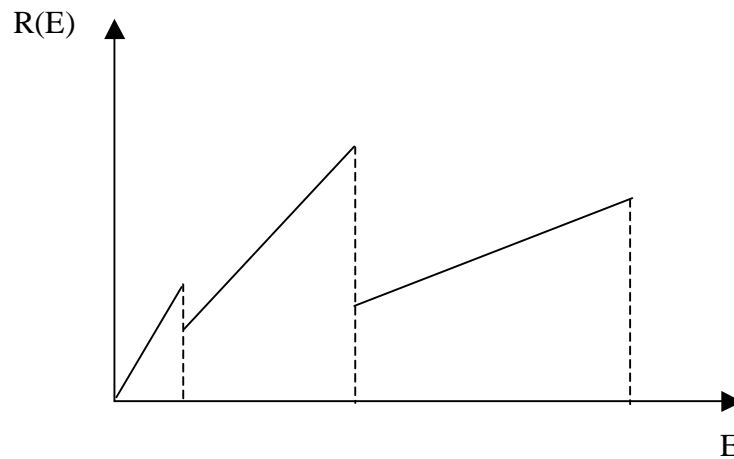


Figura 2.5 – Remuneração versus quantidade de energia ofertada

Observa-se na figura 2.5 que a remuneração do agente, $R(E)$, é uma função não convexa e composta de segmentos lineares. Esta função pode ser representada por um modelo de programação linear inteira, resultando no seguinte problema de oferta:

$$\text{Max} \quad \sum_{k=1}^K \pi_{dk} \times E_k \quad (2-33)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^K E_k \leq \bar{E} \quad (2-34)$$

$$\Delta_{k-1} x_k \leq E_k \leq \Delta_k x_k \quad (2-35)$$

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1 \quad (2-36)$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad (2-37)$$

A idéia básica é associar cada preço spot π_{dk} , $k = 1, \dots, K$, a uma variável de oferta de quantidade de energia, E_k , restrita a um intervalo $[\Delta_{k-1}, \Delta_k]$. A função objetivo (2-33) representa a remuneração do gerador, e a restrição (2-35) representa o intervalo de validade de cada preço spot. As variáveis inteiras $\{x_k\}$ definem se E_k é igual a zero, ou diferente de zero. Finalmente, a restrição (2-36) determina que somente uma das variáveis E_k pode ser diferente de zero.

2.5 Revisão Bibliográfica

Com o “boom” da reestruturação do setor elétrico em diversos países e a criação do despacho baseado em ofertas, muitos trabalhos têm sido escritos nos últimos anos sobre estratégias de ofertas de agentes geradores [13]. Estes trabalhos visam sobretudo subsidiar comitês de monitoramento de mercado com metodologias e modelos para identificar comportamento estratégico e o exercício e abuso de poder de mercado.

Como visto nos capítulos anteriores, mesmo em sua situação mais simples, em que se procura otimizar a oferta de um único estágio, o problema de determinar a estratégia ofertas é bastante complexo por ser não linear e não convexo.

Na literatura, este problema é usualmente formulado como um problema de otimização do tipo “dois níveis” (produtor deseja maximizar sua receita mas operador do mercado deseja minimizar o custo de operação do sistema), que por sua vez é transformado em um modelo não linear de “equilíbrio²” (MPEC) através da aplicação das condições de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT): as condições de maximização de lucro do agente price maker são combinadas com as de minimização de custos do operador do mercado em um único sistema de restrições, formando assim um problema de otimização de apenas “um nível” [24]. Quando o processo competitivo de todos os agentes price-makers é modelado, as condições de maximização de cada agente são escritas “simultaneamente”, formando assim um sistema de equações, que são resolvidas de forma conjunta para todos os agentes e formam um equilíbrio de Nash [17,23].

Entretanto, este sistema de equações é não linear (conforme visto anteriormente), dando origem a um problema de complementariedade não linear (NCP³) [24]. Esta é a abordagem adotada por alguns autores, como em [50]. Outros autores assumem que a demanda residual aos price makers é uma função linear do preço de mercado, o que assegura a linearidade do problema de complementariedade associado (formando um problema de complementariedade linear - ou LCP⁴), que pode ser resolvido utilizando pacotes comerciais de LCP. Esta é a abordagem utilizada em [7,23,24,41].

Uma terceira abordagem de solução é o chamado “equilíbrio pela curva de oferta”, ou Supply Function Equilibria (SFE), introduzido em [30]. Esta abordagem consiste em modelar a curva de oferta de um agente (e não somente uma oferta quantidade-preço) e tem sido utilizada em análises de equilíbrio em mercados competitivos de eletricidade, onde, em particular, o modelo *linear* de equilíbrio pela curva de oferta (LSF) tem atraído bastantes pesquisadores [3,15].

² Também conhecido como “modelo de complementariedade”.

³ Non linear complementarity problem.

⁴ Linear complementarity problem.

Finalmente, algumas abordagens baseadas em programação linear-inteira têm aparecido na literatura mais recentemente, voltadas essencialmente para a otimização da estratégia de uma específica empresa price maker [1,2,37,46].

Embora diversas abordagens eficientes de solução tem sido reportadas, usualmente não é possível garantir a solução ótima global do problema (devido à não convexidade) e há uma grande dificuldade computacional ao incorporar alguns aspectos importantes para agentes hidroelétricos, como a incerteza na hidrologia e múltiplos estágios nos agentes price makers⁵.

Para aliviar esta segunda dificuldade, outros trabalhos fazem uso da programação dinâmica estocástica (PDE) para criar funções de benefício futuro para os agentes e, desse modo, representar o impacto das decisões de uma etapa em etapas subseqüentes. Esta abordagem foi introduzida em [43], que estudaram possibilidade de manipulação de mercado no sistema da Nova Zelândia com um modelo multi-estágio, e estendida em [3,29], que modelou o processo de competição entre agentes hidroelétricos no sistema Brasileiro num enfoque multi-estágio e estocástico, onde a cada estado da recursão de PDE é encontrado um equilíbrio de Nash-Cournot entre os agentes. Ambos trabalhos analisam efeitos de contratos bilaterais como mecanismos para mitigar o exercício de poder de mercado. Esta é a abordagem também adotada em [42], que assume as funções de benefício futuro já calculadas e analisa o problema de curto prazo para o sistema Chileno. Mais recentemente, [51] apresentou um procedimento de programação dinâmica determinística com uma representação linear-inteira da função de benefício futuro e [35]

⁵ Diversos trabalhos vêm sendo publicados recentemente para determinar estratégia de ofertas de agentes hidroelétricos price takers, sobretudo inspirados no desenho do mercado Nórdico de eletricidade (Nordpool). Nestes trabalhos [16,18,31,40], o preço de mercado é uma variável exógena e modelada através de cenários. Assim, a estratégia de oferta do agente é modelada num enfoque multi-estágio e estocástico, onde cenários de preços de mercado e vazões são informados e o agente busca calcular o seu “lucro de oportunidade” através de algoritmos híbridos de PDE-PDDE.

apresentou procedimentos heurísticos/iterativos para verificar exercício de poder de mercado, ambos aplicados ao sistema Brasileiro.

Como de conhecimento, a desvantagem da PD ou PDE reside no fato de que o número de estados cresce exponencialmente com o número de usinas – a chamada “maldição da dimensionalidade”. Assim sendo, apenas problemas de dimensão reduzida (com poucas usinas) podem ser resolvidos na prática, como foi o caso de [4,29,42,43,51].

Esta tese apresenta um procedimento para determinar a oferta estratégica de empresa geradora com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluências, e ilustrar a aplicação da mesma em sistemas realistas. A abordagem proposta é procurar superar as dificuldades da PDE com a aplicação da metodologia PDDE, até então utilizada em problemas de minimização de custo, ao problema de otimização da oferta. Como o enfoque da tese é apresentar um procedimento eficiente para a modelagem completa do parque hidroelétrico, da incerteza e do acoplamento temporal num despacho por ofertas, será representado apenas um agente hidroelétrico price-maker. Os resultados obtidos nesta tese serão comparados com os obtidos em um despacho de mínimo custo, quando então se pode analisar os resultados do método proposto para efeito do comportamento estratégico.

3 ESTRATÉGIA DE OFERTA MULTI-ESTÁGIO – CASO DETERMINÍSTICO

3.1 Introdução

O problema de otimização da oferta discutido no capítulo anterior estava restrito a um único estágio, por exemplo uma semana. Havia, portanto, a hipótese implícita de que a oferta de uma determinada semana não afetava as das semanas seguintes, isto é, de o problema era *desacoplado* no tempo.

Esta hipótese é razoável para sistemas térmicos, onde a capacidade de geração em uma determinada semana é em geral independente das decisões operativas nas demais. Entretanto, ela não o é para sistemas hidroelétricos, onde os reservatórios das usinas permitem que haja uma transferência de energia (sob a forma de água armazenada) entre períodos sucessivos. Com isso, o agente hidroelétrico pode decidir ofertar (utilizar) o seu recurso em uma dada etapa ou armazená-lo para uso futuro, o que introduz um acoplamento temporal ao problema.

Neste capítulo será apresentado o problema de determinação da estratégia de oferta de um agente ao longo de um horizonte de planejamento, assumindo-se conhecida a quantidade total de energia disponível que pode ser ofertada durante todo o período em estudo.

Primeiramente será mostrada a extensão para o caso de múltiplos estágios da formulação de programação inteira apresentada no capítulo anterior. A seguir será visto o problema de dois estágios e mostrado que este pode ser resolvido pela aplicação da programação dinâmica determinística. Finalmente, este procedimento será estendido para o caso de múltiplos estágios.

3.2 Estratégia de oferta de um agente hidroelétrico – 2 estágios

Suponha que a quantidade total de energia disponível para o agente é E^* , e que o agente pode repartir esta energia entre T períodos de oferta consecutivos. O problema de estratégia de ofertas do agente é formulado como:

$$\text{Max} \quad \sum_{t=1}^T R(E_t) \quad (3-1)$$

Sujeito a

$$\sum_{t=1}^T E_t \leq E^* \quad (3-2)$$

$$E_t \leq \bar{E}_t \quad (3-3)$$

A função objetivo do problema acima representa a soma das receitas obtidas ao longo do período. A restrição (3-2) representa o acoplamento entre as decisões de cada estágio ao longo do tempo, enquanto as restrições (3-3) limitam as ofertas de energia de cada estágio à capacidade máxima do gerador.

Este problema, conhecido como de *decisões seqüenciais*, poderia ser resolvido, em princípio, pela extensão direta da formulação por programação inteira para o problema de uma única etapa (2-33)-(2-37):

$$\text{Max} \quad \sum_{t=k=1}^T \sum_{k=1}^K \pi_{dtk} \times E_{tk} \quad (3-4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{t=k=1}^T \sum_{k=1}^K E_{tk} \leq \bar{E} \quad (3-5)$$

$$\Delta_{tk-1} x_k \leq E_{tk} \leq \Delta_{tk} x_k \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \quad (3-6)$$

$$\sum_{k=1}^K x_{tk} = 1 \quad t = 1, \dots, T \quad (3-7)$$

$$x_{tk} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K \quad (3-8)$$

Observa-se, entretanto, que o número de variáveis inteiras do problema (3-4)-(3-8) é igual a $K \times T$. Como o esforço computacional dos algoritmos de programação inteira mista aumenta muito rapidamente com o número de variáveis inteiras, conclui-se que a resolução direta do mesmo seria inviável, mesmo para um número moderado de estágios.

3.3 Programação dinâmica

Uma alternativa para resolver problemas de decisões seqüenciais como (3-4)-(3-8) é a programação dinâmica (PD). O esquema PD decompõe o problema de T estágios em T subproblemas de um estágio, eliminando portanto o crescimento não linear do esforço computacional com o número de estágios.

A aplicação do esquema de PD será ilustrada para o sistema com dois estágios, a seguir:

$$\text{Max} \quad R(E_1) + R(E_2) \quad (3-9)$$

Sujeito a

$$E_1 + E_2 \leq E^* \quad (3-10)$$

$$E_1 \leq \bar{E} \quad (3-11)$$

$$E_2 \leq \bar{E} \quad (3-12)$$

Defina \bar{E}_2 como a quantidade de energia disponível para o gerador no estágio 2, após a decisão de oferta no estágio 1: $\bar{E}_2 = E^* - E_1$. Resolva agora o problema de oferta do estágio 2 para um determinado valor de \bar{E}_2 :

$$\beta(\bar{E}_2) = \text{Max} \quad R(E_2) \quad (3-13)$$

Sujeito a

$$E_2 \leq \bar{E}_2 \quad (3-14)$$

$$E_2 \leq \bar{E} \quad (3-15)$$

Suponha agora que o problema (3-13)-(3-15) é resolvido sucessivamente para M valores de \bar{E}_2 , discretizados no intervalo $[0, E^*]$. Este intervalo cobre todas as hipóteses, ou *estados iniciais* possíveis, para o problema do segundo estágio: desde $E_1 = E^*$ ($\Rightarrow \bar{E}_2 = 0$) até $E_1 = 0$ ($\Rightarrow \bar{E}_2 = E^*$). Por esta razão, \bar{E}_2 é conhecida como *variável de estado*. Os resultados das M soluções seriam consolidados como uma função univariada, $\beta(\bar{E}_2)$, que forneceria o resultado da oferta ótima (renda líquida) no segundo estágio, em função do valor de \bar{E}_2 . Isto nos permite reescrever o problema de dois estágios (3-9)-(3-12) como um problema de um único estágio:

$$\text{Max} \quad R(E_1) + \beta(\bar{E}_2) \quad (3-16)$$

Sujeito a

$$\bar{E}_2 = E^* - E_1 \quad (3-17)$$

$$E_1 \leq \bar{E} \quad (3-18)$$

A função $R(E_1)$ na função objetivo nos dá a renda líquida no primeiro estágio, em função da decisão E_1 ; por esta razão, ela é conhecida como *função de benefício imediato* (FBI). Por sua vez, a função $\beta(\bar{E}_2)$ fornece a renda líquida no segundo estágio, em função da *mesma* decisão E_1 ; a ligação entre E_1 e \bar{E}_2 é direta, e dada pela equação (3-17), conhecida como *equação de transição*. Por analogia, esta função é conhecida como *benefício futuro* (FBF).

3.3.1 Exemplo

Suponha um sistema cuja demanda para as duas etapas em estudo seja $D_1 = D_2 = 30\text{MWh}$. Considera-se a existência de 3 agentes *price takers*, cujas capacidades de geração e custos operativos estão listados na tabela abaixo:

Gerador	Capacidade (MWh)	Custo Operativo (\$/MWh)
---------	---------------------	-----------------------------

T1	15	10
T2	10	12
T3	5	15

Assume-se que o agente cuja receita pretende-se otimizar possui um montante total de energia disponível para as duas etapas limitado em 30 MWh, que ele pode escolher livremente como ofertar.

É interessante observar o aspecto dos gráficos que relacionam o montante de energia ofertado em uma dada etapa com o preço spot do sistema e com a remuneração obtida pelo agente, correspondentes às figuras (2-4) e (2-5).

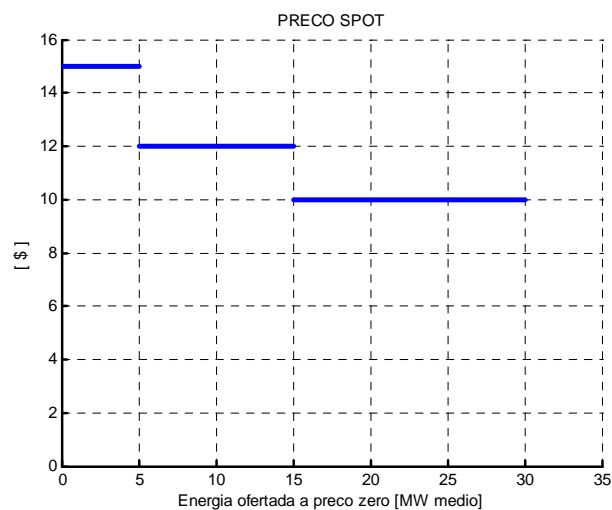


Figura 3.1 – Variação do preço spot com o montante de energia ofertada

O gráfico acima mostra como varia o preço de fechamento do mercado em função da energia ofertada: à medida que o agente aumenta sua oferta ele desloca os geradores mais caros, fazendo com que o preço spot seja reduzido para o valor ofertado pelo gerador imediatamente mais barato. Como já mencionado, em cada um destes intervalos onde o preço spot é constante a remuneração é uma função linear da energia ofertada, como pode ser visto no gráfico abaixo:

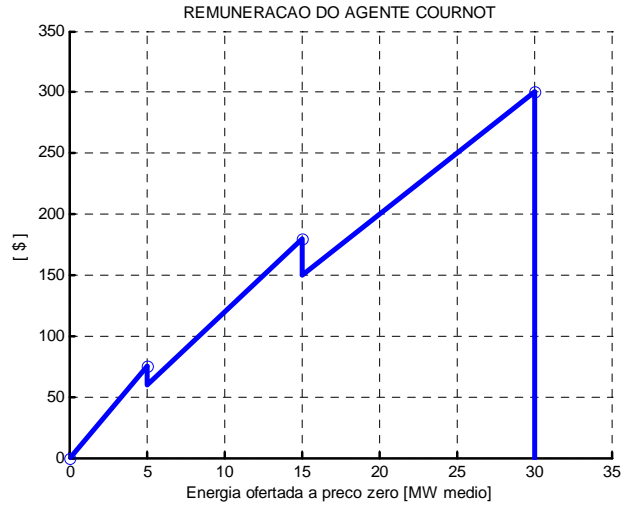


Figura 3.2 – Remuneração em função da energia ofertada

O algoritmo tem início resolvendo-se o problema do segundo estágio para diversos valores discretizados da energia total disponível, E^* . Caso se discretize o montante total de 5 em 5 MWh, o problema (3-13)-(3-14) seria resolvido 7 vezes para valores de \bar{E}_2 iguais a 0, 5, 10, ..., 30 MWh. Obtém-se assim uma tabela que relaciona a quantidade de energia disponível para o segundo estágio com a remuneração desta etapa:

Montante disponível para 2ª etapa (MWh)	Remuneração (\$)
0	0
5	75
10	120
15	180
20	200
25	250
30	300

O problema da primeira etapa pode ser resolvido limitando a quantidade de energia que pode ser ofertada à diferença entre o montante total disponível e cada valor de \bar{E}_2

utilizado para resolver os problemas da segunda etapa no passo anterior do algoritmo. O resultado da solução dos 7 problemas é resumido na tabela abaixo:

Montante disponível para 1ª etapa (MWh)	Remuneração (\$)
30	300
25	250
20	200
15	180
10	120
5	75
0	0

A decisão ótima é aquela que maximiza a soma das receitas obtidas nas duas etapas. A figura 3.3 ilustra as funções de benefício imediato e futuro; como era de se esperar, quando maior o montante ofertado no primeiro estágio, E_1 , maior o benefício imediato e menor o futuro; o objetivo da otimização (3-15)-(3-17) é encontrar a repartição entre os dois tipos de benefício que maximize o benefício total.

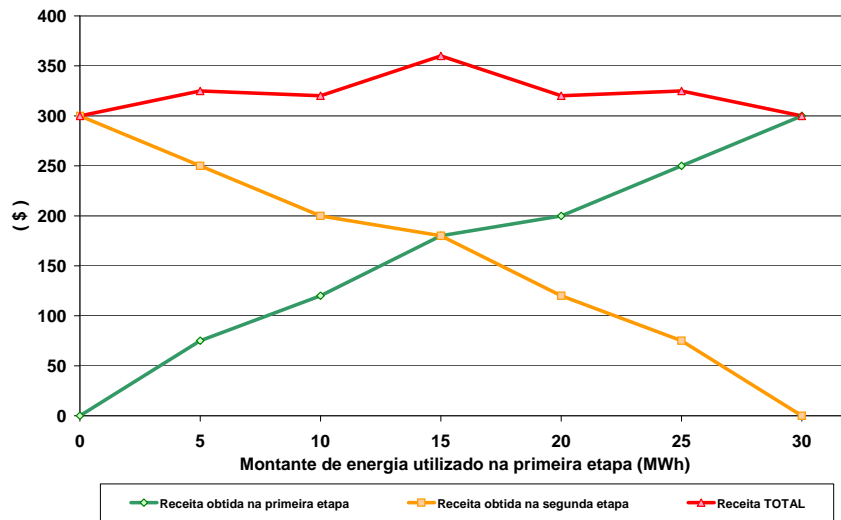


Figura 3.3 – Remuneração total e em cada etapa em função da energia utilizada no primeiro estágio

Observa-se que ofertar toda a quantidade de energia disponível (30MWh) seria a decisão ótima para cada etapa individualmente, obtendo-se uma receita de \$300. Entretanto, esta oferta implica em uma remuneração nula na outra etapa. Assim, a decisão que maximiza a soma das receitas é ofertar metade da energia disponível em cada um dos estágios resultando em uma receita total de \$360.

3.3.2 Extensão para múltiplos estágios

Em resumo, o esquema de PD permite resolver recursivamente o problema de decisões sequenciais como uma seqüência de problemas de um estágio, onde a função de benefício futuro em cada estado “resume” toda informação necessária sobre o comportamento futuro do sistema.

Apresenta-se a seguir o algoritmo de PD para um problema com T estágios:

Inicialize a FBF do último estágio como $\beta_{T+1}(\bar{E}_{T+1}) = 0$

Para $t = T, T-1, \dots, 1$

Para cada valor $\bar{E}_t = \bar{E}_t^1, \dots, \bar{E}_t^m, \dots, \bar{E}_t^M$

Resolva o problema de um estágio para \bar{E}_t^m :

$$\beta_t(\bar{E}_t^m) = \text{Max} \quad R_t(E_t) + \beta_{t+1}(\bar{E}_{t+1})$$

Sujeito a

$$\bar{E}_{t+1} = \bar{E}_t^m - E_t$$

$$E_t \leq \bar{E}$$

fim

fim

O esquema PD requer a solução de $M \times T$ problemas de um estágio.

3.4 Conclusão

Este capítulo analisou o problema de determinação da estratégia de oferta de um agente ao longo de um horizonte de planejamento, assumindo-se conhecida a quantidade total de energia disponível que pode ser ofertada durante todo o período em estudo. Mostrou-se que problema pode ser resolvido um esquema de programação dinâmica determinística, onde a função de benefício futuro em cada estado “resume” toda informação necessária sobre o comportamento futuro do sistema. Esta abordagem foi adotada em [51], onde as funções de benefício futuro eram aproximadas por segmentos lineares em um problema de programação linear-inteira.

A hipótese de conhecimento prévio da quantidade total de energia disponível para oferta não é razoável uma vez que esta depende das vazões afluentes aos reservatórios que ocorrem no decorrer do período. As afluências apresentam grande variabilidade, flutuando a nível sazonal, anual e regional e não é possível prevê-las com precisão. Com isso, o *tradeoff* anterior de uso da água “hoje” ou “no futuro” só pode ser expresso em termos probabilísticos. Além disso, empresas hidroelétricas podem possuir diversas usinas hidro em seu portfólio de geração. Estes são os temas do próximo capítulo, que estende a formulação apresentada até o momento para representar múltiplas usinas hidrelétricas e a incerteza nas afluências, e como utilizar a programação dinâmica estocástica (PDE) para este caso.

4 ESTRATÉGIA DE OFERTA MULTI-ESTÁGIO – CASO ESTOCÁSTICO

4.1 Introdução

No capítulo anterior analisou-se o problema de determinação da estratégia de oferta de um agente ao longo de um horizonte de planejamento assumindo-se conhecida a quantidade total de energia que pode ser ofertada durante o período em estudo. Esta é uma simplificação bastante forte para um agente hidrelétrico já que, além de desconhecida, a energia afluenta aos reservatórios chega continuamente e não de uma só vez. O objetivo deste capítulo é estender esta formulação simplificada do problema de ofertas para o caso de múltiplas usinas hidrelétricas e de incerteza nas afluências.

Inicialmente a formulação apresentada no capítulo anterior será estendida para considerar múltiplas usinas sob o controle da empresa que se otimiza. É importante adicionar as restrições operativas convenientes pois elas podem representar sérias limitações à estratégia de oferta do agente. O algoritmo de PD do capítulo anterior será reformulado para solucionar este novo problema.

Outro ponto fundamental que deve ser levado em consideração é o caráter aleatório das afluências às usinas hidroelétricas da empresa. Isto introduz uma dependência da quantidade de energia disponível em cada etapa com o cenário hidrológico futuro. O problema de oferta estratégica pode ser formulado como uma recursão de programação dinâmica estocástica (PDE), que é uma abordagem tradicional para a solução de problemas de decisão multi-estágio e estocásticos.

Finalmente, o algoritmo de PDE será estendido para representar um aspecto importante e não desprezível em sistemas hidroelétricos: a correlação “serial” presente nas vazões afluentes aos reservatórios das usinas hidroelétricas. Em outras palavras, se os

volumes afluídos em etapas anteriores recentes estão acima da média, as afluências futuras próximas também tenderão a ser maiores que a média. Dessa forma, a formulação será estendida para incorporar este fenômeno definindo-se como variáveis de estado os níveis de armazenamento dos reservatórios no início de cada estágio e as afluências observadas nos estágios anteriores.

O procedimento final de PDE apresentado permite, da mesma forma que no capítulo anterior, calcular uma “função de benefício futuro” que possibilita comparar o benefício “imediato” de se ofertar a energia hidrelétrica em uma dada etapa, com o benefício de deixá-la armazenada para uso futuro, permitindo portanto a otimização global da estratégia.

4.2 Extensão para Múltiplas usinas

O primeiro aspecto a ser incorporado à formulação do problema de ofertas será o conjunto de restrições decorrentes da operação de sistemas hidrelétricos com múltiplas usinas. O problema de múltiplos estágios, equivalente a (3-1)-(3-3), passa a ser escrito da seguinte maneira:

$$\text{Max} \quad \sum_{t=1}^T R(E_t) \quad (4-1)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_t(i) = E_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (4-2)$$

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) + \sum_{m \in M(i)} [u_t(m) + s_t(m)] \quad \text{para } i = 1, \dots, I; t = 1, \dots, T \quad (4-3)$$

$$v_{t+1}(i) \leq \bar{v}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I; t = 1, \dots, T \quad (4-4)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I; t = 1, \dots, T \quad (4-5)$$

onde:

i	indexa as usinas hidrelétricas (I é o número total de usinas)
$v_t(i)$	volume armazenado na usina i no início da etapa t (Hm^3)
$a_t(i)$	vazão lateral afluyente ao reservatório da usina i durante a etapa t (m^3/s)
$u_t(i)$	volume turbinado pela usina i durante a etapa t (m^3/s) – variável de decisão
$s_t(i)$	volume vertido pela usina i durante a etapa t (m^3/s) – variável de decisão
$m \in M(i)$	conjunto de usinas a montante da usina i
$\bar{v}(i), \bar{u}(i)$	limites máximos de volumes armazenado e vertido da usina i , respectivamente (Hm^3)
$\rho(i)$	fator de produção da usina i ($\text{MW}/\text{m}^3/\text{s}$)
E_t	quantidade total de energia ofertada/produzida pelo agente. (MWh)

A restrição (4-2) traduz a conversão dos volumes turbinados em energia efetivamente gerada através do fator de produção de cada usina hidroelétrica. A expressão (4-3) é a chamada equação de balanço hídrico, que relaciona o armazenamento e os volumes de entrada e saída do reservatório: o volume armazenado ao final de uma etapa é igual ao volume inicialmente armazenado somado à afluência do período e aos volumes turbinados e vertidos (variáveis de decisão) pelas usinas localizadas à montante e subtraído dos volumes turbinado e vertido pela própria usina (variáveis de decisão); as restrições (4-4) e (4-5) limitam superiormente o volume armazenado no reservatório e o volume turbinado a cada etapa, respectivamente.

4.3 Solução – Caso determinístico

No capítulo anterior o problema foi resolvido assumindo-se conhecida a quantidade total de energia disponível durante o horizonte de estudo. De maneira análoga, a formulação que considera as restrições operativas das múltiplas usinas com a hipótese de que as vazões afluentes $a_t(i)$ (a cada usina) são determinísticas pode ser resolvida por um esquema de PD. Neste caso, define-se o volume armazenado no início de cada etapa como variável de estado, pois é a principal variável que afetaria o benefício futuro da operação. O algoritmo de PD está detalhado abaixo:

Inicializar a FBF do último estágio como $\beta_{T+1}(v_{t+1}) = 0$

Para $t = T, T-1, \dots, 1$

Para cada nível de armazenamento $v_t = v_t^1, \dots, v_t^m, \dots, v_t^M$

Resolver o problema de um estágio (4-1) para $[v_t^m]$:

$$\beta_t(v_t^m) = \text{Max} \quad R(E_t) + \beta_{t+1}(v_{t+1})$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_t(i) = E_t$$

$$v_{t+1}(i) = v_t^m(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) + \sum_{m \in M(i)} [u_t(m) + s_t(m)]$$

$$v_{t+1}(i) \leq \bar{v}(i)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i)$$

fim

Criar uma FBF completa para o estágio anterior através da interpolação dos valores obtidos $\{\beta_t(v_t^m), m = 1, \dots, M\}$

fim

Observa-se que a descrição completa de um estado do sistema requer a informação do volume inicial de cada um dos reservatórios considerados, tornando a FBF uma função multivariada – ao contrário do que acontecia no problema descrito no capítulo anterior quando seu único parâmetro de entrada era a quantidade de energia ainda disponível no início de uma dada etapa.

Neste caso, é necessária a solução de $T \times M$ problemas de um estágio. Nota-se que M é igual ao número total de estados do sistema considerados: se cada um dos I reservatórios do sistema for discretizado em H níveis, M será igual a H^I .

4.4 Estocasticidade das afluições

Nos casos anteriores, considerou-se que as vazões afluentes ao longo do período eram conhecidas. Na realidade, a incerteza nas afluições é um dos fatores mais importantes na representação de sistemas hidrotérmicos. A extensão da metodologia para representar esta incerteza será discutida a seguir.

4.4.1 Árvore de afluições

Uma primeira abordagem para representar a incerteza hidrológica é utilizar uma árvore de afluições. A Figura 4.1 ilustra a árvore correspondente a um caso simples onde se consideram 2 possíveis cenários hidrológicos – por exemplo, seco e úmido – ao longo de três estágios.

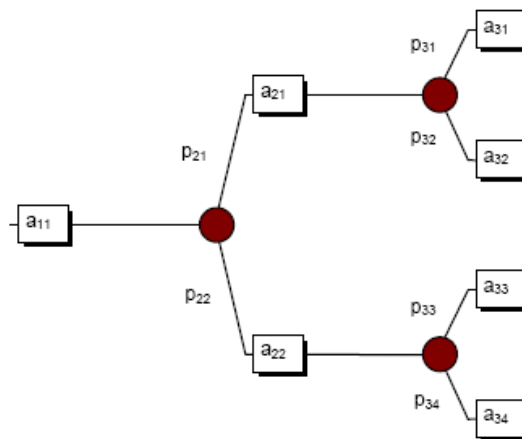


Figura 4-1 – Árvore de afluições

onde:

a_{ts}	afluência na etapa t , cenário s
p_{ts}	probabilidade condicionada de ocorrência do cenário de afluência $\{t,s\}$

O problema de oferta (4-1)-(4-5) sob incerteza é formulado a seguir, onde o objetivo é maximizar o valor esperado da renda da usina hidrelétrica (por simplicidade de notação considera-se a existência de um único reservatório):

$$\begin{aligned} \text{Max } & R(E_{11}) + p_{21}(R(E_{21}) + p_{31}R(E_{31}) + p_{32}R(E_{32})) + \\ & p_{22}(R(E_{22}) + p_{33}R(E_{33}) + p_{34}R(E_{34})) \end{aligned} \quad (4-6)$$

sujeito a :

$$v_{21} = v_{11} - u_{11} - s_{11} + a_{11} \quad (4-7)$$

$$v_{31} = v_{21} - u_{21} - s_{21} + a_{21} \quad (4-8)$$

$$v_{32} = v_{21} - u_{22} - s_{22} + a_{22} \quad (4-9)$$

$$v_{41} = v_{31} - u_{31} - s_{31} + a_{31} \quad (4-10)$$

$$v_{42} = v_{31} - u_{32} - s_{32} + a_{32} \quad (4-11)$$

$$v_{43} = v_{32} - u_{33} - s_{33} + a_{33} \quad (4-12)$$

$$v_{44} = v_{32} - u_{34} - s_{34} + a_{34} \quad (4-13)$$

$$v_{t+1,s} \leq \bar{v} \quad \forall \{t, s\} \quad (4-14)$$

$$u_{t,s} \leq \bar{u} \quad \forall \{t, s\} \quad (4-15)$$

$$E_{t,s} = \rho \cdot u_{t,s} \quad \forall \{t, s\} \quad (4-16)$$

É fácil perceber que esta formulação direta se torna rapidamente inviável, pois o número de ramos – e, portanto, o número de variáveis e restrições – cresce exponencialmente com o número de estágios do problema. Se considerarmos N possibilidades de aberturas em cada nó e T etapas no problema, haveria no último estágio N^T ramos na árvore. Por esta razão, torna-se necessário usar uma abordagem de programação dinâmica estocástica (PDE), descrita a seguir.

4.4.2 Programação Dinâmica Estocástica (PDE) – aflúências independentes

Inicialmente, será discutido o caso estocástico com aflúências estatisticamente independentes, isto é, a aflúência no estágio t não depende da aflúência no estágio anterior. Em termos da Figura 4.1, isto significa que há dois cenários diferentes por estágio, isto é, o cenário a_{31} é igual ao cenário a_{33} , e o a_{32} é igual ao a_{34} . Observe que a

hipótese de independência das vazões não reduz a dimensão do problema, pois o número de ramos não se altera.

O procedimento PDE está apresentado a seguir:

Inicializar a FBF do último estágio como $\beta_{T+1}(v_{t+1}) = 0$

Para $t = T, T-1, \dots, 1$

Para cada nível de armazenamento $v_t = v_t^1, \dots, v_t^m, \dots, v_t^M$

Para cada cenário de afluência⁶ $a_t = a_t^1, \dots, a_t^k, \dots, a_t^K$

Resolver o problema de um estágio (4-1) para $[v_t^m, a_t^k]$:

$$\beta_t^k(v_t^m) = \text{Max } R(E_t) + \beta_{t+1}(v_{t+1})$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_t(i) = E_t$$

$$v_{t+1}(i) = v_t^m(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t^k(i) + \sum_{m \in M(i)} [u_t(m) + s_t(m)]$$

$$v_{t+1}(i) \leq \bar{v}(i)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i)$$

fim

Calcular o valor esperado dos benefícios obtidos em todos os cenários

$$\text{hidrológicos: } \beta_t(v_t^m) = \sum_{k=1}^K p_k \times \beta_t^k(v_t^m)$$

fim

Criar uma FBF completa para o estágio anterior através da interpolação dos valores obtidos $\{\beta_t(v_t^m), m = 1, \dots, M\}$

fim

Comparando o procedimento PDE acima com a recursão PD determinística do capítulo anterior, observa-se que há agora três níveis de recursão, onde no terceiro nível

⁶ Estes cenários podem ser produzidos por modelos externos de geração de séries sintéticas de vazões afluentes aos reservatórios, como descrito em [27].

se percorrem os cenários de afluições $\{a_t^1, \dots, a_t^k, \dots, a_t^K\}$, para um dado volume inicial v_t^m (segundo nível de recursão) e um dado estágio t (primeiro nível de recursão) O esforço computacional aumenta de maneira correspondente – o esquema PDE requer $M \times K \times T$ soluções de problemas de um estágio – mas ainda é muito menor do que a resolução direta.

4.5 Afluições com dependência serial

Embora as chuvas, que são o processo primário de alimentação dos rios, sejam estatisticamente independentes, as vazões apresentam uma correlação “serial” positiva, isto é, se a vazão do estágio atual for maior do que a média, há uma tendência para que a vazão do estágio seguinte seja também maior do que a média, e vice-versa. Esta dependência é consequência do processo de retenção / esvaziamento da água nos aquíferos subterrâneos.

4.5.1 Representação da correlação serial por cadeias de Markov

A correlação serial pode ser representada por uma cadeia de Markov como visto a seguir, onde p_{kl} representa a probabilidade de transição do cenário de afluição a_t^k no estágio t para o cenário a_{t+1}^l no estágio $t+1$:

$t \rightarrow$	a_t^1	...	a_t^l	...	a_t^K
$t-1 \downarrow$					
a_{t-1}^1	p_{11}	...	p_{1l}	...	p_{1K}
...
a_{t-1}^k	p_{k1}	...	p_{kl}	...	p_{kK}
...
a_{t-1}^K	p_{K1}	...	p_{Kl}	...	p_{KK}

A existência de dependência serial implica que diferentes afluições no mês anterior resultam em diferentes afluições ao longo do mês atual, diferentes volumes

armazenados ao final do mês e, finalmente, diferentes benefícios futuros. Isto significa que a decisão de ofertar energia depende agora de dois tipos de variáveis de estado: o armazenamento nos reservatórios no início do estágio e as aflúências observadas no estágio anterior. O ajuste no algoritmo de PDE consiste em criar um novo nível de recursão, como mostrado a seguir:

Inicializar a FBF do último estágio como $\beta_{T+1}(v_{T+1}, a_T) = 0$

Para $t = T, T-1, \dots, 1$

Para cada nível de armazenamento $v_t = v_t^1, \dots, v_t^m, \dots, v_t^M$

Para cada cenário de aflúência da etapa anterior $a_{t-1} = a_{t-1}^1, \dots, a_{t-1}^k, \dots, a_{t-1}^K$

Para cada cenário de aflúência da etapa t *condicionado* à aflúência da etapa anterior $\{a_t = a_t^1, \dots, a_t^l, \dots, a_t^L\}$

Resolver o problema de um estágio (4-1) para um volume inicial igual a v_t^m e cenário de aflúência a_t^l :

$$\beta_t^l(v_t^m, a_{t-1}^k) = \text{Max } R(E_t) + \beta_{t+1}(v_{t+1}^1, a_t^l)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_t(i) = E_t$$

$$v_{t+1}^1(i) = v_t^m(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t^l(i) + \sum_{m \in M(i)} [u_t(m) + s_t(m)]$$

$$v_{t+1}^1(i) \leq \bar{v}(i)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i)$$

fim

Calcular o valor esperado dos benefícios obtidos em todos os cenários

$$\text{hidrológicos: } \beta_t(v_t^m, a_{t-1}^k) = \sum_{l=1}^L p_{kl} \times \beta_t^l(v_t^m, a_{t-1}^k)$$

fim

Criar uma FBF completa $\beta_t(v_t, a_{t-1})$ para o estágio anterior através da interpolação dos valores obtidos $\{\beta_t(v_t^m, a_{t-1}^k), m = 1, \dots, M; K = 1, \dots, K\}$

fim

fim

O esquema PDE com correlação serial requer $T \times M \times K \times L$ soluções de problemas de um estágio, onde K é o número de cenários de afluência da etapa anterior ($t-1$) e L é o número de cenários condicionados da etapa corrente (t).

Em muitos países, incluindo o Brasil, a vazão do próximo estágio depende não só da vazão observada no estágio corrente mas também das vazões observadas nos últimos cinco ou seis estágios. Embora a extensão do algoritmo PDE para representar estes modelos de “memória longa” seja imediata – cada vazão anterior é representada por uma variável de estado adicional – o esforço computacional se multiplica, pois serão introduzidos níveis adicionais de recursão. Isto sinaliza que mesmo o algoritmo de programação dinâmica estocástica, apesar de sua eficiência, pode encontrar dificuldades computacionais. Este tema é discutido a seguir.

4.5.2 Dificuldade computacional da PDE

Como visto nas seções anteriores, o esforço computacional da PDE, dado pelo número de problemas resolvidos a cada estágio, depende do produto dos níveis de discretização de cada variável de estado. A tabela a seguir mostra este esforço para sistemas com diferentes tamanhos, supondo que cada variável de estado (armazenamento e afluências de três etapas anteriores) foi discretizada em 10 níveis:

Número de reservatórios	Número de estados do sistema
1	10^4
2	10^8
3	10^{12}

Observa-se que para um sistema com apenas um reservatório, seria necessário resolver dez mil problemas em cada estágio; com dois reservatórios, o número de problemas “explode” para 100 milhões. Conclui-se que a abordagem PDE também não é adequada para a solução do problema de oferta.

No próximo capítulo será apresentada a abordagem desta tese de como resolver o problema de ofertas estratégicas aplicando-se a técnica de programação dinâmica dual estocástica (PDDE). Ao representar a função de benefício futuro através de um conjunto de hiperplanos, a PDDE permite que se obtenham os mesmos resultados da PDE tradicional sem a necessidade de determinar todas as combinações possíveis das variáveis de estado. Foge-se assim da “maldição da dimensionalidade”, tornando possível a resolução de problemas que considerem um grande número de reservatórios.

5 METODOLOGIA PROPOSTA

5.1 Introdução

O problema da determinação da estratégia de oferta para agentes hidroelétricos é bastante semelhante ao problema do despacho hidrotérmico de mínimo custo. De maneira análoga às funções de benefício imediato e futuro criadas no problema de oferta estratégica, no problema de despacho hidrotérmico de mínimo custo utilizam-se funções de custo imediato e custo futuro para representar o acoplamento temporal existente entre as decisões operativas. O objetivo, neste caso, é a minimização dos custos totais de operação (soma dos custos imediato e futuro).

A programação dinâmica dual estocástica vem sendo aplicada para a solução do problema de despacho hidrotérmico de mínimo custo, como proposto em [38]. A utilização desta técnica permitiu a representação individualizada de usinas e de toda a topologia das bacias hidrográficas conferindo maior acurácia aos resultados. A semelhança entre os problemas incentivou a busca por uma maneira de aplicar a PDDE ao problema de determinação da estratégia de oferta ótima de um agente hidrelétrico. Neste capítulo será apresentado inicialmente como a PDDE constrói a função de benefício futuro a partir do problema de um único estágio. Em seguida, são discutidas as características do problema de oferta ótima que impedem a aplicação direta da técnica e a seguir formulada a proposta deste trabalho que torna a utilização possível.

5.2 Aplicação da PDDE ao problema de oferta estratégica

A principal diferença entre a PDE – detalhada no capítulo 4 – e a PDDE está na maneira pela qual as duas técnicas constroem a aproximação da função de benefício futuro ao decompor o problema multi-estágio em uma sequência de problemas de um único estágio. Enquanto a PDE requer o cálculo de diversos pontos da função para que

estes sejam interpolados, a PDDE representa a FBF como uma função linear por partes das variáveis de estado – nível inicial dos armazenamentos e cenário de afluências anteriores – para alguns estados apenas. Em outras palavras, a PDDE não requer a discretização utilizada na PDE para o cálculo da função de benefício futuro. Dessa forma, a FBF pode ser incorporada à formulação do problema como uma série de restrições lineares que correspondem a hiperplanos tangentes a função.

5.2.1 Construção da FBF

A aproximação da FBF pode ser construída observando-se que a inclinação da mesma ao redor de um ponto pode ser obtida a partir da solução do problema de um estágio. O problema da última etapa é apresentado novamente abaixo (como trata-se da última etapa considera-se a FBF igual a zero):

$$\beta_T^1(v_T^m, a_{T-1}^m) = \text{Max } R(E_T) \quad (5-1)$$

sujeito a multiplicador

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_T(i) = R(E_T) \quad (5-2)$$

$$v_{T+1}^1(i) + u_T(i) + s_T(i) - \sum_{j \in M(i)} [u_T(j) + s_T(j)] = v_T^m(i) + a_T^1(i) \quad \pi_{v_T}^{lm}(i) \quad (5-3)$$

$$v_{T+1}^1(i) \leq \bar{v}(i) \quad \pi_v^{lm}(i) \quad (5-4)$$

$$u_T(i) \leq \bar{u}(i) \quad \pi_u^{lm}(i) \quad (5-5)$$

Da teoria de programação linear sabe-se que existe um conjunto de multiplicadores simplex associado às restrições do problema (5-1)-(5-5) em sua solução ótima. Estes multiplicadores representam a derivada da função objetivo com relação a uma variação infinitesimal do lado direito das restrições.

Em particular, a derivada da função objetivo com relação ao volume inicialmente armazenado nos reservatórios é dada pelo multiplicador associado à restrição de balanço hídrico:

$$\frac{\partial \beta_T^l}{\partial v_T^m(i)} = \pi_{v_T}^{lm}(i) \quad (5-6)$$

Da mesma maneira, pode-se obter também a taxa de variação da função objetivo com relação à afluência da etapa corrente (dada pelo mesmo multiplicador simplex):

$$\frac{\partial \beta_T^l}{\partial a_T^l(i)} = \pi_{v_T}^{lm}(i) \quad (5-7)$$

As derivadas da função objetivo com relação às afluências anteriores – que são as variáveis de estado – podem ser obtidas pela aplicação da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \beta_T^l}{\partial a_{T-1}^l(i)} = \frac{\partial \beta_T^l}{\partial a_T^l(i)} \times \frac{\partial a_T(i)}{\partial a_{T-1}^l(i)} = \pi_{v_T}^{lm}(i) \times \frac{\partial a_T(i)}{\partial a_{T-1}^l(i)} \quad (5-8)$$

A derivada da afluência na etapa corrente com relação às etapas anteriores é calculada a partir dos parâmetros do modelo de vazões utilizado.

A solução do problema de um estágio fornece portanto um ponto da FBF e as derivadas parciais da função com relação às variáveis de estado. Pode-se assim definir um hiperplano tangente a superfície da função de benefício futuro para a etapa anterior. Este hiperplano corresponde a linearização do valor esperado dos benefícios obtidos ao redor do estado inicial considerado (v_T^m, a_{T-1}^k) para um dado cenário de afluências e é expresso matematicamente por:

$$\beta = \beta_T^l(v_T^m, a_{T-1}^m) + \frac{\partial \beta_T^l}{\partial v_T^m} \times (v_T - v_T^m) + \frac{\partial \beta_T^l}{\partial a_{T-1}^l} \times (a_{T-1} - a_{T-1}^l) \quad (5-9)$$

Repetindo o mesmo procedimento para diferentes estados iniciais obtém-se um conjunto de hiperplanos que aproximam a FBF. Por facilidade de apresentação, a figura abaixo mostra a aproximação da FBF em função somente do volume inicialmente armazenado de uma dada etapa:

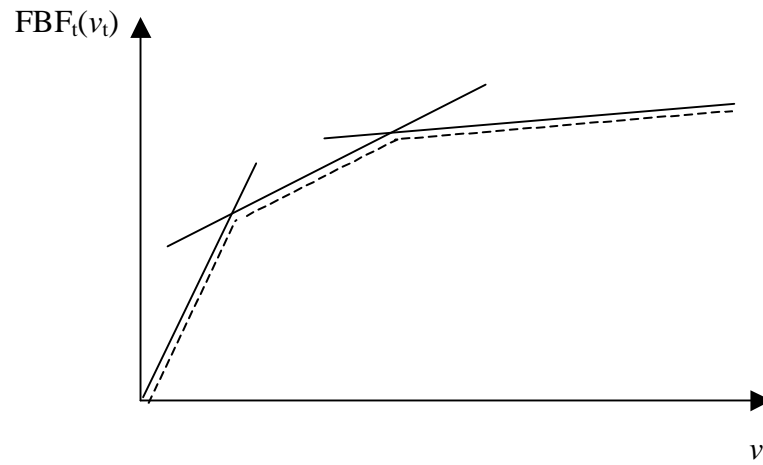


Figura 5.1 – Aproximação da FBF por segmentos lineares

5.3 Concavidade na PDDE

A aproximação da FBF por hiperplanos tangentes a superfície realizada no algoritmo da programação dinâmica dual requer que a mesma seja côncava.

Suponha, por exemplo, que o custo de geração dos agentes térmicos é representado por uma função quadrática. O problema (2-1) de despacho a mínimo custo pode ser então escrito como:

$$z(E) = \text{Min } cg^2 \tag{5-10}$$

sujeito a :

$$g + E = d \tag{5-11}$$

A variável g , que representa a quantidade de energia a ser produzida pelos agentes térmicos, pode ser re-escrita como:

$$g = d - E \quad (5-12)$$

Substituindo (5-12) em (5-10), chega-se à expressão:

$$z(E) = c(d - E)^2 \quad (5-13)$$

O preço spot resultante deste problema pode ser calculado derivando-se a expressão acima com relação à demanda d :

$$\pi_d = \frac{\partial z(E)}{\partial d} = 2c(d - E) \quad (5-14)$$

Multiplicando-se o preço *spot* pela quantidade de energia produzida encontra-se a remuneração do agente em função da energia ofertada / produzida:

$$R(E) = \pi_d \cdot E = 2cdE - 2cE^2 \quad (5-15)$$

Esta função está representada abaixo:

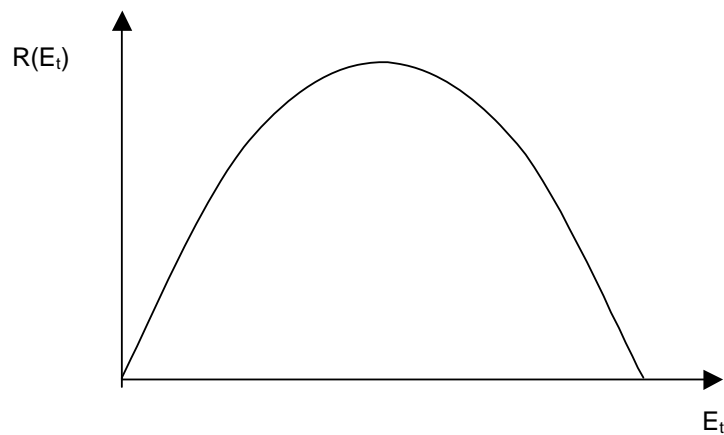


Figura 5.2 – Função de remuneração sob hipótese de custo térmico quadrático

Para uma função de remuneração côncava como a ilustrada acima, a FBF em função do volume inicial de uma etapa será também côncava e terá o formato ilustrado abaixo:

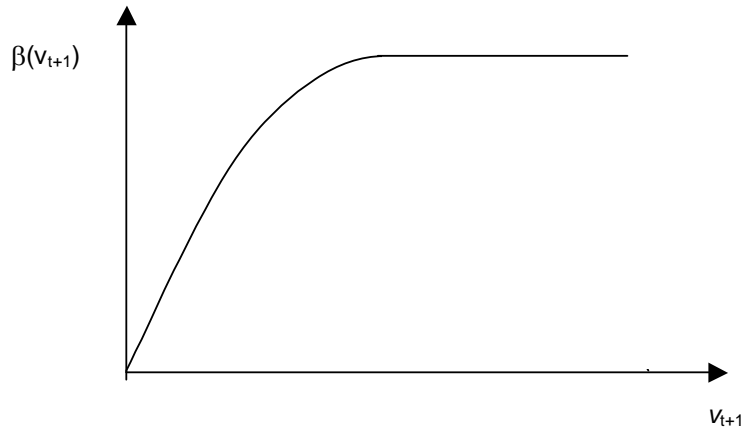


Figura 5.3 – FBF sob hipótese de custo térmico quadrático

Esta função pode ser aproximada por uma função linear por partes, como a mostrada na figura 5.1, e portanto poderia-se aplicar a PDDE para a solução do problema.

Alguns trabalhos, por exemplo [7,23], lidam com o problema de oferta estratégica através de modelos de complementariedade e, para que o sistema de equações obtido torne-se linear, assumem uma variação linear da demanda residual com o preço spot do sistema. A seguir mostra-se que esta hipótese é equivalente a hipótese de custo térmico quadrático assumida acima.

Pode-se re-escrever a expressão (5-14) de modo a relacionar a geração dos agentes *price takers* com o preço spot do sistema:

$$g(\pi_d) = \frac{\pi_d}{2c} \tag{5-16}$$

A demanda residual atendida pelo agente *price maker* é igual à demanda total subtraída da geração dos *price takers*:

$$D_r(\pi_d) = d - g(\pi_d) \quad (5-17)$$

Substituindo (5-7) em (5-8) tem-se:

$$D_r(\pi_d) = d - \frac{\pi_d}{2c} \quad (5-18)$$

5.4 O caso do problema de oferta estratégica com custo térmico linear por partes

Se o custo dos geradores térmicos não for uma função quadrática da energia produzida mas sim uma linear por partes, a função que relaciona a remuneração obtida com a quantidade de energia ofertada é aquela obtida no Capítulo 2 (figura 2.5), reproduzida abaixo por conveniência:

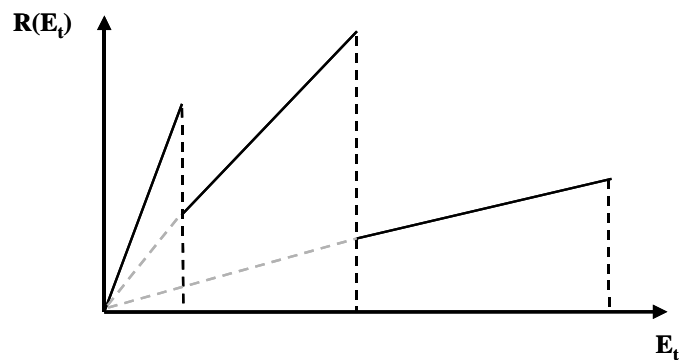


Figura 5.4 – Remuneração obtida versus energia ofertada

A energia que pode ser produzida em um estágio depende da quantidade de água disponível, que pode ser calculada a partir do volume inicial do reservatório, das afluências e do volume máximo permitido. Conhecidas as afluências e os limites do reservatório, a relação entre a remuneração que pode ser obtida em um estágio e o volume do reservatório no início da etapa terá a forma mostrada na figura 5.5 abaixo:

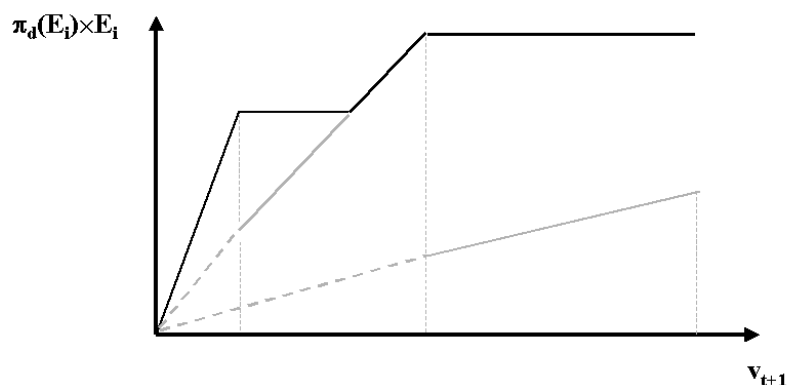


Figura 5.5 – Remuneração obtida versus energia ofertada

A função adquire este formato pois, ainda que para determinados valores de volume inicial seja possível produzir mais energia, é vantajoso para a empresa armazenar essa quantidade de água “adicional” e restringir sua oferta – uma vez que a queda do preço spot tornaria sua remuneração menor. Estes valores correspondem aos segmentos horizontais onde a remuneração é constante. A partir do momento em que uma produção maior – mesmo com o preço spot mais baixo – torna-se mais atraente, a curva volta a crescer. A função $R(v_{t+1})$ torna-se constante a partir do momento em que o volume inicial somado às afluições do período é suficiente para que a empresa oferte um montante de energia igual àquele para o qual ocorre o pico máximo da função $R(E)$.

5.4.1 Concavização da função de remuneração

Dado que no caso real – onde o custo de geração térmica não é uma função quadrática da energia gerada – a função de benefício futuro não é côncava, a proposta deste trabalho é aproximar a função de remuneração do agente por sua envoltória côncava de modo que a FBF correspondente também o seja. Deste modo, é possível aproximá-la por hiperplanos tangentes e aplicar a PDDE. A concavização da função de remuneração está ilustrada na figura abaixo:

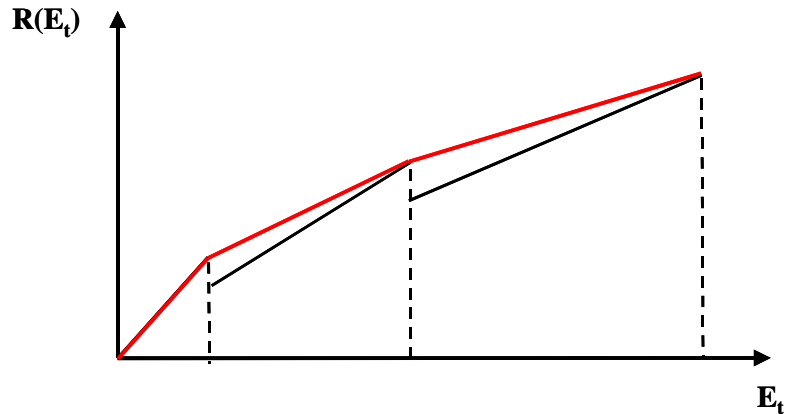


Figura 5.6 – Concavização da função de remuneração

Portanto, conhecida a função de remuneração, cada um dos K segmentos que a aproximam pode ser caracterizado por sua inclinação $p(k)$ e pelo comprimento de sua projeção no eixo da quantidade de energia, $\bar{e}(k)$, como indicado na figura abaixo:

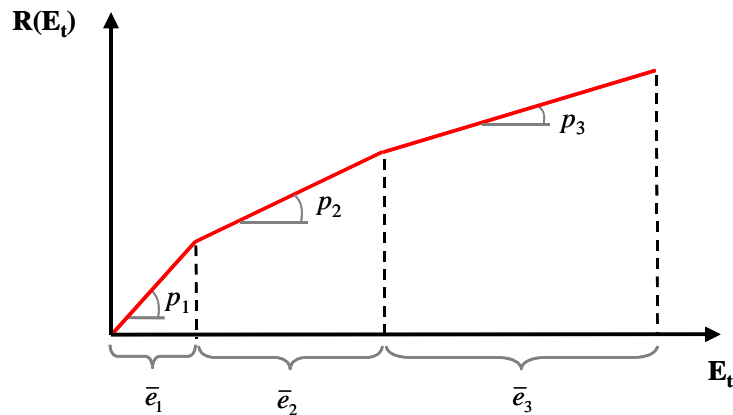


Figura 5.7 – Comprimento e inclinação dos segmentos que aproximam a função de remuneração

É importante observar que nos interessa aproximar a função de remuneração somente até o ponto no qual ela atinge seu valor máximo. Isso ocorre pois a solução do problema naturalmente nunca irá determinar a oferta de uma quantidade que lhe retorne uma remuneração menor sendo possível “economizar” energia e ainda assim obter maior remuneração.

O problema da última etapa, por exemplo, pode então ser escrito da seguinte forma:

$$\beta_1^1(v_T^m, a_{T-1}^m) = \text{Max}_{k=1}^K p_T(k) \cdot e_T(k) \quad (5-19)$$

sujeito a multiplicador

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_T(i) = \sum_{k=1}^K e_T(k) \quad (5-20)$$

$$v_{T+1}^1(i) + u_T(i) + s_T(i) - \sum_{j \in M(i)} [u_T(j) + s_T(j)] = v_T^m(i) + a_1^1(i) \quad \pi_{v_T}^{lm}(i) \quad (5-21)$$

$$v_{T+1}^1(i) \leq \bar{v}(i) \quad \pi_v^{lm}(i) \quad (5-22)$$

$$u_T(i) \leq \bar{u}(i) \quad \pi_u^{lm}(i) \quad (5-23)$$

$$e_T(k) \leq \bar{e}_T(k) \quad (5-24)$$

A PDDE funciona de maneira iterativa e é composta basicamente por duas fases: recursão e simulação. A cada iteração refina-se a aproximação das funções de benefício futuro e calculam-se os limites inferior e superior para a solução ótima do problema até que um determinado critério de convergência seja atendido. O algoritmo está detalhado no Apêndice B.

6 RESULTADOS

6.1 Introdução

A seguir serão apresentados os resultados da aplicação da metodologia proposta para 2 casos de estudo realistas: os sistemas da Romênia e de El Salvador. Estes são dois sistemas cuja fonte de produção de energia é predominantemente hidroelétrica. A simulação de cada sistema foi realizada sob duas óticas distintas: (i) mínimo custo e (ii) maximização de lucro.

O primeiro passo do estudo consistiu na determinação da política operativa e simulação do sistema segundo uma operação centralizada cujo objetivo é a minimização dos custos. Utilizou-se para tal o modelo de despacho hidrotérmico SDDP [19,38,39] desenvolvido pela PSR Consultoria⁷. Este modelo calcula as funções de custo futuro (FCFs) do sistema, levando em consideração as restrições do sistema hidrotérmico e as incertezas na afluências. O algoritmo de cálculo das FCFs é a PD Dual Estocástica. Uma vez calculadas as FCFs, o SDDP simula a operação do sistema, isto é, resolve sucessivamente o problema de despacho de um estágio para um conjunto de *cenários hidrológicos* (conjunto de vazões afluentes ao longo dos T estágios).

Em seguida, foi determinada a política operativa e simulado o sistema em um ambiente baseado em ofertas de acordo com as hipóteses, metodologias e objetivos deste trabalho: uma única empresa possui todas as usinas hidroelétricas do sistema e age de maneira a maximizar sua receita, isto é, ela é a empresa price maker do sistema. As usinas termoelétricas existentes são *price takers* e portanto, como já mencionado no Capítulo 2, ofertam toda sua capacidade de produção a um preço igual ao seu custo variável de produção.

⁷ <http://www.psr-inc.com>

Os modelos computacionais foram implementados utilizando a linguagem de programação Fortran e executados em um micro Pentium IV 2.0 GHz. O tempo de processamento médio na execução de cada simulação foi de aproximadamente 2500 segundos.

Para cada simulação, foram calculados os valores esperados dos preços *spot* do sistema, a energia produzida e as receitas obtidas pelas hidroelétricas. Este conjunto de resultados será usado para observar o comportamento estratégico do agente hidroelétrico.

6.1.1 Romênia

A Romênia possui 10 usinas hidroelétricas que juntas totalizam 3368 MW de potência instalada (os detalhes operativos das usinas estão listados abaixo).

Nome	Capac. (MW)	Armaz.Min. (hm ³)	Armaz.Max. (hm ³)	Coef. Prod. (MW/m ³ /s)	Turb.Máx. (m ³ /s)	Vol. inic. (% vol. útil)
Hateg	205	–	–	1	205	–
CurteAges	230	–	–	1	230	–
Cluj	253	–	–	1	253	–
Buzau	61	–	–	1	61	–
Caransebes	71	–	–	1	71	–
Sebes	172	–	–	1	172	–
Bistrita	384	–	–	1	384	–
Balcea	776	–	–	1	776	–
Targu Jiu	93	–	–	1	93	–
PorteFier	1122	–	–	1	1122	–

Foram consideradas 18 usinas térmicas que, somadas, possuem capacidade total de 4068 MW. Abaixo estão relacionadas a capacidade e o custo operativo de cada uma delas:

Nome	Capacidade instalada (MW)	Custo Operativo (\$/MWh)
UTE 1	40	7.1

UTE 2	75	11.3
UTE 3	630	12.1
UTE 4	112	12.6
UTE 5	43	14.5
UTE 6	81	19.8
UTE 7	1124	20.0
UTE 8	85	20.1
UTE 9	40	21.3
UTE 10	44	77.1
UTE 11	133	77.5
UTE 12	265	80.8
UTE 13	560	82.4
UTE 14	90	83.0
UTE 15	204	87.4
UTE 16	256	88.6
UTE 17	120	90.2
UTE 18	167	93.3

Foi utilizada uma demanda de 4000 MW médios durante os 48 meses (4 anos) do período de estudo. A simulação foi realizada para o conjunto de afluências históricas do sistema Romeno, que é de 20 anos.

6.1.1.1 Aproximação da curva de remuneração

De acordo com os dados mencionados acima foram construídas as curvas que relacionam o preço spot do sistema e a remuneração do agente em função da energia ofertada pelo agente hidroelétrico.

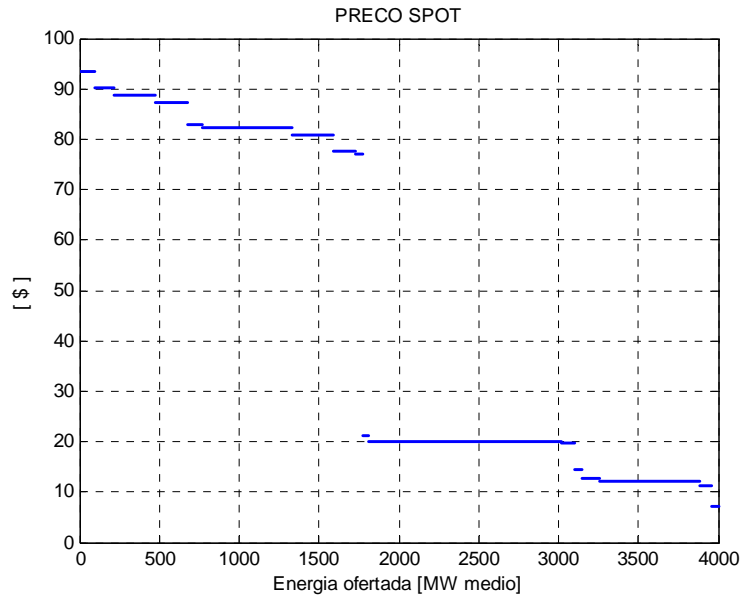


Figura 6.1 – Preço spot em função da energia ofertada (Romênia)

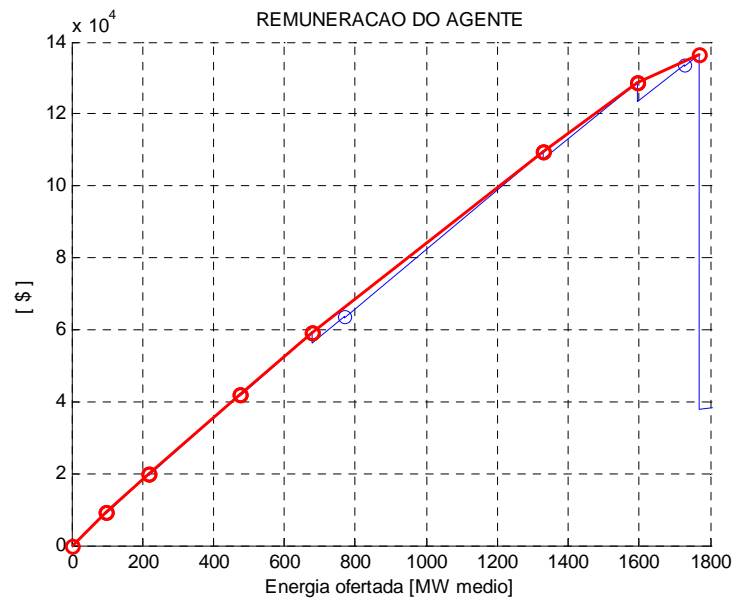


Figura 6.2 – Remuneração do agente em função da energia ofertada (Romênia)

Na figura 6.1 nota-se que o preço spot do sistema cai drasticamente quando a oferta do agente aproxima-se de 1800 MW. Essa queda do preço spot reflete-se na remuneração do agente, como pode ser visto na figura 6.2, que apresenta a aproximação por segmentos lineares somente até seu ponto de máximo, como já explicado no Capítulo 5.

Observa-se que todas as usinas do sistema são usinas fio d'água, ou seja, não possuem reservatórios. Visto que não é possível transferir água entre os períodos, as decisões tomadas em um estágio não afetam a capacidade futura de produção. Dessa maneira a determinação da estratégia de oferta torna-se trivial e o problema multi-estágio pode ser decomposto em uma série de problemas de um único estágio.

Apresentam-se a seguir os resultados obtidos para a operação do sistema segundo os dois modelos de operação: mínimo custo e maximização da receita do agente hidroelétrico.

6.1.1.2 Geração hidro

O gráfico abaixo mostra a média da geração hidroelétrica para os 20 cenários de afluências simulados:

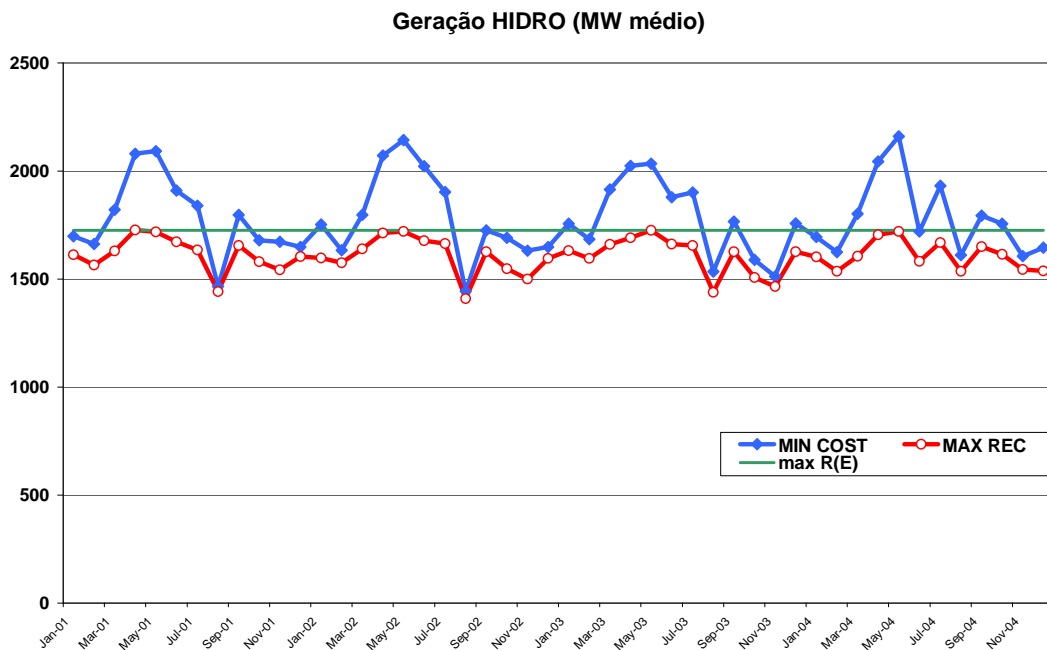


Gráfico 6.1 – Geração hidro média: MAX REC vs. MIN COST (Romênia)

Como esperado, o comportamento da geração do agente na simulação “MAX REC” (metodologia adotada nesta tese) é de produzir menos energia que o observado no

despacho de mínimo custo. Com isto, os preços spot se elevam (como será visto adiante) e o agente maximiza seu lucro.

A linha verde no gráfico indica a oferta de energia que resulta no ponto de máximo da função de remuneração. Nota-se que a geração hidro sob o modelo de maximização de receita obviamente nunca ultrapassa esse ponto (1726 MW médios). A lógica da operação fica mais clara ao observarmos a geração hidro de uma série hidrológica separadamente:

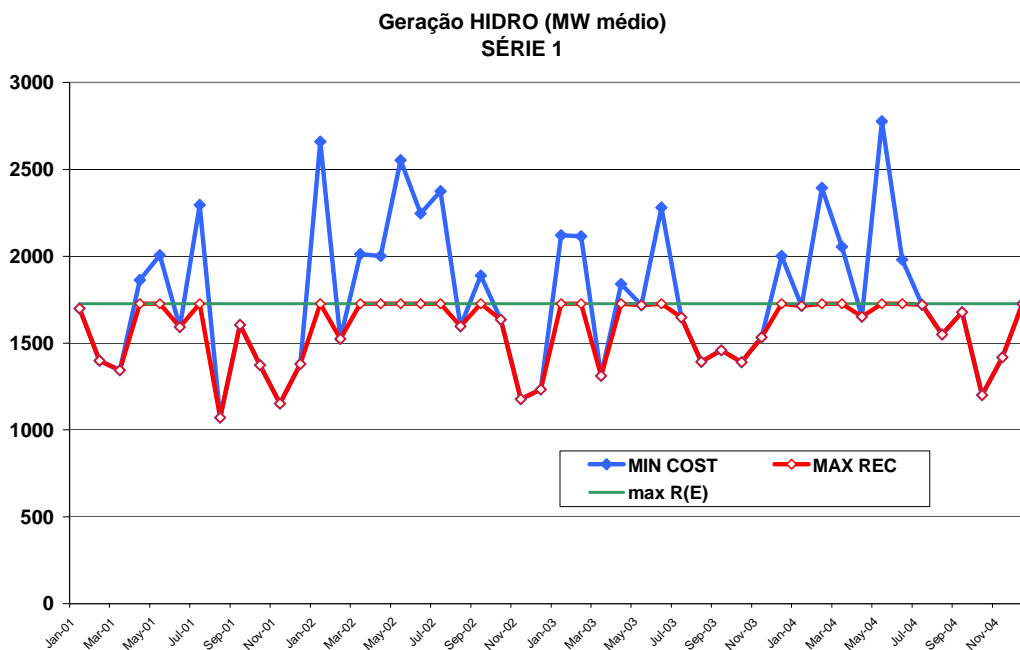


Gráfico 6.2 – Geração hidro série 1: MAX REC vs. MIN COST (Romênia)

Como era esperado, a operação de maximização de receita é idêntica à de mínimo custo quando esta está abaixo de 1726 MW médios. Até este ponto, quanto mais energia o agente gerar maior a sua remuneração, como visto na figura 6.2. Como o sistema não possui capacidade de armazenamento, nas etapas em que a operação de mínimo custo determina uma geração maior que àquela para a qual ocorre o máximo da função de remuneração o modelo de maximização de receita restringe sua oferta, gera exatos 1726 MW médios e decide “verter”.

6.1.1.3 Preço spot médio

A restrição de oferta decorrente da operação de maximização de receita observada na seção anterior resulta na elevação do preço spot, como ilustrado no gráfico abaixo:

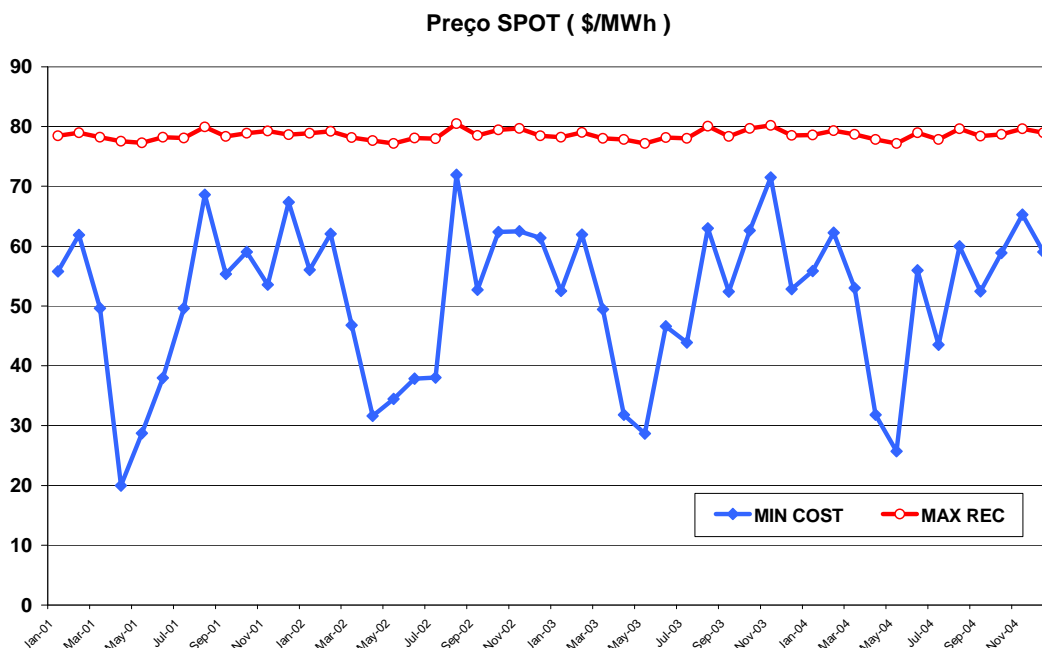


Gráfico 6.3 – Preço spot médio: MAX REC vs. MIN COST (Romênia)

O preço spot médio na operação de mínimo custo é de \$51.4/MWh enquanto na maximização de receita ele é elevado para \$78.6/MWh.

6.1.1.4 Receita média obtida

A restrição da oferta e elevação do preço spot fazem com que o agente tenha uma receita média total 41% superior com relação àquela obtida na operação de mínimo custo. A média das receitas obtidas por etapa está no gráfico abaixo:

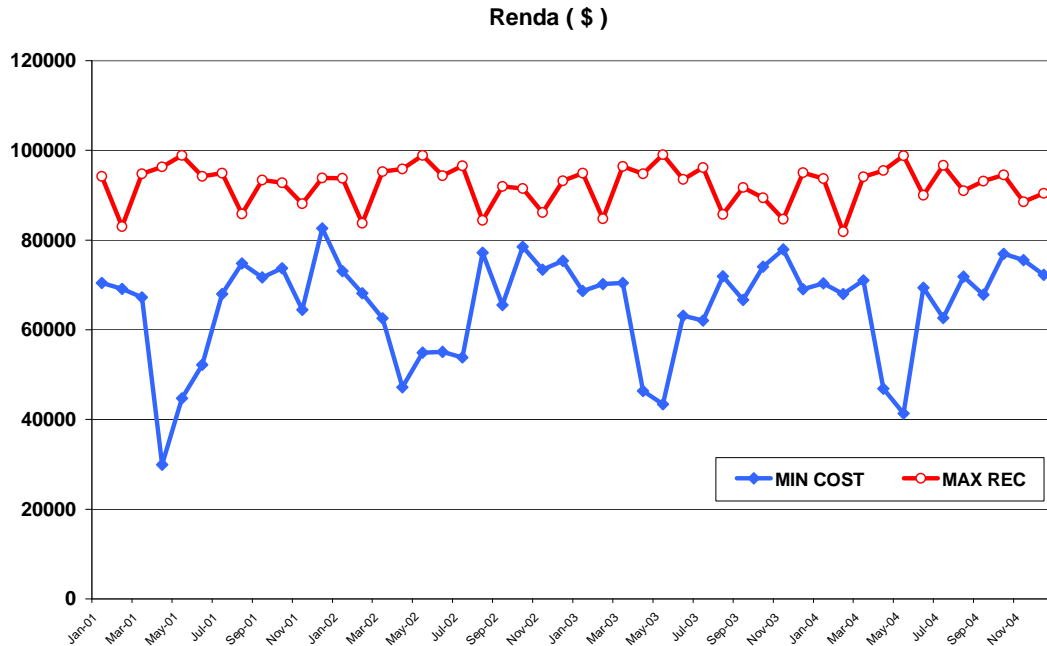


Gráfico 6.4 – Receita média obtida pelo agente hidroelétrico: MAX REC vs. MIN COST (Romênia)

6.1.2 El Salvador

O sistema salvadorenho possui 1425 MW de capacidade instalada. Deste total, 38%, ou 554 MW, representam a potência instalada de 5 hidroelétricas: Guajoyo, Cerrón Grande, 5 de Noviembre, 15 de Septiembre e Chaparral. A tabela a seguir apresenta alguns detalhes das usinas hidroelétricas:

Nome	Capac. (MW)	Armaz.Min. (hm ³)	Armaz.Max. (hm ³)	Coef. Prod. (MW/m ³ /s)	Turb.Máx. (m ³ /s)	Vol. inic. (% vol. útil)
Guajoyo	90	72	560	2.09	43	50
Cerrón Grande	135	769	2180	0.53	255	50
5 de Nov.	95	72	72	0.41	231	50
15 de Sept.	170	346	346	0.29	593	50
Chaparral	64			0.53	121	50

A figura 6.1 abaixo mostra a representação esquemática da topologia da bacia hidrográfica onde estão localizadas as usinas:

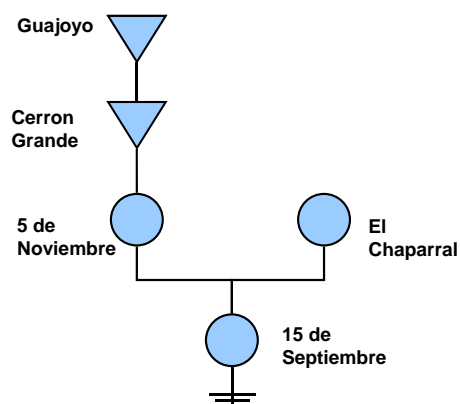


Figura 6.3 – Topologia das usinas hidroelétricas de El Salvador

O restante da capacidade de geração é composto por um conjunto de 17 térmicas que possuem custos variáveis de produção variando de 20 US\$/MWh a 192 US\$/MWh. A tabela abaixo enumera as principais características das térmicas consideradas.

Nome	Capacidade instalada (MW)	Custo Operativo (\$/MWh)
CASSA	20	20
CASSA BC	20	25
BERLIN B	28	32
BERLIN	6	33
AHUCHAPAN	52	34
ATEOS_TD	51	34
DUKE_DSL	50	40
CESSA_PCOKE	44	45
HOND 1	50	50
BERLIN II	12	68
CESSA	70	70
HOND 2	67	104
AHUCHAPAN B	90	110
ACAJUTLA_VP	103	118
HOND 3	56	137
ACAJUTLA_TG	105	154
NEJA_POWER	47	192

Foi utilizada uma demanda constante de 700 MW médios e o período de estudo contemplado foi de 5 anos em etapas mensais. A fim de evitar que os reservatórios fossem completamente deplecionados ao fim do último estágio, 2 anos foram adicionados ao último mês considerado.

6.1.2.1 Aproximação da curva de remuneração

Da mesma maneira que realizado no caso anterior, uma vez conhecidos os dados das usinas térmicas *price takers* – capacidades instaladas e custos operativos – e a demanda, é possível obter as funções que relacionam a energia ofertada pela empresa hidroelétrica com o preço spot e a remuneração obtida. Ambos os gráficos estão representados abaixo:

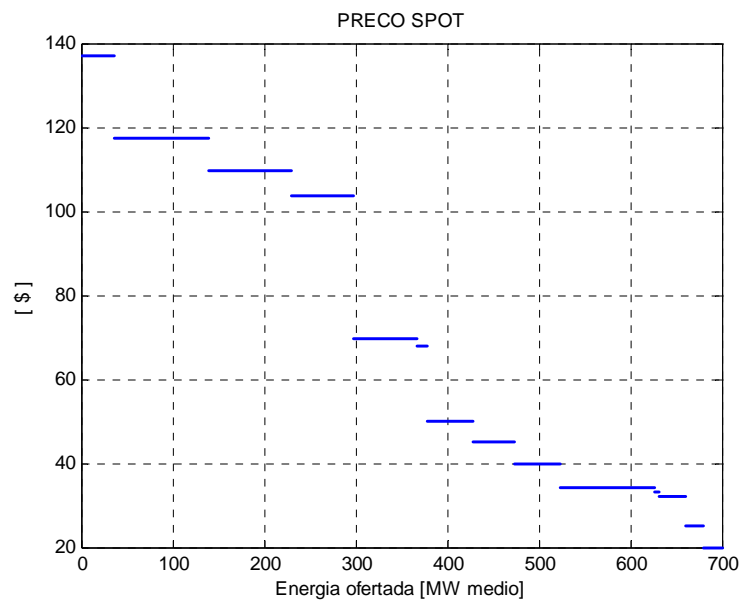


Figura 6.4 – Variação do preço spot com a quantidade de energia ofertada

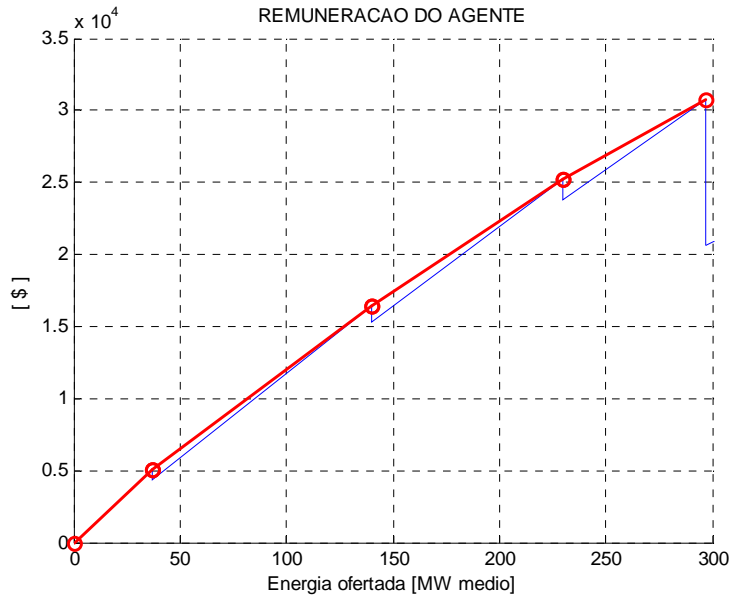


Figura 6.5 – Remuneração do agente e aproximação por segmentos lineares

O gráfico acima mostra que a oferta ótima de energia para a empresa que detêm as hidroelétricas está próxima de 300 MW médios. Os segmentos cujas extremidades estão representadas por pequenos círculos mostram a aproximação da função de remuneração por sua envoltória convexa.

Nas seções seguintes serão apresentados os gráficos dos principais resultados obtidos. Cada gráfico representa a média da variável em análise – geração hidro, vertimentos, preço spot e receita total – calculada a partir da simulação do sistema para 50 cenários hidrológicos derivados do registro histórico de vazões.

6.1.2.2 Geração hidro

No gráfico a seguir está representada a geração total média das usinas hidroelétricas para os dois modelos de operação: minimização do custo total do sistema e maximização de receita da empresa a quem pertencem os recursos hidroelétricos. É representada também no gráfico a energia afluente ao sistema em cada etapa.

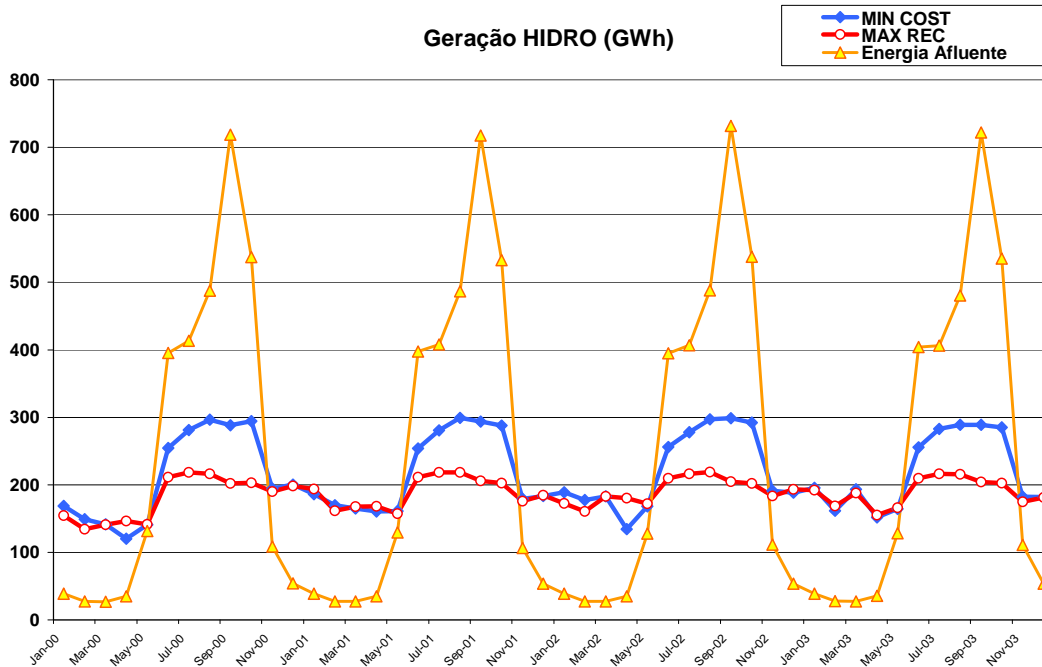


Gráfico 6.5 – Geração hidro média: MAX REC vs. MIN COST (El Salvador)

Primeiramente, nota-se que a energia afluente ao sistema apresenta um comportamento bastante sazonal. Durante o período compreendido entre os meses de Junho a Outubro as vazões afluentes representam uma quantidade de energia sempre superior a 400 GWh, com picos de até 700 GWh. No entanto, nos meses restantes essa quantidade de energia afluente cai drasticamente, ficando em torno de 50 GWh.

Como o custo de geração térmica pode ser razoavelmente aproximado por uma função convexa, a operação de mínimo custo busca transferir o máximo possível da energia disponível nos períodos úmidos para os períodos secos, de modo a suavizar a variação do preço *spot* entre as etapas. Como já mencionado, a oferta conjunta das usinas hidroelétricas que maximiza a receita da empresa está em torno de 300 MW médios, que correspondem a aproximadamente 220GWh durante 1 mês. Observa-se que este valor está próximo da geração hidro total verificada no gráfico acima durante os estágios onde a energia afluente é abundante. Como na operação de mínimo custo, o modelo de maximização de receita também transfere a energia disponível dos períodos úmidos para os períodos secos, procurando se aproximar o máximo possível da “meta” de 220GWh.

É interessante observar as vazões vertidas que ocorrem em cada um dos modelos, uma vez que esta também é uma variável de decisão.

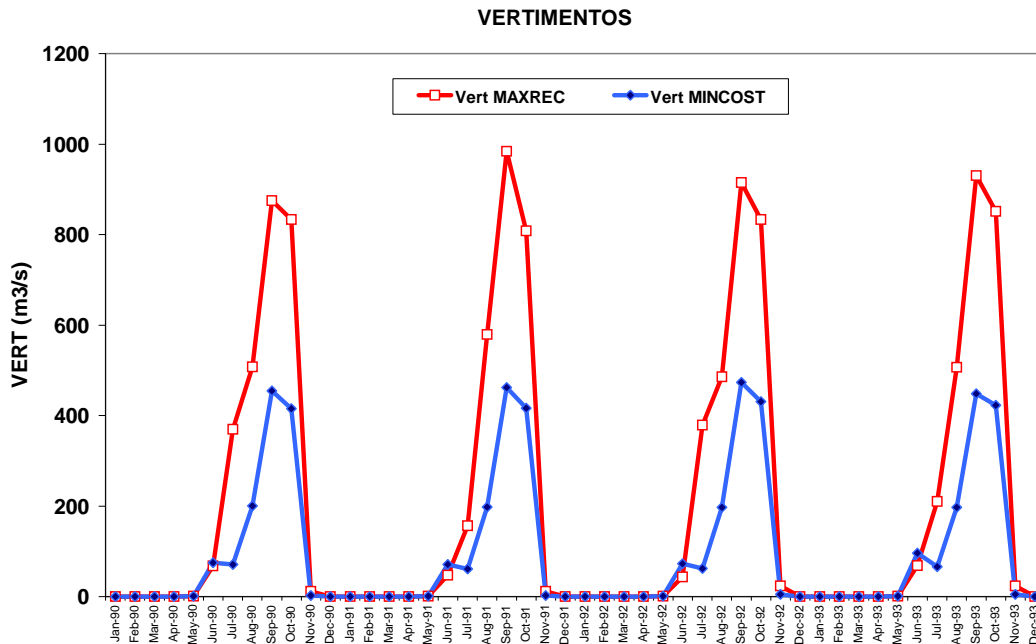


Gráfico 6.6 – Vertimentos médios: MAX REC vs. MIN COST (El Salvador)

Como era de se esperar os vertimentos que ocorrem no modelo de maximização da receita são bem superiores aos do modelo de minimização de custos. Durante os períodos secos não ocorrem vertimentos porque, como a energia afluyente é muito baixa, o modelo determina a utilização de toda a água disponível. Os vertimentos que ocorrem durante o período úmido no modelo de minimização de custos são consequência da pequena capacidade de armazenamento dos reservatórios do sistema salvadoreño. Ao considerarmos o modelo de maximização de receita, soma-se a este motivo o interesse da empresa em restringir sua oferta, elevando o preço spot do sistema e assim aumentando sua receita. Como essa quantidade de água “sobressalente”, resultante da restrição de oferta, não pode ser armazenada e utilizada em etapas posteriores – e isso pode ser afirmado observando que o modelo de minimização de custos também apresenta vertimentos – a única possibilidade restante é verter.

6.1.2.3 Preço Spot Médio

O gráfico abaixo mostra o preço *spot* médio para os dois casos analisados:

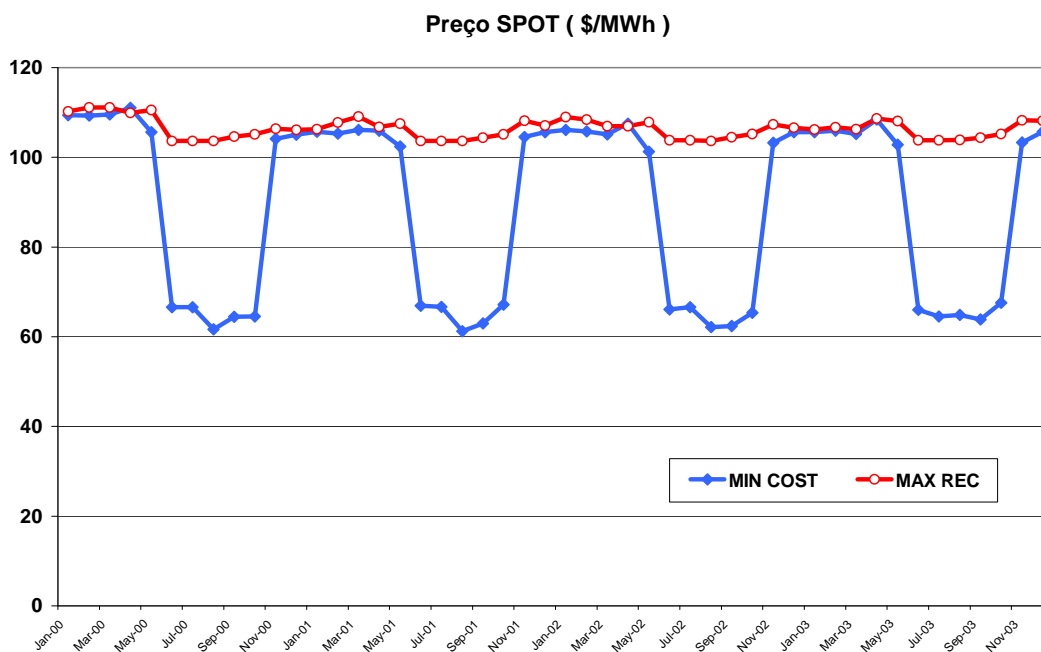


Gráfico 6.6 – Preço spot médio: MAX REC vs. MIN COST (El Salvador)

Na operação de mínimo custo o montante de energia hidro produzida durante os períodos úmidos é capaz de reduzir significativamente o preço spot. Nos períodos secos ocorre uma elevação do preço spot uma vez que é necessária uma maior parcela de geração térmica para satisfazer a demanda.

Nota-se claramente o efeito da redução da oferta de energia hidro sobre o preço *spot* durante os meses de Maio a Outubro. Neste período a oferta da empresa está próxima da oferta ótima e o preço mantém-se bem mais alto que no caso da operação de mínimo custo.

6.1.2.4 Receita média obtida

Outro importante aspecto que deve ser analisado neste estudo é a diferença entre a remuneração total média das usinas hidroelétricas nos dois tipos. O gráfico a seguir

representa a média da receita total obtida pelas usinas hidroelétricas. A receita obtida em cada etapa e para cada série é calculada através do produto entre a geração hidro e o preço *spot* resultante.

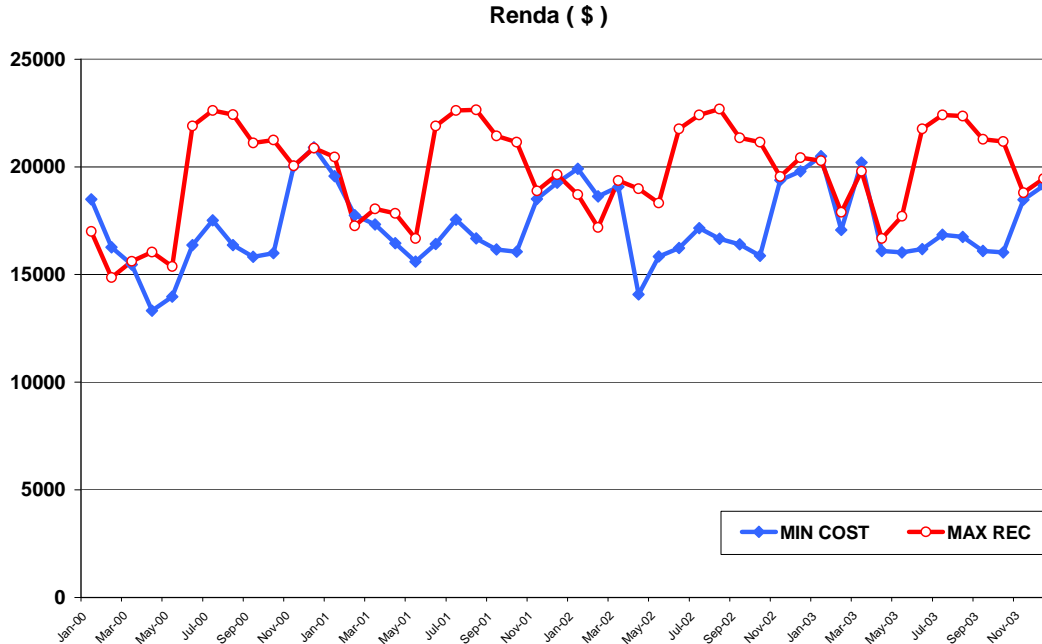


Gráfico 6.7 – Receita média obtida pelo agente hidroelétrico: MAX REC vs. MIN COST (El Salvador)

Novamente pode-se observar o exercício do poder de mercado da empresa durante os períodos úmidos. A restrição da quantidade ofertada e consequente elevação do preço *spot* resultam em receitas consistentemente superiores durante os meses de Maio a Outubro. Como pode ser visto no gráfico abaixo a receita média por etapa é quase sempre maior na operação de maximização de receita. Destaca-se o período compreendido entre os meses de Junho a Outubro quando a receita em cada etapa é aproximadamente 30% superior àquela obtida quando da operação de mínimo custo.

7 CONCLUSÃO

Com o avanço da implementação dos processos de reforma no setor elétrico de distintos países, o problema de determinar a estratégia de oferta ótima em mercados atacadistas de energia tem se tornado cada vez mais importante; tanto para agentes (que visam maximizar seus lucros) quanto para reguladores (que visam identificar abuso de poder de mercado).

Como visto ao longo desta dissertação, o problema de estratégia de ofertas é de grande complexidade, sendo caracterizado como um problema de programação não linear e não convexo. No caso de sistemas predominantemente hidroelétricos, como é o caso do Brasil, Noruega, Colômbia, Nova Zelândia, Canadá, entre outros; existe a necessidade adicional de modelar o acoplamento temporal e a estocasticidade das vazões. A razão é que a oferta estratégica da etapa corrente depende não somente das estimativas sobre demanda e ofertas dos outros geradores na mesma etapa, mas passa também a depender das *oportunidades* de oferta estratégica nas etapas seguintes. Enquanto o acoplamento temporal, por si só, aumenta substancialmente a complexidade do problema de oferta estratégica, a vazão natural afluente a cada usina hidroelétrica é uma variável estocástica, para a qual não se sabe o valor a se realizar no futuro. Com isso, o problema de ofertas em sistemas hidroelétricos torna-se não linear, não convexo, multi-estágio e estocástico.

Problemas de decisão multi-estágio e estocásticos, como o de ofertas estratégicas, vêm sendo tradicionalmente resolvidos por programação dinâmica estocástica (PDE). Embora a técnica de PDE seja capaz de lidar com a não convexidade do problema e com as peculiaridades inerentes ao problema de agentes hidroelétricos seu esforço computacional cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado. Como consequência desta “maldição da dimensionalidade”, a aplicação de PDE está limitada a sistemas com poucos reservatórios.

O objetivo desta tese foi de apresentar uma metodologia de programação dinâmica dual estocástica (PDDE) para oferta estratégica de uma empresa geradora com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluências. Como a metodologia PDDE não pode ser aplicada diretamente a este problema – pois a mesma requer que o problema seja convexo – foi proposta a aproximação, a cada estágio, a função de remuneração (e, conseqüentemente, da função de benefício futuro (FBF) resultante por sua envoltória concava). Com isto, evita-se a “maldição da dimensionalidade” da PDE com a PDDE, que aproxima a envoltória côncava da FBF em cada estágio, por uma função linear por partes (conjunto de hiperplanos), evitando o crescimento exponencial do esforço computacional..

A abordagem proposta foi ilustrada com exemplos de sistemas hidroelétricos reais, como o da Romênia e El Salvador, onde foi observado que a prática de poder de mercado por algumas empresas em mercados desregulados pode causar uma perda de eficiência econômica no despacho realizado quando comparado com a operação centralizada de mínimo custo, como por exemplo um custo de operação extremamente elevado em virtude dos altos preços praticados.

8 REFERÊNCIAS

- [1] Baillo, A., Ventosa, M., Rivier M. and Ramos, A., “Optimal Offering Strategies for Generation Companies Operating in Electricity Spot Markets”, *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 19, No.2, 2004.
- [2] Baíllo, A., Ventosa, M., Rivier, M., Ramos, A., Strategic Bidding in a Competitive Electricity Market: A Decomposition Approach, *IEEE Porto PowerTech*, Portugal, September, 2001.
- [3] Baldick R., “Electricity market equilibrium models: The effect of parameterization,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 17, pp. 1170–1176, Nov. 2002.
- [4] Barroso, L.A.N, Esquemas competitivos em sistemas hidrotérmicos: comportamento estratégico de agentes geradores em ambiente de mercado, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Maio 2000.
- [5] Benson, H.Y., Sen, A., Shanno, D.F., Vanderbei, R., “Interior-Point Algorithms, Penalty Methods and Equilibrium Problems”, *Operations Research and Financial Engineering*, Princeton University, 2003.
- [6] Borenstein, S.; Bushnell J. e C. Knittel – Market Power in Electricity Markets: Beyond Concentration Measures, PWP-059R, University of California Energy Institute, February 1999
- [7] Bushnell, J., “A mixed complementarity model of hydrothermal electricity competition in the western United States”, *Operations research*, Vol. 51, No. 1, pp. 80-93, 2003.
- [8] Conejo A. J. and Prieto F. J., “Mathematical Programming and Electricity Markets”, *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa TOP*, Vol. 9, No. 1, pp.1-53, 2001.
- [9] Conejo A. J., Contreras J., Arroyo J. M. and Torre S., “Optimal response of an oligopolistic generating company to a competitive pool-based electric power market”, *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 17, No.2, 2002.
- [10] Conejo A. J., Nogales F., Arroyo J. M., “Price Taker Bidding Strategy Under Price Uncertainty”, *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 17, No.4, 2002.

- [11] Contreras, J., Candiles, O., La Fuente, J.I., Gómez, T., A Cobweb Bidding Model for Competitive Electricity Markets, *IEEE Trans. Power Systems*, vol. 17, pp.148-153, February, 2002.
- [12] Competition in Electricity Markets, IEA, 2001.
- [13] David A.K.; Fushuan W.; “Strategic bidding in competitive electricity markets: a literature survey”; Proceedings of IEEE Summer Meeting, July 2000.
- [14] Davis R.E., Stochastic dynamic programming for multi-reservoir hydro-optimization, Technical report 15, Syst.Contr., Palo Alto, Calif., 1972.
- [15] Day C.J., Hobbs B.F., e Pang J.S., “Oligopolistic competition in power networks: A conjectured supply function approach,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 17, pp. 597–607, Aug. 2002.
- [16] Flatabo, N., Haugstad A, Mo B., Fosso O. (1998). Short and Medium-term Generation Scheduling in the Norwegian Hydro System under a Competitive Power Market Structure, Proceedings of EPSOM Conference, Zurich.
- [17] Fudenberg D. e J. Tirole – Game Theory, MIT Press, Fifth Printing (1996)
- [18] Gjelsvik A., Belsnes M., Haugstad A. (1998). An algorithm for stochastic medium-term hydrothermal scheduling under spot price uncertainty. Proceedings of 13th Power Systems Computation Conference, Trondheim, Norway.
- [19] Granville, S., Oliveira, G. C., Thomé, L. M., Campodónico, N., Latorre, M., Pereira, M. V. and Barroso L. A., “Stochastic optimization of transmission constrained and large scale Hydrothermal Systems in a Competitive Framework”, Proceedings of the IEEE General Meeting, Toronto, 2003.
- [20] Gross, G. and Finlay, D., “Generation supply bidding in perfectly competitive electricity markets”, *Computational & Mathematical Organizations Theory*, Vol. 6, pp. 83-98, 2000.
- [21] HAO, S., A Study of Basic Bidding Strategy in Clearing Pricing Auctions, *IEEE Trans. Power Systems*, vol 15, pp. 975-980, August. 2000.
- [22] Hobbs B. H., Metzler C. B. and Pang J. S., “Strategy Gaming Analysis for Electric Power Systems: An MPEC Approach”. *IEEE Trans. Power Syst.*, v. 15, pp. 638-645, May 2000.
- [23] Hobbs B.F. and Helman U., “Complementarity-based equilibrium modeling for electric power markets”, in D. Bunn, ed., *Modeling Prices in Competitive Electricity Markets*, J. Wiley, in press (2004).

- [24] Hobbs B.F., "LCP of Nash-Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets," IEEE Trans. Power Syst., 16(2), 2001.
- [25] Hobbs B.F., Metzler C. and Pang J.-S., "Calculating Equilibria in imperfectly competitive power markets: an MPEC approach", IEEE Trans. on Power Syst., Vol. 15, No.1, 2000.
- [26] Hunt, S.. "Making Competition Work in Electricity", Published by John Wiley & Sons, 2003.
- [27] Kelman, J. – Modelos para Gerenciamento de Recursos Hídricos, vol.1, Capítulo 4, Coleção ABRH, 1987
- [28] Kelman, R. – Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Eficiência Econômica e Comportamento Estratégico ; Tese de M.Sc, COPPE/UFRJ, Agosto 1999
- [29] Kelman, R., Barroso, L. A. and Pereira M. V., "Market power assessment in hydrothermal systems", IEEE Trans. Power Syst, Vol. 16, No.3, 2001.
- [30] Klemperer, P. e M. Meyer – Supply Function Equilibria in Oligopoly Under Uncertainty, *Econometrica*, 57, 1989, pp. 1243-1277
- [31] Lino, P., Barroso, L. A., Fampa, M., Pereira, M. V. and Kelman, R., "Bid-Based Dispatch of Hydrothermal Systems in Competitive Markets", *Annals of Operations Research*, Vol. 120, pp. 81-97, 2003.
- [32] Luo Z. Q., Pang J. S. and Ralph D., *Mathematical Programming with Equilibrium Constraints*, N.Y. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [33] Latorre, M.L., Granville, S., "The Stackelberg Equilibria Applied to AC Power Systems – A Non Interior Point Algorithm", *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, no. 2, pp. 611-617, 2003.
- [34] Fletcher, R., Leyffer, S., "Numerical experience with solving MPEC and NLPs", Working paper, University of Dundee, 2002.
- [35] Oliveira, A.M.S., *Estratégia ótima de oferta de preços no mercado de curto prazo em sistemas com predominância hidrelétrica*, Dissertação de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Dezembro 2003.
- [36] Otero-Novas I., Meseguer C., and Alba J.J., "An iterative procedure for modeling strategic behavior in competitive generation markets," in *Proc. 13th Power Syst. Conf.*, Trondheim, Norway, July 1999.

- [37] Pereira M.V., Granville S., Fampa M., Dix R., Barroso L.A.. “Strategic Bidding Under Uncertainty: A Binary Expansion Approach”. IEEE Trans. on Power Syst., 2004.
- [38] Pereira, M.; Campodónico,N.; Kelman,R. – Long term Hydro Scheduling based on Stochastic Models, EPSOM '98, Zurique, Setembro 1998.
- [39] Pereira, M.; Pinto,L. M.V.G.– Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning, Mathematical Programming, Vol 52, 359-375, 1991
- [40] Pritchard, G., Zakeri, G. (2003): Market offering strategies for hydroelectric generators. Operations Research 51, 602-612.
- [41] Ramos, A., Ventosa, M. and Rivier, M., “Modeling Competition in Electric Energy Markets by Equilibrium Constraints” Utilities Policy, Vol. 7 Issue 4 pp 233-242, Apr. 1999.
- [42] Rudnick H., Villar J, - Hydrothermal Market Simulator: an assessment using game theory. IEEE Trans. on Power Syst., 2004.
- [43] Scott,T. ; Read,E. – Modelling Hydro Reservoir Operation in a Deregulated Electricity Market, International Transactions in Operational Research 3 (3-4):243-253, 1996
- [44] Silva, E. L., Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica, Editora Sagra Luzzatto, Porto Alegre, RS, Brasil, 2001.
- [45] Strategic Bidding Under Uncertainty: A Comparison Between The Binary Expansion Approach and Non Linear Optimization Methods – PSR Tech. Rep. 2003: disponível em <http://www.psr-inc.com>.
- [46] Torre, S., Arroyo, J. M., Conejo, A. J. and Contreras, J., “Price Maker Self Scheduling in a Pool-Based Electricity Market: A MILP Approach”, IEEE Trans. Power Syst, Vol. 17, No.4, 2002.
- [47] Von Der Fehr, N.H., Harbord, D., Competition in Electricity Spot Markets Economic Theory and International Experience, Memorandum, Departmente of Economics, University of Oslo, February, 1998.
- [48] Wallace, S.W., Fleten S.-E. (2003): Stochastic programming models in energy. In: Stochastic Programming: Handbooks in OR & MS, Vol.10 (A.Ruszczynski, A. Shairo eds), Elsevier Science.
- [49] Weber, J. and Overbye T., “An individual welfare maximization algorithm for electricity markets”, IEEE Trans. Power Syst., Vol. 17, No.3, 2002.

- [50] Xian, W., Yuzeng Li, Shaohua Z., Oligopolistic equilibrium analysis for electricity markets: a nonlinear complementarity approach, IEEE Transactions on Power Systems, Volume: 19, Issue: 3, Aug. 2004.
- [51] Zucarato, A.N., Simulação de Mercados de energia elétrica com predominância hidroelétrica, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Março 2003.

9 APÊNDICE B - Detalhamento da metodologia proposta

9.1 Formulação do problema

A determinação da estratégia de oferta de um agente hidroelétrico que visa maximizar o valor esperado de sua receita ao longo do período de estudo pode ser formulado como um problema de *programação dinâmica estocástica* caracterizado pela seguinte equação recursiva:

$$\beta_t(v_{t-1}, a_{t-1}) = E\{ \text{Max} [R_t(E_t) + \beta_{t+1}(v_t, a_t)] \} \quad (\text{B-1})$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) u_t(i) = E_t \quad (\text{B-2})$$

$$v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_1} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}(i) + a_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B-3})$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B-4})$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B-5})$$

onde i indexa as usinas hidro (I = número de usinas) e $R_t(E_t)$ representa a receita obtida no estágio t associada a geração hidro E_t , isto é:

$$R_t(E_t) = \text{Max} \sum_{k=1}^K p_t(k) e_t(k) \quad (\text{B-6})$$

Sujeito a:

$$E_t - \sum_{k=1}^K e_t(k) = 0 \quad (\text{B-7})$$

$$0 \leq e_t(k) \leq \bar{e}_t(k) \quad j = 1, \dots, K \quad (\text{B-8})$$

onde k representa o índice dos segmentos lineares que aproximam a curva de remuneração do agente hidroelétrico em função da energia ofertada a preço zero (K = número de segmentos) como proposto na seção 5.5.

A princípio, o procedimento recursivo (B-1) poderia ser resolvido através de um algoritmo de programação dinâmica estocástica (PDE) como já mencionado anteriormente. No entanto, o esforço computacional do algoritmo PDE tradicional cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado do problema.

Devido a esta limitação, utiliza-se a técnica de programação dinâmica estocástica dual (SDDP), que permite obter os mesmos resultados da PDE tradicional, sem a necessidade de discretização do espaço de estados. O algoritmo SDDP é um processo iterativo de construção de uma aproximação da função de benefício futuro, cuja precisão depende de dois parâmetros: o tamanho da amostra de estados (L) e o número de cenários condicionados utilizados no cálculo da função de benefício futuro (N).

9.2 Passos do algoritmo SDDP

9.2.1 Seleção do conjunto inicial de estados

Na primeira iteração são requeridos L estados iniciais. Para cada estágio t o estado (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) representa as condições iniciais de armazenamento e afluições, para $l = 1, \dots, L$.

9.2.1.1 Estados iniciais de armazenamento

O estado inicial de armazenamento para o estágio $t=1$ é um dado conhecido, igual a v_0 para cada um dos L estados. Os estados iniciais de armazenamento $\{v_{t-1}^l\}$, $l = 1, \dots, L$ e $t = 2, \dots, T$ são obtidos dividindo a capacidade do reservatório em L valores. Por exemplo, se $L = 5$, os estados de armazenamento seriam 100%, 75%, 50%, 25% e 0%.

9.2.1.2 Estados iniciais de afluições

A condição hidrológica inicial a_0 é um dado conhecido. Os estados iniciais de afluições anteriores $\{a_{t-1}^l\}$, $l = 1, \dots, L$ são obtidos gerando um conjunto de L seqüências

hidrológicas para os estágios $t = 2, \dots, T$. O processo de geração consiste em sortear aleatoriamente um vetor de ruídos ξ_t^l com distribuição log-normal de três parâmetros e calcular o vetor de afluições para o estágio t , seqüência l como:

$$a_t^l = \Phi_{t-1} \times a_{t-1}^l + \Lambda_t \times \xi_t^l \quad (\text{B-9})$$

As matrizes Φ_{t-1} e Λ_t contêm os parâmetros do modelo estocástico de afluições. Φ_{t-1} representa a relação entre as afluições de uma mesma usina em estágios consecutivos (correlação temporal), enquanto Λ_t representa a relação entre todas as afluições do sistema no mesmo estágio (correlação espacial). Nesta apresentação da metodologia utiliza-se um modelo auto-regressivo de ordem 1, com o objetivo de simplificar a notação. Observa-se que a utilização de modelos de ordem maior que 1 não compromete a eficiência da metodologia SDDP.

9.2.2 Cálculo da função aproximada de benefício futuro

A aproximação da função de benefício futuro é construída através de uma recursão no sentido inverso do tempo. Para cada estágio t e para cada estado (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) o seguinte processo se repete.

9.2.2.1 Geração de N cenários de afluições condicionadas

São gerados N cenários de afluições condicionadas à afluição a_{t-1}^l , como é mostrado a seguir:

$$a_t^{ln} = \Phi_{t-1} \times a_{t-1}^l + \Lambda_t \times \xi_t^n \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad (\text{B-10})$$

onde Φ_{t-1} e Λ_t são os parâmetros do modelo estocástico de afluições para o estágio t , e o vetor ξ_t^n é obtido por um sorteio aleatório de uma distribuição log-normal.

9.2.2.2 Solução do problema operativo

Seja v_{t-1}^l o vetor de armazenamentos iniciais e a_t^{ln} um dos vetores de afluências condicionadas produzido no passo 10.2.4.1. É resolvido então o problema operativo para o estágio t :

$$w_t^{ln} = \text{Max } R_t(e_t) + \beta_{t+1} \quad \text{multiplicador} \quad (\text{B-11})$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_T(i) - \sum_{k=1}^K e_t(k) = 0 \quad (\text{B-12})$$

$$v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_1} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}^l(i) + a_t^{ln}(i) \quad i = 1, \dots, I \quad \pi_{v_{t-1}^l}^{ln}(i) \quad (\text{B-13})$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad \pi_{\bar{v}_t}^{ln}(i) \quad (\text{B-14})$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad \pi_{\bar{u}_t}^{ln}(i) \quad (\text{B-15})$$

$$0 \leq e_t(k) \leq \bar{e}_t(k) \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{B-16})$$

$$\beta_{t+1} - \sum_{i=1}^I \phi_{v_t}^p(i) \times v_t(i) \geq \sum_{i=1}^I \phi_{a_t}^p(i) \times a_t^{ln}(i) + r_t^p \quad p = 1, \dots, P(t) \quad \pi_{\alpha_{t+1}}^{ln}(p) \quad (\text{B-17})$$

$$\beta_{t+1} \geq 0 \quad (\text{B-18})$$

onde $P(t)$ é o número de aproximações da função de benefício futuro no estágio t . Inicialmente $P(t) = 0$.

9.2.2.3 Cálculo das derivadas

Depois da solução do problema (B-11)-(B-16) para cada um dos cenários de afluências condicionadas, são calculadas as derivadas da função objetivo em relação às condições iniciais (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)

O vetor $\partial w_t^{ln} / \partial v_{t-1}^l$ representa a variação do custo operativo em relação aos armazenamentos iniciais. Como estes armazenamentos só aparecem na equação de balanço hídrico, tem-se:

$$\frac{\partial w_t^l}{\partial V_{t-1}^l} = \pi_{v_{t-1}}^l \quad (\text{B-19})$$

onde $\pi_{v_{t-1}}^l$ é o multiplicador simplex associado à equação de balanço hídrico do problema (B-11)-(B-16).

A variação do custo operativo em relação às afluências anteriores, $\partial w_t^l / \partial a_{t-1}^l$ é obtida da seguinte maneira. Ainda que a_{t-1}^l não apareça no lado direito do problema (B-11)-(B-18), utiliza-se a regra da cadeia para obter a derivada:

$$\frac{\partial w_t^l}{\partial a_{t-1}^l} = \frac{\partial w_t^l}{\partial a_t^l} \times \frac{\partial a_t^l}{\partial a_{t-1}^l} \quad (\text{B-20})$$

Dado que a_t^l aparece na equação de balanço hídrico e nas restrições de custo futuro, tem-se:

$$\frac{\partial w_t^l}{\partial a_t^l} = \pi_{v_{t-1}}^l + \sum_{p=1}^{P(t)} \Phi_{a_t}^p \times \pi_{\alpha_{t+1}}^l(p) \quad (\text{B-21})$$

Para obter o termo $\partial a_t^l / \partial a_{t-1}^l$, substitui-se a_t^l pela expressão (B-10) do modelo estocástico de afluências. Derivando, tem-se:

$$\frac{\partial a_t^l}{\partial a_{t-1}^l} = \Phi_{t-1} \quad (\text{B-22})$$

A derivada desejada é calculada como o produto das expressões (B-21) e (B-22):

$$\frac{\partial w_t^l}{\partial a_{t-1}^l} = [\pi_{v_{t-1}}^l + \sum_{p=1}^{P(t)} \Phi_{a_t}^p \times \pi_{\alpha_{t+1}}^l(p)] \times \Phi_{t-1} \quad (\text{B-23})$$

Para simplicidade de notação, define-se:

$$\phi_{a_{t-1}}^{ln} = \frac{\partial w_t^{ln}}{\partial a_{t-1}^l} \quad (\text{B-24})$$

9.2.2.4 Cálculo da aproximação da função de benefício futuro

Depois da solução dos N problemas correspondentes aos N cenários condicionados ao estado (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) e calculadas as derivadas em relação às condições iniciais para cada cenário n , o valor esperado destas derivadas é dado por

$$\phi_{v_{t-1}}^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{v_{t-1}}^{ln} \quad (\text{B-25})$$

$$\phi_{a_{t-1}}^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_{a_{t-1}}^{ln} \quad (\text{B-26})$$

e o valor esperado da função objetivo é:

$$w_t^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_t^{ln} \quad (\text{B-27})$$

Uma aproximação da função de custo futuro do estágio anterior $t-1$ é obtida através da linearização do valor esperado w_t^l ao redor do estado inicial (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)

$$\beta_{t-1}^l(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) \geq w_t^l + \phi_{v_{t-1}}^l \times (v_{t-1} - v_{t-1}^l) + \phi_{a_{t-1}}^l \times (a_{t-1} - a_{t-1}^l) \quad (\text{B-28})$$

Separando os valores conhecidos das variáveis de decisão e agregando os termos, tem-se:

$$\beta_{t-1}^l(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) \geq \phi_{v_{t-1}}^l \times v_{t-1} + \phi_{a_{t-1}}^l \times a_{t-1} + r_{t-1}^l \quad (\text{B-29})$$

onde r_{t-1}^l é um termo constante dado por:

$$r_{t-1}^l = w_t^l - \phi_{v_{t-1}}^l \times v_{t-1}^l - \phi_{a_{t-1}}^l \times a_{t-1}^l \quad (\text{B-30})$$

9.2.2.5 Atualização da função de custo futuro do estágio anterior

O procedimento apresentado em 10.2.4.4 produz um hiperplano que aproxima a função de custo futuro do estágio anterior $t-1$ ao redor do estado inicial (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) . Este processo se repete para cada estado l , com $l = 1, \dots, L$. Desta forma geramos L aproximações da função de custo futuro para o estágio $t-1$. Estes L novos hiperplanos são adicionados ao problema do estágio anterior, portanto $P(t-1) \leftarrow P(t-1) + L$.

9.2.3 Cálculo do limite superior

O problema operativo é resolvido agora para o primeiro estágio, $t=1$. Os segmentos da função de benefício futuro para este estágio foram obtidos como se mostrou na seção 10.2.2. O valor esperado dos benefícios obtidos ao longo do período de planejamento é calculado como:

$$\bar{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_1^l \quad (\text{B-31})$$

onde:

\bar{w}	valor esperado do custo operativo
w_1^l	valor ótimo do problema operativo do primeiro estágio dado o volume inicial v_0 e o vetor de afluências a_1^l

$$w_1^l = \text{Max}_{k=1}^K p_1(k) e_1(k) + \beta_1 \quad (\text{B-32})$$

sujeito às restrições operativas etc.

Se o procedimento apresentado nas seções 10.2.1 e 10.2.2 fosse aplicado a todos os estados (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) possíveis do sistema, o custo operativo médio calculado em (B-31) seria por definição a solução ótima do problema estocástico. Como o número total de estados é excessivamente elevado, aplica-se o procedimento a um subconjunto de L estados. Portanto, as funções de benefício futuro $\{\beta_t\}$ calculadas são aproximações das funções verdadeiras. Em particular, dado que a aproximação da função de benefício futuro não inclui todos os segmentos, o valor \bar{w} em (B-31) é um limite superior para a solução ótima.

9.2.4 Cálculo do limite inferior

O cálculo do limite inferior se baseia na observação de que o benefício esperado resultante da simulação operativa do sistema para qualquer função de benefício futuro não pode ser superior ao valor ótimo. O processo consiste em uma simulação no sentido direto do tempo para uma amostra de tamanho L . O procedimento de simulação é apresentado a seguir.

9.2.4.1 Estados iniciais de armazenamento

Para o estágio $t=1$ considera-se o vetor de volumes iniciais v_0 .

9.2.4.2 Estados iniciais de afluições

Os estados iniciais de afluições para os estágios $t = 1, \dots, T$ e para os cenários $l = 1, \dots, L$ são os mesmos que foram sorteados na seção 10.2.1.2.

9.2.4.3 Simulação operativa

Para cada estágio t e para cada estado inicial (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) é resolvido o problema operativo:

$$w_t^l = \text{Max } R_t(e_t) + \beta_{t+1} \quad (\text{B-33})$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) \cdot u_T(i) - \sum_{k=1}^K e_t(k) = 0 \quad (\text{B-34})$$

$$v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_1^i} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}^l(i) + a_t^l(i) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B-35})$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B-36})$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i) \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{B-37})$$

$$0 \leq e_t(k) \leq \bar{e}_t(k) \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{B-38})$$

$$\beta_{t+1} - \sum_{i=1}^I \phi_{v_t}^p(i) \times v_t(i) \geq \sum_{i=1}^I \phi_{a_t}^p(i) \times a_t^l(i) + r_t^p \quad p = 1, \dots, P(t) \quad (\text{B-39})$$

$$\beta_{t+1} \geq 0 \quad (\text{B-40})$$

onde $P(t)$ é o número de aproximações da função de custo futuro no estágio t obtidas no processo recursivo apresentado em 10.2.2.

O seguinte valor está associado à solução deste problema:

$$z_t^l = w_t^l - \alpha_t^l \quad (\text{B-41})$$

onde w_t^l é o valor ótimo da solução e α_t^l é o valor da variável de custo futuro na solução ótima. Em outras palavras, z_t^l representa o custo operativo no estágio t , sem custo futuro.

9.2.4.4 Atualização do estado inicial de armazenamento

Para os estágios t , $t = 2, \dots, T$, atualize os estados iniciais de armazenamento utilizando o vetor de armazenamentos finais v_{t-1}^l obtido na solução do problema operativo do estágio $t-1$ para o l -ésimo cenário.

9.2.4.5 Obtenção do limite inferior

Depois da solução do problema (B-33)-(B-40) para cada estado inicial (v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) e para cada estágio calcula-se:

$$\underline{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L z^l \quad (\text{B-42})$$

onde z^l é o custo operativo total da seqüência l :

$$z^l = \sum_{t=1}^T z_t^l \quad (\text{B-43})$$

9.2.5 Verificação da otimalidade

O limite superior estimado em (B-42) se baseia em uma amostra de L seqüências de afluições. Portanto, há uma incerteza ao redor desta estimação, que depende do desvio padrão do estimador:

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L (z^l - \underline{w})^2} \quad (\text{B-44})$$

O intervalo de confiança (95%) para \underline{w} é:

$$[\underline{w} - 1.96 \sigma_w, \underline{w} + 1.96 \sigma_w] \quad (\text{B-45})$$

Se o limite superior \bar{w} está no intervalo (B-45), chega-se à solução ótima e o algoritmo termina.

Caso contrário, deve-se melhorar a aproximação das funções de custo futuro e portanto repetir o procedimento apresentado na seção 10.2.2. Os novos estados de

armazenamento são os volumes (v_{t-1}^l) produzidos na simulação operativa apresentada na seção 10.2.4. Os estados de afluências (a_{t-1}^l) seguem iguais.