

CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS DE INTERSEÇÃO DE TRIÂNGULOS

Fabiano de Souza Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Célia Picinin de Mello, D.Sc.

Prof. Claudson Ferreira Bornstein, Ph.D.

Prof. Sulamita Klein, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2006

OLIVEIRA, FABIANO DE SOUZA

Caracterizações de Grafos de Interseção de
Triângulos [Rio de Janeiro] 2006

X, 91 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2006)

Dissertação – Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1 - Grafos PI

2 - Grafos de cocomparabilidade

3 - Grafos de interseção

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha querida esposa, Cristiane.

Agradecimentos

A Deus, criador de todas as coisas, que criou a Natureza e deu ao Homem a inteligência necessária para que ele pudesse admirá-la.

À minha amada esposa Cristiane, que com seu amor, companheirismo, compreensão e alegria, formou a base necessária para que este trabalho pudesse ser desenvolvido.

Aos meus pais, pelo que são e pelo o que a mim representam.

Aos Profs. Célia, Sulamita e Claudson, por aceitarem fazer parte desta banca, agregando valor inestimável a este trabalho.

Às pessoas que colaboraram direta ou indiretamente para este trabalho: ao Prof. Derek Corneil, pela prontidão no envio de uma tese de doutorado de sua orientação por correio; ao Prof. Valmir C. Barbosa, por oferecer seu computador para que o programa de teste da conjectura pudesse ser executado e ao aluno Alexandre Stauffer, administrador da rede de computadores do Lab-IA, pela agilidade com que disponibilizou 8 computadores para este propósito.

Ao CNPq e à FAPERJ (Programa Bolsa Nota 10), por viabilizarem financeiramente este projeto, através das bolsas a mim concedidas.

Por fim, e em especial, aos Profs. Márcia e Jayme, pela excelente orientação e por servirem para mim de exemplos a se seguir. Os meus sinceros agradecimentos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS DE INTERSEÇÃO DE TRIÂNGULOS

Fabiano de Souza Oliveira

Fevereiro/2006

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo é PI quando é grafo de interseção de uma família de triângulos com um vértice pertencente a uma reta horizontal e os outros dois vértices pertencentes a uma segunda reta paralela, não-coincidente e abaixo da primeira. O reconhecimento da classe dos grafos PI é um problema em aberto. Neste trabalho, apresentamos a classe dos grafos PI e classes relacionadas sob um ponto de vista unificado, exibindo a hierarquia de inclusão entre elas. Como resultados, mostramos que as classes dos grafos PI^* e dos grafos de trapézios simples são incomparáveis. Além disso, apresentamos quatro caracterizações de grafos PI. Uma delas, juntamente com uma conjectura, estabelece que os grafos PI podem ser reconhecidos eficientemente.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CHARACTERIZATIONS OF TRIANGLE INTERSECTION GRAPHS

Fabiano de Souza Oliveira

February/2006

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

A PI graph is the intersection graph of a family of triangles lying one vertex in a horizontal line and the other two vertices in a distinct parallel line, below the former. The recognition problem of the class of PI graphs is an open problem. In this work, we present the class of PI graphs and related classes through an unified perspective, showing their inclusion hierarchy. As contributions of this dissertation, we show that the classes of PI^* graphs and simple trapezoid graphs are incomparable. Furthermore, we present four characterizations of PI graphs. One of them, using a conjecture, shows that PI graphs can be recognized in polynomial time.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	A classe de grafos PI	1
1.2	Definições Básicas	4
2	Grafos PI e classes relacionadas	9
2.1	Definição de grafos PI	9
2.2	Motivação	11
2.3	Grafos de permutação	15
2.4	Grafos de intervalos	17
2.5	Grafos PI	18
2.6	Grafos PI^*	20
2.7	Grafos de trapézios simples	21
2.8	Grafos de paralelogramos	24
2.9	Grafos de trapézios	25
2.10	Resumo	27
3	Caracterização e reconhecimento de grafos de trapézios	31
3.1	A ordem $B(P)$	34
3.2	A ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$	38
3.3	O isomorfismo entre $B(P)$ e $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$	41
3.4	Reconhecimento e complexidade	43
4	Caracterizações de grafos PI	45

4.1	Por grafos de permutação	46
4.2	Por classificação de arestas	48
4.3	Por dimensão de ordens	53
5	Reconhecimento de grafos PI	61
5.1	Representações básicas	61
5.2	Uma nova caracterização dos grafos PI	70
5.3	Problema da maior clique de um subgrafo de octaedro generalizado	76
5.4	Reconhecimento	79
5.5	Análise da conjectura	80
6	Conclusões	84

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de ordens.	7
2.1	Exemplo de grafo PI.	10
2.2	Exemplo de um modelo PI (grafo da figura 2.1).	10
2.3	Exemplo de um grafo que <i>não</i> é grafo PI.	11
2.4	Exemplo de um grafo que é de função e de fitas.	12
2.5	Exemplo de um modelo de função do grafo da figura 2.4.	13
2.6	Exemplo de um modelo de fitas do grafo da figura 2.4.	13
2.7	Modelo de permutação do grafo C_4	18
2.8	Grafo de intervalos que não é um grafo de permutação.	18
2.9	Modelo de intervalos do grafo da figura 2.8.	19
2.10	Grafo PI que não é de permutação nem de intervalos.	20
2.11	Modelo PI do grafo da figura 2.10.	20
2.12	Grafo PI^* que não é um grafo PI.	21
2.13	Modelo PI^* do grafo da figura 2.12.	21
2.14	Grafo de trapézios simples que não é PI^* (portanto, nem PI).	24
2.15	Modelo de trapézios simples da figura 2.14.	24
2.16	Grafo PI (grafo PI^*) que não é um grafo de trapézios simples.	25
2.17	Modelo PI da figura 2.16.	25
2.18	Grafo de trapézios que não é de paralelogramos (grafo de Felsner).	28
2.19	Modelo de trapézios do grafo da figura 2.18.	28
2.20	Grafo de cocomparabilidade que não é de trapézios (isomorfo a $\overline{C_6}$).	29
2.21	Modelo de função do grafo da figura 2.20.	29

2.22	Hierarquia conhecida de inclusão entre as classes.	30
3.1	Ordem P e a ordem associada $B(P)$	35
3.2	Uma imersão de cubos \mathcal{I} de P e a ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I})$	39
3.3	Imersão de cubos \mathcal{I}^* (P -normalização de \mathcal{I}) e a ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$	41
4.1	Grafo G e um grafo $H \in P(G)$	47
4.2	Modelo de permutação do grafo H	48
4.3	$P = a \prec b \prec c \prec e \prec d \prec f$ é factível para o grafo de permutação G_P	49
4.4	O grafo de intervalos G_I e a ordem inicial $a \prec b \prec c \prec e \prec d \prec f$	49
4.5	Modelo PI de $G_P \cup G_I$	51
4.6	Ordens P, Q e R , obtidas umas das outras por reversões elementares.	55
5.1	Exemplo de ordem P e grafo G^P associado.	70
5.2	Caso $t(T_w) \ll t(T_z) \ll t(T_y)$	75
5.3	Exemplo de uma clique acíclica em G^P	75

Capítulo 1

Introdução

1.1 A classe de grafos PI

Um grafo é PI se é o grafo de interseção de triângulos entre duas retas paralelas, tais que dois vértices de cada triângulo pertencem a uma das retas, e o outro vértice pertence à outra. O reconhecimento desta classe de grafos é um problema em aberto [6, 5, 34]. A classe dos grafos PI é uma subclasse da classe dos grafos de cocomparabilidade, classe que também generaliza outras classes importantes de grafos, como a classe dos grafos de permutação e grafos de intervalos.

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos. O *grafo de interseção* de \mathcal{F} é o grafo obtido associando um vértice distinto a cada conjunto de \mathcal{F} e unindo dois vértices por uma aresta precisamente quando os conjuntos associados têm interseção não-nula. Note que, dada uma família \mathcal{F} , o grafo de interseção associado é bem-definido, porém o contrário não é verdade: um mesmo grafo pode ser o grafo de interseção de diferentes famílias. Se G é o grafo de interseção de uma família \mathcal{F} , dizemos que \mathcal{F} é um *modelo de interseção* de G .

Um resultado interessante, devido a Marczewski em 1945 [31], é que todo grafo é um grafo de interseção de alguma família de conjuntos. Este resultado, apesar de interessante, não é de todo surpreendente, pois como os conjuntos que compõem a família \mathcal{F} são conjuntos quaisquer, as possibilidades de combinação dão muita

flexibilidade para a modelagem de um dado grafo. No entanto, classes interessantes de grafos são definidas quando limita-se os elementos da família \mathcal{F} a certos tipos de estruturas, como veremos a seguir.

Um grafo é dito ser um *grafo de cocomparabilidade* quando o seu complemento pode ser orientado transitivamente. Em 1983, Golubic, Rotem e Urrutia [19] mostraram que um grafo é de cocomparabilidade se e somente se: (i) for o grafo de interseção de uma família de funções com extremidades em duas retas paralelas; (ii) for o grafo de interseção de uma família de fitas entre duas retas paralelas. Uma *função* é um segmento de curva contínuo tal que se (x, y) e (x', y) são pontos da função, então $x = x'$. Uma *fita* é uma região delimitada por duas funções não-intersectantes.

Impondo restrições sobre os tipos de funções ou de fitas admissíveis nos modelos de interseção, geramos subclasses da classe de grafos de cocomparabilidade. Um grafo é PI se possui um modelo de fitas na qual todas as fitas são triângulos, cada um com dois vértices pertencentes a uma das retas. Definiremos também, através de outras restrições, as classes de grafos de permutação, grafos de intervalos, grafos PI*, grafos de trapézios simples, grafos de paralelogramos e grafos de trapézios. Veremos que todas elas são classes distintas de grafos. Algumas destas classes têm larga aplicação prática e são vastamente estudadas, como é o caso dos grafos de permutação e grafos de intervalos.

As classes de grafos de permutação, grafos de intervalos, grafos de trapézios e grafos de cocomparabilidade possuem algoritmos eficientes de reconhecimento [18, 4, 27]. Porém, algoritmos eficientes de reconhecimento das classes de grafos PI, grafos PI*, grafos de trapézios simples e grafos de paralelogramos não são conhecidos [5, 9, 26, 34, 7, 12]. O principal objetivo desta dissertação é o de estudar o problema de caracterizar e reconhecer a classe de grafos PI.

Os grafos PI foram introduzidos por Corneil e Kamula em 1987 [9], e apesar de algum esforço na tentativa de seu reconhecimento [26, 7, 12], isto ainda não foi conseguido.

Como resultados, iremos mostrar quatro diferentes caracterizações de grafos PI. As duas primeiras trabalham na tentativa de relacionar um grafo PI com grafos de classes próximas em definição. Assim, mostraremos que um grafo é PI se e somente se: (i) sob certa operação, resultar em um grafo de permutação com uma determinada propriedade; (ii) for a união de um grafo de permutação e um grafo de intervalos tal que a ordem inicial do grafo de intervalos seja factível para o grafo de permutação.

A terceira caracterização trata o assunto sob o ponto de vista de ordens e suas dimensões. Definiremos ordem PI, mostrando que ser ordem PI é uma invariante de comparabilidade. Além disso, será mostrado que o problema de reconhecer uma ordem PI e um grafo PI são problemas equivalentes. Finalmente, definiremos o que vem a ser dimensão linear-intervalar de uma ordem, e caracterizaremos ser ordem PI por sua dimensão linear-intervalar.

A quarta caracterização é a que mais se aproxima de um reconhecimento eficiente desta classe. Dado uma ordem PI (ou um grafo PI), criaremos um grafo associado para o qual mostraremos que a ordem é PI se e somente se o grafo associado tem uma clique de determinado tamanho com uma determinada propriedade. Mostraremos então um algoritmo eficiente para reconhecer a existência de uma clique com este determinado tamanho no grafo associado. Em seguida, conjecturaremos que a determinada propriedade necessária para caracterizar um grafo PI é, na verdade, desnecessária, o que implica que os grafos PI poderiam ser reconhecidos eficientemente. Por fim, analisaremos as possíveis evidências da conjectura.

O trabalho está assim organizado. Na próxima seção deste capítulo introdutório apresentaremos as definições que serão usadas durante toda a dissertação. No capítulo 2, serão apresentadas motivações para o estudo da classe de grafos PI e o seu relacionamento com as classes também definidas por restrições no modelo de interseção de funções e de fitas. Este relacionamento será estudado sob o ponto de vista da hierarquia de inclusão entre elas. No capítulo 3, apresentaremos um algoritmo eficiente de reconhecimento para uma superclasse da classe de grafos

PI, a classe de grafos de trapézios, devido a Felsner, Habib e Möhring em 1994 [15] e Langley em 1995 [25]. No capítulo 4, mostraremos as três primeiras caracterizações discutidas acima, enquanto a quarta caracterização será detalhada no capítulo 5. Por fim, o capítulo 6 trará um fechamento do trabalho e propostas de novas direções de pesquisa neste assunto.

1.2 Definições Básicas

As notações utilizadas neste trabalho procuraram seguir as notações usuais utilizadas no estudo de grafos, complexidade de algoritmos e de ordens. Para se saber mais sobre os assuntos gerais utilizados neste trabalho, indicamos [3] para o estudo de grafos, [17] para o estudo de complexidade de algoritmos, [35] para o tratamento de ordens e [31] para a teoria geral de grafos de interseção.

Grafos e Algoritmos

Um *grafo simples* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito de elementos denominados *vértices* e $E(G)$ é um conjunto finito de elementos denominados *arestas*, tal que cada aresta é um par não ordenado de vértices distintos. Note que estamos eliminando a possibilidade de um grafo possuir laços (uma aresta formada por um par de vértices idênticos) e multiarestas (arestas idênticas). Em todo o trabalho, consideraremos apenas grafos simples, de maneira que daqui em diante iremos utilizar somente a nomenclatura *grafo* para nos referir a esta estrutura. Se $e = (u, v)$ é uma aresta de um grafo, então dizemos que e é *incidente* a u e a v ou ainda que e *liga* os vértices u e v .

Se G é um grafo, denotaremos por \overline{G} o grafo tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{(u, v) \mid u, v \in V(G), u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E(G)\}$. Chamamos \overline{G} de *complemento* de G .

Uma *orientação* F de um grafo G é um conjunto de pares ordenados tal que se $(x, y) \in E(G)$, então ou $(x, y) \in F$, ou $(y, x) \in F$. Além disso, F é dita ser uma *orientação transitiva* se $(x, y), (y, z) \in F$ implicar que $(x, z) \in F$.

Um grafo G é *isomorfo* a um grafo H se eles são iguais, a menos de uma nova rotulação para o conjunto de vértices de um deles. Mais precisamente, G é isomorfo a H se existe uma bijeção $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que para todo $u, v \in V(G)$, $(u, v) \in E(G) \iff (\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$. Denotamos a relação de isomorfismo por $G \cong H$.

Um *grafo completo* é um grafo tal que existe aresta ligando quaisquer dois de seus vértices. Denotamos um grafo completo com n vértices por K_n . Uma *clique* de um grafo é um subconjunto de vértices deste grafo que induz um grafo completo.

Denotamos por C_n um grafo isomorfo ao grafo cujo conjunto de vértices é o conjunto $\{1, \dots, n\}$ e para todo $1 \leq i < j \leq n$, (i, j) pertence ao conjunto de arestas de $C_n \iff j = i + 1$ ou $i = 1, j = n$.

A *união* de dois grafos G e H é o grafo U tal que $V(U) = V(G) \cup V(H)$ e $E(U) = E(G) \cup E(H)$.

Um *algoritmo* é uma maneira sistemática de descrever um procedimento que seja equivalente a uma máquina de Turing [17]. Um algoritmo é dito ser *eficiente* quando o número de passos necessários no pior caso para sua execução é assintoticamente limitado por um polinômio no tamanho da entrada.

Representação de modelos

Um *modelo* é uma representação gráfica formada por duas retas reais paralelas, horizontais e não-coincidentes L_1 e L_2 , com L_1 acima de L_2 , e uma família de figuras, tais que a base de cada figura está apoiada em L_2 e o topo em L_1 . Os vários tipos de modelos são definidos pelos tipos de figuras que são usados no modelo. Por exemplo, em um *modelo de permutação*, cada figura é um segmento de reta, tal que o topo e base são respectivamente os extremos superior e inferior do segmento. Quando a base (ou topo) é formado por um ponto, como no caso do modelo de permutação, dizemos que a base (ou topo) é *trivial*.

Se F é uma figura representada num modelo, então denotamos por $t(F)$ o topo desta figura, por $b(F)$ sua base, por $e(F)$ o segmento de curva que delimita a figura à esquerda e por $d(F)$ o segmento de curva que delimita a figura à direita.

Se $t(F)$ ($b(F)$) é um intervalo, então denotaremos os extremos inferior e superior deste intervalo respectivamente por $e(t(F))$ e $d(t(F))$ ($e(b(F))$ e $d(b(F))$). Quando o topo (ou base) de uma figura é trivial, então $e(t(F)) = d(t(F)) = t(F)$ ($e(b(F)) = d(b(F)) = b(F)$). Como dissemos, $t(F)$ está apoiado sobre a reta L_1 , o que denotaremos por $t(F) \in L_1$. Similarmente, temos que $b(F) \in L_2$. Por conveniência, consideraremos, sem perda de generalidade, somente modelos onde todos os topos (bases) triviais e todos os extremos dos intervalos de topos (bases) não-triviais são pontos distintos.

Seja P um conjunto de pontos de uma reta. Sejam $p_1, p_2 \in P$. Denotamos por $p_1 \ll p_2$ ou $p_2 \gg p_1$ a situação em que p_1 possui abscissa menor que p_2 . Se $p_1 \ll p_2$, então dizemos que p_1 e p_2 são *consecutivos* se não existir $q \in P$ tal que $p_1 \ll q \ll p_2$.

Dado uma família de figuras de um modelo (ou uma família de intervalos sobre uma reta), denotamos por $F_1 \ll F_2$ ou $F_2 \gg F_1$ a situação em que F_1 está totalmente à esquerda de F_2 no modelo. Mais formalmente, $F_1 \ll F_2$ quando para todo y , $\max\{x \mid (x, y) \text{ é ponto de } F_1\} < \min\{x \mid (x, y) \text{ é ponto de } F_2\}$. Quando F_1 possuir interseção de região não-nula com F_2 , denotaremos esta situação por $F_1 \parallel F_2$. Observe que se F_1 e F_2 são figuras de um modelo, então ocorre ou $F_1 \ll F_2$, ou $F_2 \ll F_1$, ou $F_1 \parallel F_2$.

Dado um modelo com a família \mathcal{F} de figuras e $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, a *translação* de \mathcal{F}' para a esquerda ou para a direita a uma distância D é o modelo resultante do deslocamento das figuras pertencentes a \mathcal{F}' para a esquerda ou para a direita de uma distância D no modelo original. A *reflexão vertical (horizontal)* de \mathcal{F}' é o modelo resultante da operação de refletir as figuras pertencentes a \mathcal{F}' sobre um eixo horizontal (vertical) que corta ao meio o retângulo que delimita \mathcal{F}' no modelo.

Ordens

Uma *ordem* (ou *conjunto parcialmente ordenado*, ou *poset*) $P = (X, \prec)$ é uma relação binária irreflexiva, transitiva e por isso assimétrica denotada por \prec sobre o conjunto X . A notação $x \prec y$ e $y \succ x$ será usada para denotar que $(x, y) \in \prec$.

Neste caso, dizemos que x e y são elementos *comparáveis*. Se x e y não forem comparáveis, então são ditos *incomparáveis*, e denotamos esta situação por $x \parallel y$. Frequentemente representaremos uma ordem pelo seu *diagrama de Hasse*. Em um *diagrama de Hasse*, representamos os elementos da ordem por pontos e ligamos por uma linha pares de elementos de tal maneira que se x e y são pontos do diagrama e x está numa posição horizontal mais abaixo que y , então existe uma linha ligando x e y se e somente se $x \prec y$ na ordem e não existir z tal que $x \prec z \prec y$. Informalmente, no diagrama de Hasse a relação de ordem está de baixo para cima e as transitividades não são representadas. Na figura 1.1, temos as ordens P , Q e R representadas pelos respectivos diagramas de Hasse. Como exemplos da notação, em P temos que $1 \prec 3$, $1 \prec 6$, $1 \parallel 2$ e $3 \parallel 4$. Em R , $x \parallel y$ para qualquer par x, y de elementos distintos.

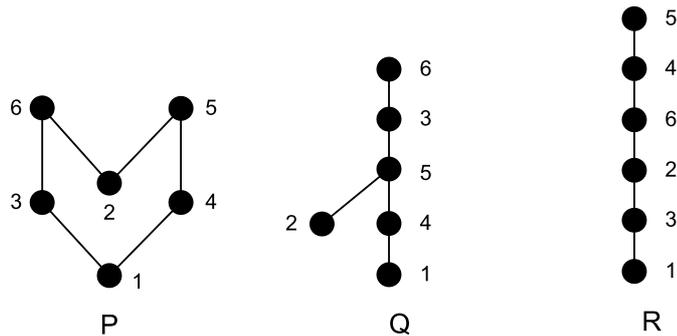


Figura 1.1: Exemplos de ordens.

A ordem $P' = (X, \prec')$ é dita ser uma *extensão* de P se $x \prec y \implies x \prec' y$. Como exemplo, as ordens Q e R da figura 1.1 são extensões de P .

Um elemento $x \in X$ é dito ser *maximal* na ordem P se não existir $x' \in X$ tal que $x \prec x'$. Analogamente, $x \in X$ é dito ser *minimal* na ordem P se não existir $x' \in X$ tal que $x \succ x'$. Na figura 1.1, 5 e 6 são os elementos maximais de P e 1 é o elemento minimal.

Sejam as ordens $P = (X, \prec_P)$ e $Q = (X, \prec_Q)$. Então $P \cap Q = (X, \prec_R)$ tal que $x \prec_R y \iff x \prec_P y$ e $x \prec_Q y$. Seja L a família $\{P_1, \dots, P_k\}$ de extensões da

ordem P . L é um *realizador* de P se $P = \bigcap_{i=1..k} P_i$. Ainda na figura 1.1, temos que $Q \cap R = P$. Portanto, o conjunto $\{Q, R\}$ é um realizador de P .

Sejam a ordem $P = (X, \prec)$ e $X' \subseteq X$. A *subordem induzida* de P por X' é a ordem $P[X'] = (X', \prec')$, tal que para todo $x, y \in X'$, $x \prec' y \iff x \prec y$.

Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem. Chamamos de *predecessores* de $y \in X$ o conjunto $\{z \in X \mid z \prec y\}$, e denotamos este conjunto por $P^-(y)$. Analogamente, chamamos de *sucessores* de $y \in X$ o conjunto $\{z \in X \mid z \succ y\}$, denotando-o por $P^+(y)$. Se $Y \subseteq X$, então $P^-(Y)$ denota o conjunto $\{z \in X \mid \forall y \in Y, z \prec y\}$ e $P^+(Y)$ denota o conjunto $\{z \in X \mid \forall y \in Y, z \succ y\}$. Na figura 1.1, $P^+(1) = \{3, 4, 5, 6\}$, $P^-(6) = \{1, 2, 3\}$, $Q^+(\{1, 2\}) = \{3, 5, 6\}$ e $R^-(\{2, 3\}) = \{1\}$.

Uma *ordem linear* é uma ordem onde quaisquer dois elementos são comparáveis. Uma *ordem intervalar* é uma ordem que tem uma representação de intervalos sobre uma reta real tal que $x \prec y$ na ordem se e somente se o intervalo associado a x estiver totalmente à esquerda do intervalo associado a y . Como exemplos, a ordem R da figura 1.1 é uma ordem linear, a ordem Q é uma ordem intervalar e a ordem P não é nem linear, nem intervalar.

Dado G e uma orientação transitiva F de G , dizemos que F induz a ordem $P = (V(G), \prec)$ tal que $x \prec y \iff (x, y) \in F$. Se $P = (X, \prec)$ é uma ordem, o *grafo de comparabilidade* de P é o grafo $G = (X, E)$ tal que $(x, y) \in E \iff x \prec y$ e o *grafo de incomparabilidade* de P é o grafo $G' = (X, E')$ tal que $(x, y) \in E' \iff x \parallel y$.

Um grafo é dito ser de *comparabilidade* quando é possível orientar suas arestas transitivamente. Este nome vem do fato de que se G é um grafo de comparabilidade, então ele é o grafo de comparabilidade de alguma ordem. Um grafo é de *cocomparabilidade* quando seu complemento for de comparabilidade, ou equivalentemente, um grafo é de *cocomparabilidade* quando for o grafo de incomparabilidade de alguma ordem.

Uma propriedade é dita ser uma *invariante de comparabilidade* se, para qualquer orientação transitiva de um grafo, a ordem induzida possuir a tal propriedade.

Capítulo 2

Grafos PI e classes relacionadas

Neste capítulo iremos apresentar a classe dos grafos PI e suas classes relacionadas, isto é, classes que generalizam/especializam a classe de grafos PI e classes que têm uma definição próxima à definição de grafos PI. O estudo da classe de grafos PI e classes relacionadas será feito através da investigação da hierarquia de inclusão destas classes.

2.1 Definição de grafos PI

Como vimos na introdução do capítulo 1, todo grafo é um grafo de interseção. Impondo restrições aos elementos da família \mathcal{F} , definimos classes interessantes de grafos. É assim que surge, por exemplo, a classe dos grafos PI.

Um grafo G é dito ser *grafo PI* se ele é o grafo de interseção de um modelo de triângulos $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in V(G)\}$, tais que $t(T_x)$ é um vértice e $b(T_x)$ é um lado do triângulo T_x , para todo $x \in V(G)$. Chamamos \mathcal{R} de *modelo PI* de G .

Os grafos PI têm este nome devido ao termo “Point-Interval”, dado que em um modelo PI, os triângulos são representados por pontos em uma reta e por intervalos na outra.

Na figura 2.1, temos um exemplo de um grafo PI. Um dos modelos PI para este grafo está representado na figura 2.2. Nem todos os grafos são PI. Por exemplo, não existe um modelo PI para o grafo G da figura 2.3. Suponha, por absurdo,

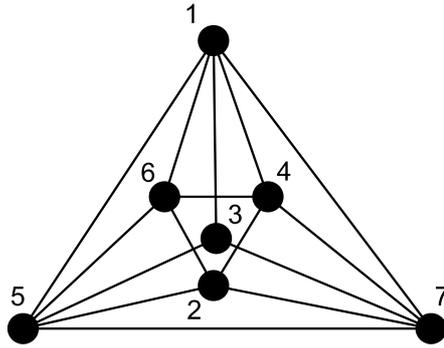


Figura 2.1: Exemplo de grafo PI.

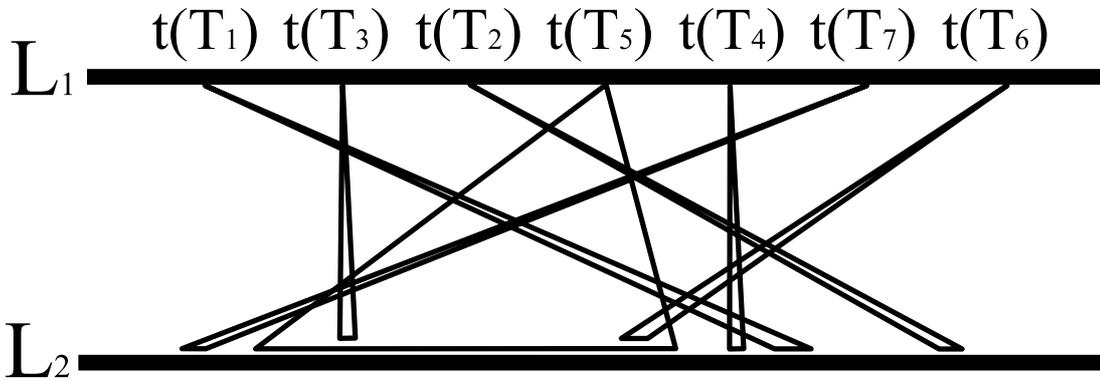


Figura 2.2: Exemplo de um modelo PI (grafo da figura 2.1).

que existisse um modelo PI de G . Sem perda de generalidade, considere que $T_1 \ll T_4$ neste modelo (caso contrário, tome a reflexão horizontal do modelo; é claro que o modelo resultante é ainda modelo PI de G no qual $T_1 \ll T_4$). Como $T_3 \not\parallel T_1$ e $T_3 \parallel T_4$, então $T_1 \ll T_3$. Analogamente, como $T_4 \not\parallel T_2$ e $T_2 \parallel T_1$, então $T_2 \ll T_4$. Além disso, dado que $T_5 \not\parallel T_2$, $T_2 \ll T_4$ e $T_5 \parallel T_4$, decorre que $T_2 \ll T_5$. Analogamente, dado que $T_5 \not\parallel T_3$, $T_1 \ll T_3$ e $T_5 \parallel T_1$, decorre que $T_5 \ll T_3$. Naturalmente, $T_2 \ll T_5 \ll T_3$ implica por transitividade que $T_2 \ll T_3$, o que contradiz o fato de existir a aresta $(2, 3)$ em G . Logo, nenhum modelo PI existe para o grafo da figura 2.3.

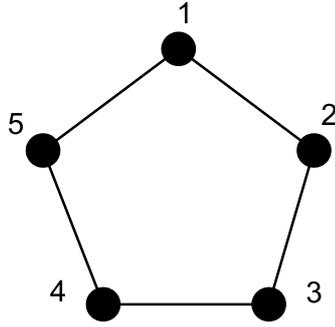


Figura 2.3: Exemplo de um grafo que *não* é grafo PI.

2.2 Motivação

As ordens modelam uma grande variedade de problemas teóricos e práticos. Não é difícil encontrar exemplos de situações nas quais objetos da vida real precisam ter uma certa ordenação entre eles (não necessariamente entre cada par deles), de modo que alguma restrição seja atendida. Por exemplo, se pensarmos num problema de escalonamento de atividades, certas atividades, devido a sua natureza, só podem ser iniciadas depois que uma ou mais atividades estejam concluídas. Note que esta relação entre as atividades tem a propriedade de ser irreflexiva e transitiva (se a atividade A deve ser realizada antes do início da atividade B , e a atividade B por sua vez deve estar completa antes da atividade C começar, então ocorre que a atividade A deve ser realizada antes de C iniciar). Se X é um conjunto de atividades e $P = (X, <)$ é uma ordem que modela a relação de dependência entre elas, podemos estar interessados, por exemplo, em descobrir uma seqüência possível para a realização das atividades de forma que um único recurso possa executá-las, repetindo as precedências em P (este problema é conhecido como o problema de gerar uma *extensão linear* ou *ordenação topológica* de uma ordem [24]).

Suponha agora que, para um determinado problema sobre um conjunto de atividades (um problema de otimização, por exemplo), ao invés de se definir que atividades começam antes de que atividades, fosse definido que atividades não são

executadas concorrentemente com que atividades. Então, a quantidade de escalonamentos que atendem ao problema passa a ser maior. Para perceber isto, note que podemos modelar este problema com um grafo G , associando cada tarefa a um vértice distinto e unindo dois vértices se as atividades associadas a eles *não são* executadas concorrentemente. Se A e B são atividades que não são executadas concorrentemente, então ou A é executada antes de B ou vice-versa. Pela observação anterior de que o seqüenciamento de atividades é transitivo, se o problema admite uma solução, então G é um grafo de comparabilidade e cada orientação transitiva de G (ou, equivalentemente, cada ordem induzida por esta orientação) é uma configuração de escalonamento a ser considerada para a solução do problema.

Note que um problema pode ser modelado por um grafo de comparabilidade se e somente se puder ser modelado por um grafo de cocomparabilidade. Como exemplo, na versão “cocomparabilidade” do problema anterior, modelamos com uma aresta as atividades que *são* executadas concorrentemente. Neste sentido, os grafos de cocomparabilidade têm tanta importância quanto os grafos de comparabilidade.

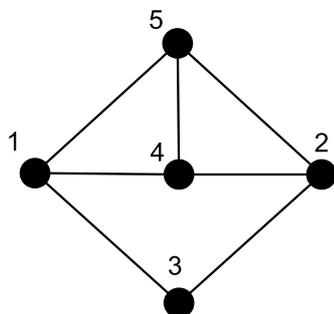


Figura 2.4: Exemplo de um grafo que é de função e de fitas.

Um *modelo de função* é um modelo nos quais as figuras são *linhas de função*. Uma *linha de função* f é um segmento contínuo de curva tal que se (x, y) e (x', y) são pontos de f , então $x = x'$. Um *modelo de fitas* é um modelo nos quais as figuras são *fitas*. Uma *fita* F é a região compreendida entre duas linhas de função que não se intersectam e as retas L_1 e L_2 . Um grafo é dito ser *grafo de função* se ele é o grafo de interseção de um modelo de função. Analogamente, um grafo é dito

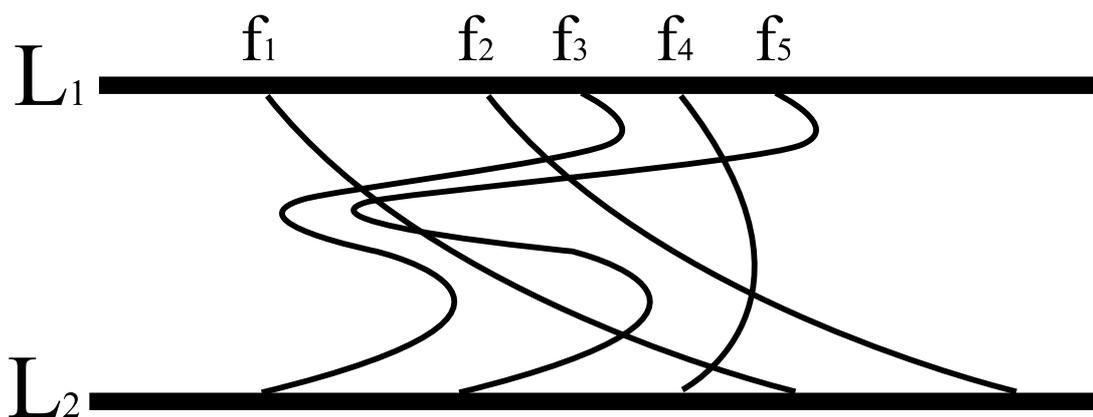


Figura 2.5: Exemplo de um modelo de função do grafo da figura 2.4.

ser *grafo de fitas* se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas. Na figura 2.4 temos um grafo de função e de fitas, cujos respectivos modelos encontramos nas figuras 2.5 e 2.6.

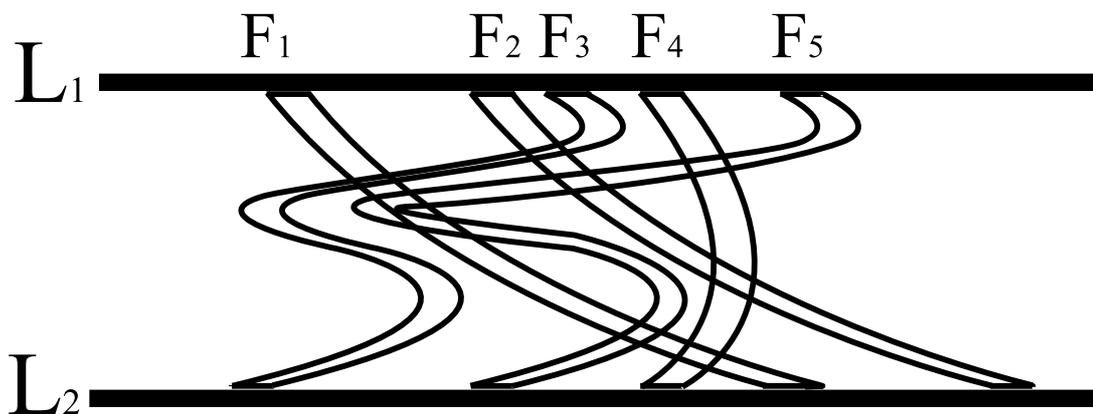


Figura 2.6: Exemplo de um modelo de fitas do grafo da figura 2.4.

Segue então uma caracterização dos grafos de cocomparabilidade, a primeira caracterização deste trabalho, e que motiva o estudo de grafos PI (Golumbic, Rotem, Uruttia em 1983 [19] e Golumbic, Lewenstein em 2000 [20]).

Teorema 2.1. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (1) G é um grafo de função.
- (2) G é um grafo de fitas.
- (3) G é um grafo de cocomparabilidade.

Demonstração. É fácil notar que (1) \implies (2), pela observação de que um grafo de função é um tipo particular de grafo de fitas, onde cada fita é degenerada (as linhas de função que a delimita são coincidentes). Vejamos as demais implicações. (2) \implies (3): Seja $\mathcal{R} = \{F_x \mid x \in V(G)\}$ um modelo de fitas de G . Seja F a seguinte orientação no grafo \overline{G} : $(x, y) \in F \iff F_x \ll F_y$. Como $(x, y) \in E(\overline{G}) \iff (F_x \ll F_y \text{ ou } F_x \gg F_y)$, então a orientação F está bem definida (i.e., todas as arestas de \overline{G} são orientadas e não ocorre de $(x, y), (y, x) \in F$). Além disso, como a relação de estar totalmente à esquerda é transitiva, então F orienta as arestas de \overline{G} transitivamente. Logo, G é um grafo de cocomparabilidade.

(3) \implies (1): Seja G um grafo de cocomparabilidade e P uma ordem induzida por alguma orientação transitiva de \overline{G} . Seja $\{P_1, \dots, P_t\}$ um realizador linear de P . Crie t retas horizontais paralelas e não-coincidentes, nomeadamente, as retas L_1, \dots, L_t , de cima para baixo. Em cada reta L_k , $1 \leq k \leq t$, disponha $|V(G)|$ pontos, um ponto associado a cada elemento distinto de $V(G)$, de modo que $x \ll y$ em $L_k \iff x \prec y$ em P_k . Agora, para todo $x \in V(G)$, seja f_x a linha de função criada ligando-se com um segmento de reta os pontos com rótulo x nas retas L_k e L_{k+1} , $1 \leq k < t$. Seja \mathcal{R} o modelo de função criado, considerando-se como L_1 e L_2 do modelo as retas L_1 e L_t construídas, respectivamente. Se $x \parallel y$ em P , então existem P_r e P_s tais que $x \prec_r y$ e $y \prec_s x$. Logo, as linhas de função f_x e f_y irão ter interseção em algum lugar entre as retas L_r e L_s . Se $x \prec y$ em P , então $x \ll y$ em qualquer reta L_k , $1 \leq k \leq t$. Conseqüentemente, $f_x \ll f_y$ em \mathcal{R} . Portanto, $f_x \parallel f_y$ em $\mathcal{R} \iff x \parallel y$ em $P \iff (x, y) \notin E(\overline{G}) \iff (x, y) \in E(G)$. Logo, \mathcal{R} é modelo de função de G . \square

Este teorema é uma interessante caracterização dos grafos de cocomparabilidade. Se G é um grafo de cocomparabilidade, então ele é o grafo de interseção

de um modelo de função e um modelo de fitas. Uma pergunta natural é que tipo de classe de grafos geráramos se restringíssemos os modelos de função ou de fitas. Naturalmente, classes assim geradas serão subclasses da classe dos grafos de cocomparabilidade.

2.3 Grafos de permutação

Um grafo G é um *grafo de permutação* se ele é o grafo de interseção de um modelo de função no qual todas as linhas de função são segmentos de retas. A este modelo damos o nome de *modelo de permutação*. Em outras palavras, G é um grafo de permutação se ele é um grafo de interseção de segmentos de retas com extremos em duas retas paralelas, horizontais e não-coincidentes.

O grafo de permutação recebe este nome devido a uma maneira equivalente de defini-lo, em termos de permutações. Se G é um grafo de permutação, então existe uma rotulação $V(G) = \{1, \dots, n\}$ do conjunto de vértices e uma permutação $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ dos números de 1 a n , tais que $(i, j) \in E(G) \iff i < j$ e $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j)$ ou $i > j$ e $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$.

A classe de grafos de permutação possui reconhecimento polinomial. Existem diversas abordagens utilizadas para reconhecê-lo. A mais conhecida utiliza a seguinte caracterização.

Teorema 2.2 (Pnueli, Lempel, Even em 1971). *Um grafo G é um grafo de permutação se e somente se G e \bar{G} forem transitivamente orientáveis.*

Em [18] encontra-se a demonstração deste teorema e uma maneira de se obter uma orientação transitiva de um grafo. Uma abordagem mais atual e que possui tempo ótimo $O(n + m)$, sendo n o número de vértices e m o número de arestas, é a abordagem de McConnell e Spinrad [29, 30].

Grafos de permutação possuem muitas aplicações práticas. Uma bem interessante, no universo computacional, é a de auxiliar a tarefa de realocação de programas na memória [23]. Suponha que, em um dado momento, existam n processos

em memória tal que o primeiro endereço de memória do i -ésimo processo seja x_i . Com certa frequência, os processos informam uma nova quantidade de memória contígua que necessitam, que deve então ser atendida pelo sistema operacional com a restrição de que a nova disposição dos processos na memória não altere a ordem relativa entre eles. Suponha ainda que seja associado um custo fixo w_i para realocar o i -ésimo processo de x_i para uma nova posição de memória, independente da distância realocada. Seja l_i a quantidade corrente de memória solicitada pelo processo i . O problema consiste em encontrar quais processos devem ser realocados minimizando o custo.

Podemos modelar este problema da seguinte maneira. Considere, sem perda de generalidade, que os processos estão numerados em ordem crescente de x_i . Crie um grafo G , associe um vértice para cada processo e uma dois vértices i e j se os processos i e j podem permanecer em suas posições, observando-se a quantidade de memória solicitada por cada um deles e pelos processos alocados entre eles. Em outras palavras, $(i, j) \in E(G) \iff \sum_{k=i}^{j-1} l_k \leq x_j - x_i$. Uma clique máxima de G (máxima em relação aos pesos w_i) equivale ao conjunto de processos que são mutuamente não conflitantes em termo de espaço que ocupam e posições iniciais, e que possuem o maior custo de realocação. Neste caso, a solução de custo mínimo é realocar os demais processos associados aos vértices que não estão na clique máxima de G .

Seja F uma orientação de G tal que $(i, j) \in F \iff (i, j) \in E(G)$ e $i < j$. Se $(i, j) \in F$ e $(j, z) \in F$, então $(i, j) \in E(G)$, $(j, z) \in E(G)$ e $i < j < z$. Logo, $\sum_{k=i}^{j-1} l_k \leq x_j - x_i$ e $\sum_{k=j}^{z-1} l_k \leq x_z - x_j$. Somando-se as desigualdades, temos que $\sum_{k=i}^{z-1} l_k \leq x_z - x_i$, de onde concluímos que $(i, z) \in E(G)$. Como $i < z$, então $(i, z) \in F$. Portanto, F é uma orientação transitiva para G . Por um raciocínio análogo, chegamos a conclusão de que a orientação \bar{F} definida por $(i, j) \in \bar{F} \iff (i, j) \in E(\bar{G})$ e $i < j$ é uma orientação transitiva para \bar{G} . Pelo teorema 2.2, G é um grafo de permutação.

2.4 Grafos de intervalos

Um grafo G é um *grafo de intervalos* se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas no qual todas as fitas são retângulos. Se R_1 e R_2 são dois retângulos num modelo, como R_1 têm interseção com $R_2 \iff t(R_1)$ têm interseção com $t(R_2)$, então podemos dispensar a reta L_2 do modelo sem perder seu poder de expressão. Em outras palavras, G é um grafo de intervalos se ele é o grafo de interseção de intervalos numa reta. Este último modelo é chamado de *modelo de intervalos*.

São conhecidos muitos métodos eficientes de reconhecimento da classe dos grafos de intervalos. O primeiro deles, com tempo ótimo de $O(n + m)$, pode ser encontrada em Booth e Lueker [4].

Grafos de intervalos são importantes pelas suas aplicações em problemas de escalonamento, microbiologia e muitas outras áreas [18]. Por exemplo, suponha que várias reuniões são marcadas com horário de início e fim em uma dada empresa e precisamos atribuir a cada reunião uma sala para sua realização, tal que a duas reuniões que tenham conflito de horário sejam atribuídas salas distintas e que o número total de salas utilizadas seja mínimo. Se modelarmos este problema com um grafo G , associando um vértice de G para cada reunião e unindo dois vértices se as reuniões correspondentes possuem interseção de horário, então o número mínimo de salas é precisamente o número cromático de G . Por construção, G é um grafo de intervalos.

As classes de grafos de intervalos e grafos de permutação são incomparáveis. Por uma análise de casos, podemos concluir que o grafo C_4 não é um grafo de intervalos. Porém, ele é grafo de permutação (vide figura 2.7). Já o grafo da figura 2.8 é um grafo de intervalos, porém não é um grafo de permutação (não se consegue orientar transitivamente suas arestas). Por último, o grafo trivial claramente pertence a ambas as classes.

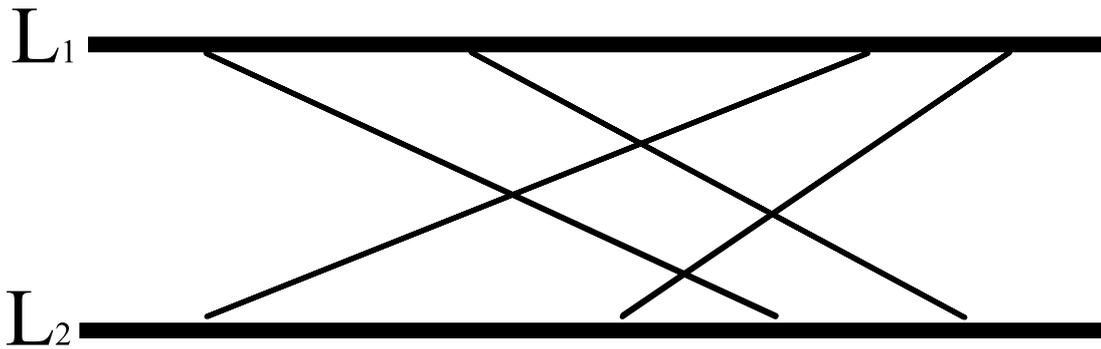


Figura 2.7: Modelo de permutação do grafo C_4 .

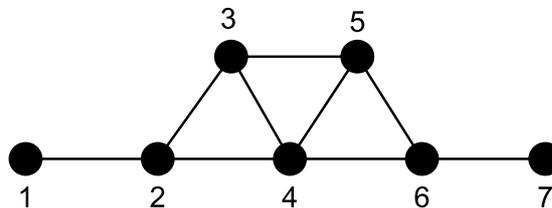


Figura 2.8: Grafo de intervalos que não é um grafo de permutação.

2.5 Grafos PI

Um grafo G é um *grafo PI* se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas no qual todas as fitas são triângulos tais que L_2 contenha dois vértices de cada triângulo. Este modelo é chamado de *modelo PI*. Em outras palavras, G é um grafo PI se ele é um grafo de interseção de triângulos com um vértice pertencente a uma reta horizontal e os outros dois vértices pertencentes a uma segunda reta paralela, não-coincidente e abaixo da primeira.

A definição da classe de grafos PI apareceu pela primeira vez no trabalho de Corneil e Kamula em 1987 [9], onde eles estudaram generalizações das classes de grafos de intervalos e grafos de permutação. De fato, todo grafo de permutação é um grafo PI, pois um modelo de permutação é um tipo particular de modelo PI, no qual cada base de triângulo é degenerada e constitui-se de um ponto. O

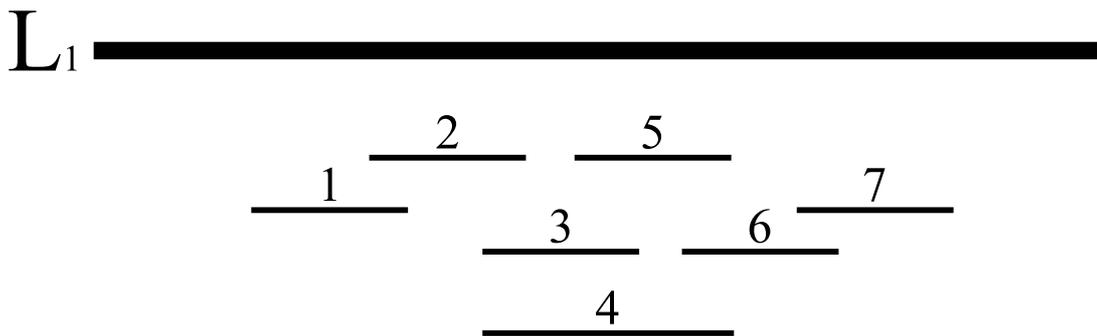


Figura 2.9: Modelo de intervalos do grafo da figura 2.8.

teorema seguinte mostra que a classe de grafos PI também generaliza a classe de grafos de intervalos.

Teorema 2.3. *Todo grafo de intervalos é um grafo PI.*

Demonstração. Seja G um grafo de intervalos com modelo $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in V(G)\}$. Agora, seja $\mathcal{R}' = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ um modelo PI tal que $b(T_x) = I_x$ e $t(T_x)$ e $e(I_x)$ tenham a mesma abscissa, para todo $x \in V(G)$. Por construção, podemos concluir que $T_x \parallel T_y \iff b(T_x) \parallel b(T_y) \iff (x, y) \in E(G)$. Logo, \mathcal{R}' é um modelo PI de G . \square

Na prova anterior, usou-se $t(T_x) = e(I_x)$ como critério da escolha de $t(T_x)$. Porém, note que qualquer ponto no intervalo $[e(I_x), d(I_x)]$ serviria como escolha de $t(T_x)$, para todo $x \in V(G)$.

A inclusão das classes de grafos de intervalos e grafos de permutação na classe de grafos PI é estrita. O grafo da figura 2.10 pertence à classe de grafos PI e não pertence a nenhuma das duas classes, pois possui um C_4 induzido (proibido para um grafo de intervalos) e não se consegue orientar suas arestas transitivamente (condição necessária para um grafo de permutação).

O reconhecimento eficiente da classe de grafos PI é um problema em aberto, conforme mencionado por Brandstädt [6, 5] e Spinrad [34]. Caracterizações e reconhecimento da classe de grafos PI é o que trataremos nos capítulos 4 e 5. Uma das

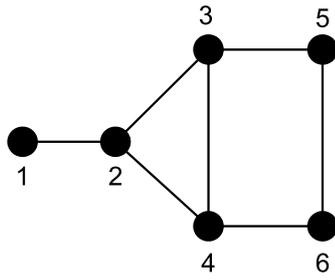


Figura 2.10: Grafo PI que não é de permutação nem de intervalos.

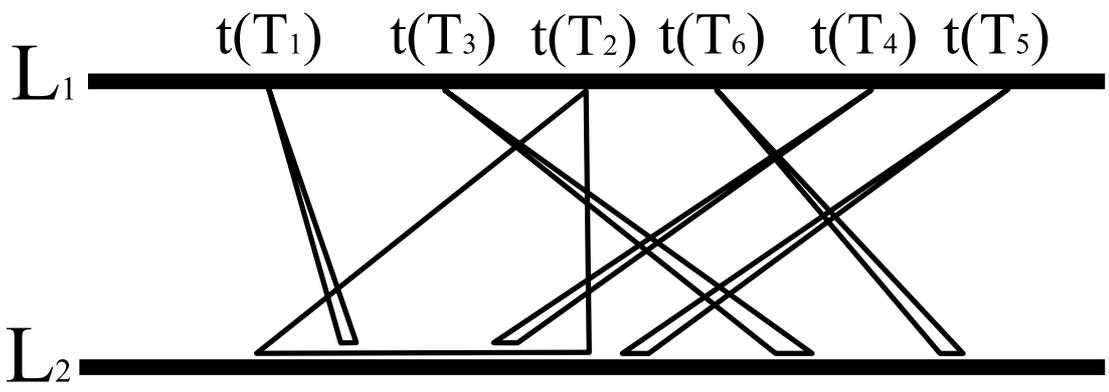


Figura 2.11: Modelo PI do grafo da figura 2.10.

contribuições deste trabalho é definir uma conjectura que, se verdadeira, produz um algoritmo eficiente para o reconhecimento desta classe.

2.6 Grafos PI^*

Um grafo G é um *grafo PI^** se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas no qual todas as fitas são triângulos tais que cada um dos triângulos possui dois vértices pertencentes ou a L_1 , ou a L_2 . Chamamos este modelo de *modelo PI^** . Em outras palavras, G é um grafo PI^* se ele é o grafo de interseção de triângulos entre duas retas paralelas e não-coincidentes de forma que, para cada triângulo, um vértice pertence a uma reta e os outros dois vértices pertencem à outra.

Note que como todo modelo PI é, em particular, um modelo PI*, então a classe de grafos PI está incluída na classe de grafos PI*. Porém, esta inclusão é estrita, pois o grafo da figura 2.12 é um grafo PI* mas não é um grafo PI [9].

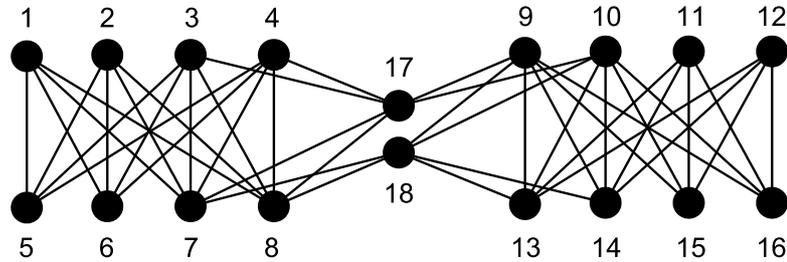


Figura 2.12: Grafo PI* que não é um grafo PI.

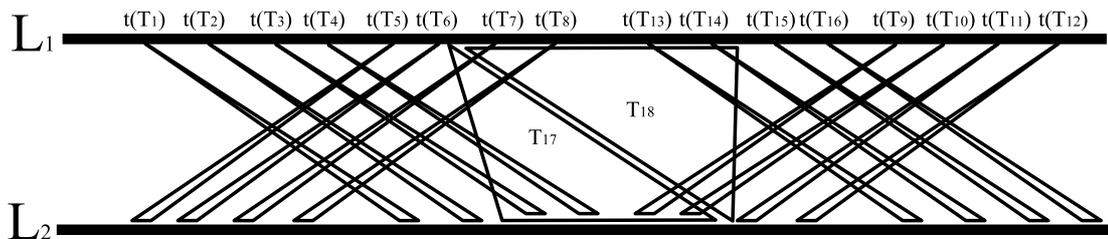


Figura 2.13: Modelo PI* do grafo da figura 2.12.

O problema do reconhecimento da classe de grafos PI* também está em aberto [6].

2.7 Grafos de trapézios simples

Um grafo G é um *grafo de trapézios simples* se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas no qual todas as fitas são segmentos de retas ou retângulos com um par de lados paralelos apoiados em L_1 e L_2 . Este modelo é chamado de *modelo de trapézios simples*. Em outras palavras, G é um grafo de trapézios simples se ele é o grafo de interseção de segmentos de retas e retângulos entre duas retas paralelas, horizontais e não coincidentes com as extremidades dos segmentos e um par de lados paralelos dos retângulos pertencentes a estas retas.

A classe de grafos de trapézios simples também possui o problema de reconhecimento em aberto [26]. Pela definição desta classe, note que tanto um modelo de permutação quanto um modelo de intervalos são tipos particulares de um modelo de trapézios simples, no qual é permitido respectivamente somente segmentos de retas e somente retângulos. Logo, as classes de grafos de permutação e grafos de intervalos são subclasses da classe de grafos de trapézios simples. No entanto, esta inclusão é estrita. O grafo da figura 2.10, que como vimos não é um grafo de permutação nem um grafo de intervalos, mas é um grafo de trapézios simples.

As classes de grafos PI e grafos PI* são classes incomparáveis com a classe de grafos de trapézios simples. A figura 2.16 mostra um grafo PI e, por conseqüência, um grafo PI*, que não é um grafo de trapézios simples [26]. Na figura 2.17, encontra-se um esquema de formação do modelo PI (modelo PI*) para o grafo da figura 2.16. O modelo (b) é formado da seguinte maneira. Substitua cada quadrilátero que forma o “X” em (b) pelos triângulos de (a). Um quadrilátero será substituído por triângulos que modelam os vértices de 1 a 7 e o outro será substituído por triângulos que modelam os vértices de 8 a 14, de tal forma que o primeiro possua a ordem $t(T_1), t(T_2), t(T_3), t(T_7), t(T_4), t(T_5), t(T_6)$ dos topos e o outro possua a ordem $t(T_8), t(T_9), t(T_{10}), t(T_{14}), t(T_{11}), t(T_{12}), t(T_{13})$, conforme esquematizado em (b).

A figura 2.14 mostra um grafo de trapézios simples, com modelo de trapézios simples exibido na figura 2.15, porém este grafo não é um grafo PI, conforme observado por Lin em 2002 [26]. Podemos estender seu resultado, e mostrar que este mesmo grafo apresentado também não é um grafo PI*, como estabelece o teorema 2.5. Antes, porém, enunciaremos o lema 3.1 do artigo de Lin [26], numa versão menos geral, mas de acordo com nosso propósito de provar o teorema 2.5.

Lema 2.4 (Lin em 2002). *Sejam G um grafo PI* e $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ um modelo PI* de G . Sejam $v_1, \dots, v_6 \in V(G)$, tais que o subgrafo induzido por eles forme um $K_{3,3}$ com partição $\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\}$. Sejam T_M e T'_M os triângulos do meio em relação aos triângulos $T_{v_1}, T_{v_2}, T_{v_3}$ e $T_{v_4}, T_{v_5}, T_{v_6}$, respectivamente,*

em \mathcal{R} . Então, (i) $t(T_M) \ll t(T'_M)$ ou $t(T'_M) \ll t(T_M)$; (ii) $b(T_M) \ll b(T'_M)$ ou $b(T'_M) \ll b(T_M)$.

Teorema 2.5. *O grafo da figura 2.14 não é um grafo PI^* .*

Demonstração. Suponha, com o propósito de encontrar um absurdo, que $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ seja um modelo PI^* de G , grafo da figura 2.14. Como 1, 6, 13, 10, 9 forma um caminho induzido de G , então o único arranjo possível é tal que $T_1 \ll T_{13} \ll T_9$ ou $T_9 \ll T_{13} \ll T_1$. Considere, sem perda de generalidade, que $T_1 \ll T_{13} \ll T_9$ (caso contrário, reflita horizontalmente \mathcal{R}). Sejam b_1, t_1, b_2, t_2 os seguintes pontos: $b_1 = \max\{d(b(T_i)) \mid 1 \leq i \leq 6\}$, $b_2 = \min\{e(b(T_i)) \mid 7 \leq i \leq 12\}$, $t_1 = \max\{d(t(T_i)) \mid 1 \leq i \leq 6\}$ e $t_2 = \min\{e(t(T_i)) \mid 7 \leq i \leq 12\}$.

Como $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}$ forma um subgrafo bipartido de G , então pelo lema 2.4, $t(T_M) \ll t(T'_M)$ ou $t(T'_M) \ll t(T_M)$, onde T_M e T'_M são os triângulos do meio de cada parte da partição em \mathcal{R} . Sejam T'_1, T'_2, T'_3 uma rotulação dos triângulos T_1, T_2, T_3 e T'_4, T'_5, T'_6 uma rotulação dos triângulos T_4, T_5, T_6 tais que $T'_1 \ll T'_2 \ll T'_3$, $T'_4 \ll T'_5 \ll T'_6$ e $t(T'_2) \ll t(T'_5)$. Como o vértice associado a T'_2 é adjacente ao vértice associado a T'_5 , e novamente pelo lema 2.4, temos que $b(T'_5) \ll b(T'_2)$. Note agora que $T'_1 \ll T'_2$, $T'_5 \ll T'_6$ e o vértice associado a T'_1 é adjacente ao vértice associado a T'_6 . Logo, podemos inferir o seguinte posicionamento: $b(T'_4) \ll b(T'_5) \ll d(b(T'_1)) \ll b(T'_2) \ll b(T'_3)$. Como o vértice associado a T'_4 ou T'_5 é adjacente ao vértice 13 e o vértice associado ou a T'_1 , ou a T'_2 , ou a T'_3 não é adjacente ao vértice 13, então o intervalo $b(T_{13})$ não consegue ter interseção com todos os intervalos $b(T_2), b(T_3), b(T_5)$ e $b(T_6)$. Por um raciocínio análogo, concluímos que $t(T_{13})$ não consegue ter interseção com todos os intervalos $t(T_2), t(T_3), t(T_5)$ e $t(T_6)$. Logo, $e(b(T_{13})) \ll b_1$ e $e(t(T_{13})) \ll t_1$. Agora, por um raciocínio simétrico, concluímos que $d(b(T_{13})) \gg b_2$ e que $d(t(T_{13})) \gg t_2$.

Como nenhum vértice do conjunto $\{1, \dots, 6\}$ é adjacente a um vértice do conjunto $\{7, \dots, 12\}$, e como $T_1 \ll T_9$, então podemos inferir que $T_i \ll T_j$, para todo $1 \leq i \leq 6, 7 \leq j \leq 12$. Logo, $b_1 \ll b_2$ e $t_1 \ll t_2$. Logo, $t(T_{13})$ e $b(T_{13})$ são intervalos

não-triviais. Contradição com o fato de T_{13} ser um triângulo. Logo, o grafo da figura 2.14 não é um grafo PI^* . \square

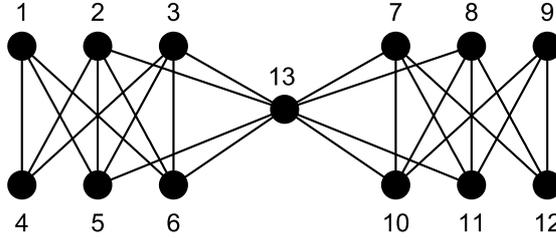


Figura 2.14: Grafo de trapézios simples que não é PI^* (portanto, nem PI).

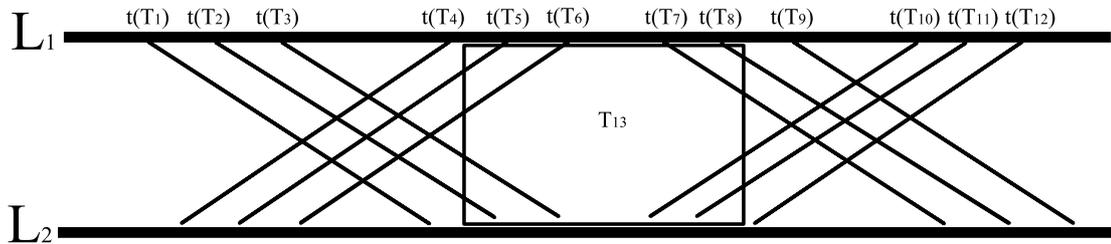


Figura 2.15: Modelo de trapézios simples da figura 2.14.

2.8 Grafos de paralelogramos

Um grafo G é um *grafo de paralelogramos* se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas no qual todas as fitas são paralelogramos com um par de lados paralelos apoiados em L_1 e L_2 . Chamamos este modelo de *modelo de paralelogramos*. Em outras palavras, G é um grafo de paralelogramos se ele é o grafo de interseção de paralelogramos com um par de lados paralelos apoiados em duas retas paralelas horizontais e não-coincidentes.

A classe de grafos de paralelogramos possui reconhecimento em aberto [6]. Note que a classe de grafos de paralelogramos generaliza a classe de grafos de trapézios simples, pois um modelo de trapézios simples é um tipo particular de modelo de

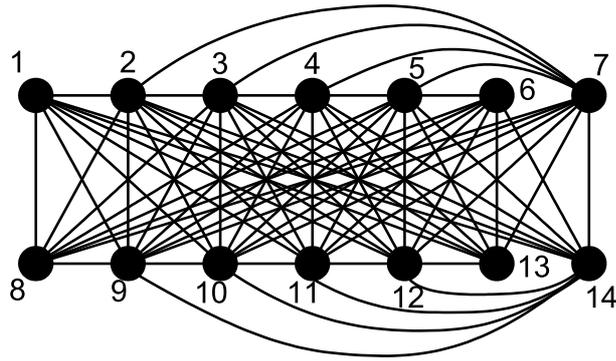


Figura 2.16: Grafo PI (grafo PI*) que não é um grafo de trapézios simples.

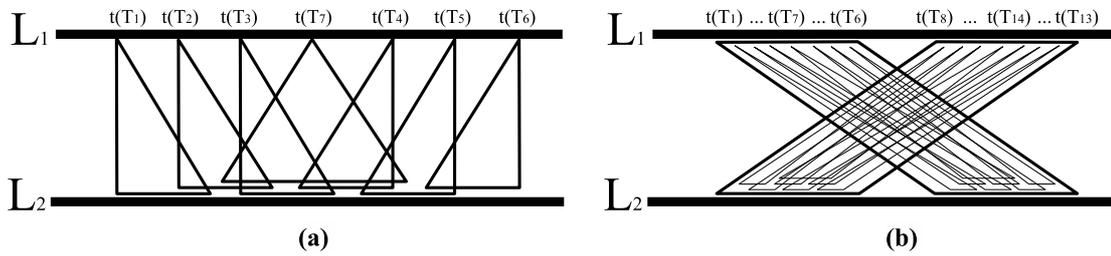


Figura 2.17: Modelo PI da figura 2.16.

paralelogramos, no qual os paralelogramos ou são retângulos ou possuem base e topo degenerados constituídos de pontos. Além disso, a classe de grafos de paralelogramos também generaliza a classe de grafos PI [26].

Teorema 2.6. *A classe de grafos de paralelogramos inclui propriamente as classes de grafos PI e grafos de trapézios simples.*

Demonstração. Como as classes de grafos PI e grafos de trapézios simples são distintas e a classe de grafos de paralelogramos generaliza ambas, segue o resultado. \square

2.9 Grafos de trapézios

Um grafo G é um *grafo de trapézios* se ele é o grafo de interseção de um modelo de fitas no qual todas as fitas são trapézios com um par de lados paralelos apoiados

em L_1 e L_2 . Este modelo é chamado de *modelo de trapézios*. Em outras palavras, G é um grafo de trapézios se ele é o grafo de interseção de trapézios com os lados paralelos apoiados em duas retas paralelas, horizontais e não coincidentes.

Grafos de trapézios foram definidos por Corneil e Kamula em 1987 [9], com o nome de grafos II (Interval-Interval), durante o estudo de generalizações das classes de grafos de permutação e de grafos de intervalos e, de maneira independente, por Dagan, Golumbic e Pinter em 1988 [11], em conexão com um problema prático de desenho em circuitos VLSI, descrito a seguir.

No *problema de roteamento de canais* em circuitos VLSI [11], temos duas retas horizontais, cada uma chamada de *canal*, e vários pontos com uma numeração ou *rótulo* ao longo de cada canal, chamados de *terminais*. Cada rótulo distinto existente aparece ao menos uma vez em ambas as retas horizontais. O conjunto de terminais com o mesmo rótulo constitui uma *rede*. O problema então é fazer um desenho no circuito VLSI de ligações entre terminais de tal forma que existe um caminho entre dois terminais se e somente se eles pertencerem a uma mesma rede. É claro que nem sempre este trabalho é possível, se consideramos apenas uma camada de circuito. Portanto, uma versão mais interessante do problema é considerar qual o número mínimo de camadas de circuitos para que cada rede esteja numa mesma camada e em cada camada as redes não tenham interseção.

Podemos modelar este problema utilizando grafos de trapézios, da seguinte forma: associa-se um trapézio para cada rótulo, tal que os vértices do trapézio associado ao rótulo n estão na posição dos terminais com rótulo n mais à esquerda e mais à direita em cada reta horizontal; pode-se mostrar então que duas redes podem ser interligadas sem interseção numa mesma camada se e somente se seus trapézios associados não tiverem interseção [11]. Por isso, o número mínimo de camadas é igual ao número cromático do grafo de trapézios associado ao modelo destes trapézios construídos.

Em [11], é apresentado um algoritmo para achar o número cromático de grafos de trapézios com complexidade $O(nk)$, onde k é o número cromático e n o número

de vértices. Mais tarde, Felsner et al. em 1994 [16] desenvolveram um algoritmo $O(nlgn)$ para este problema.

Três grupos de autores resolveram independentemente o problema de reconhecimento de grafo de trapézios. A mais rápida das abordagens, com complexidade $O(n^2)$ (sendo n o número de vértices do grafo), é devido a Ma e Spinrad em 1994 [27]. Eles mostram uma redução da questão de determinar dimensão intervalar no máximo 2 (o qual veremos no capítulo 3 ser equivalente ao problema de reconhecer a classe de grafos de trapézios) ao problema de cobrir um grafo bipartido associado por grafos cadeia (grafos sem $2K_2$ induzidos). Outra abordagem, de Cheah e Corneil de 1990 [8], reduz o problema de reconhecer um grafo de trapézios ao de reconhecer um tipo particular de grafo de permutação associado e tem complexidade $O(n^3)$. Apresentaremos no capítulo 3 a abordagem de Felsner, Habib e Möhring em 1994 [15] e Langley em 1995 [25].

Como um modelo de paralelogramos é um tipo particular de modelo de trapézios, a classe de grafos de paralelogramos está incluída na classe de grafos de trapézios. No entanto, esta inclusão é estrita, pois o grafo da figura 2.18 é um exemplo de grafo que é um grafo de trapézios mas não é um grafo de paralelogramos [14]. A classe de grafos de trapézios está propriamente contida na classe de grafos de cocomparabilidade, pois o grafo $\overline{C_6}$ é um grafo de cocomparabilidade mas não é um grafo de trapézios [21]. Em particular, na figura 2.21 temos um modelo de função do grafo $\overline{C_6}$.

2.10 Resumo

A classe dos grafos de comparabilidade e cocomparabilidade reúnem grafos com muitas aplicações práticas. Além disso, a ligação destas classes com ordens é muito estrita, e por isso, grafos destas classes têm muita importância teórica.

O teorema 2.1 traz um ponto de vista interessante sobre a classe de grafos de cocomparabilidade. Esta caracterização estabelece que a classe de grafos de interseção de funções ou fitas entre duas retas paralelas é igual a classe de grafos

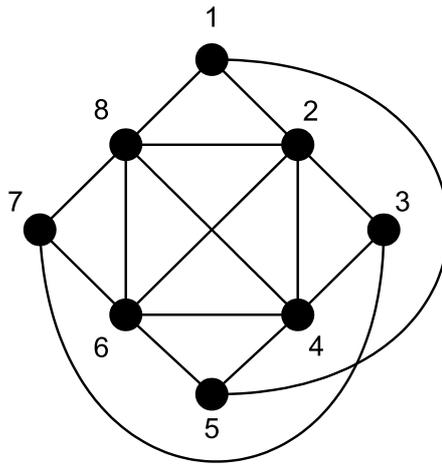


Figura 2.18: Grafo de trapézios que não é de paralelogramos (grafo de Felsner).

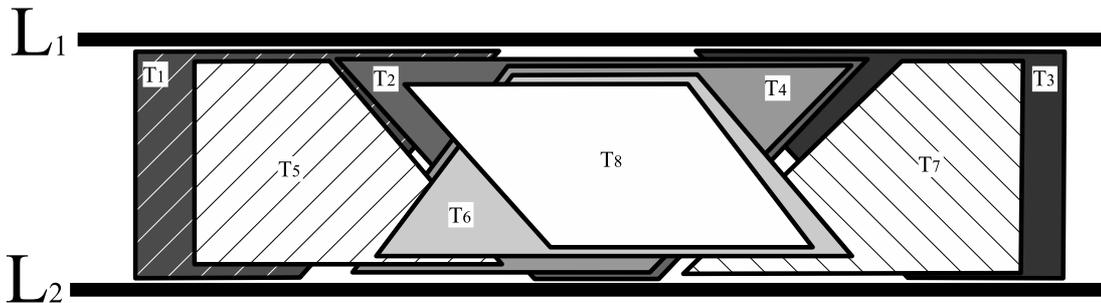


Figura 2.19: Modelo de trapézios do grafo da figura 2.18.

de cocomparabilidade. Assim, alternativamente, podemos estudar esta classe sob um aspecto geométrico e usar ferramentas da teoria de grafos de interseção. Interessantemente, a abordagem natural de estabelecer restrições na representação destas funções ou fitas no modelo e verificar que tipos de subclasses são geradas nos leva a redefinir classes de grafos já estudadas de longa data (como as classes de grafos de intervalos e grafos de permutação) e classes distintas mais recentes, como as classes de grafos PI, grafos PI*, grafos de trapézios simples, grafos de paralelogramos e grafos de trapézios.

A figura 2.22 mostra a hierarquia sob inclusão entre estas classes, onde uma figura associada a uma relação de inclusão representa um grafo de separação entre

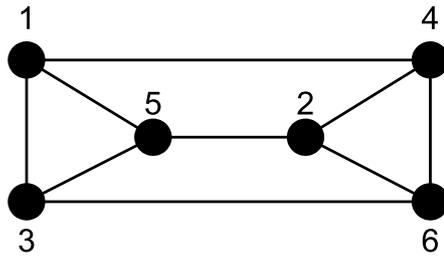


Figura 2.20: Grafo de cocomparabilidade que não é de trapézios (isomorfo a $\overline{C_6}$).

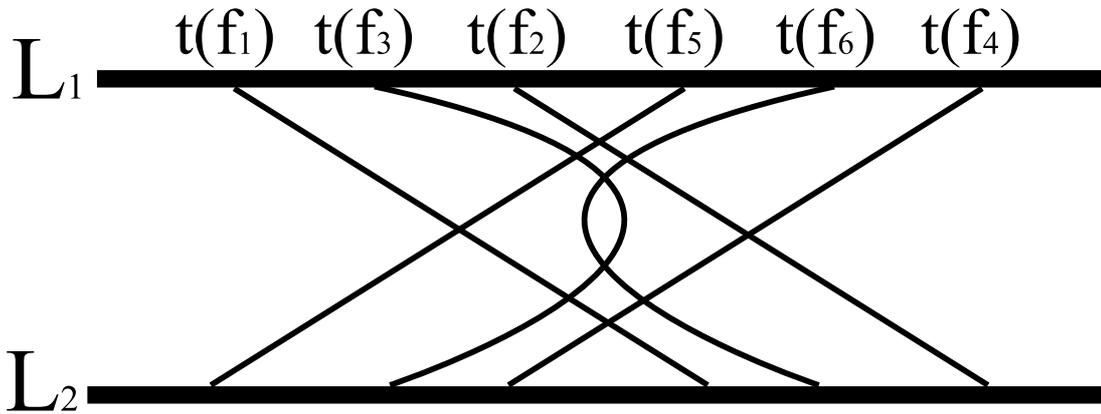


Figura 2.21: Modelo de função do grafo da figura 2.20.

as classes relacionadas. As classes hachuradas são as que possuem reconhecimento eficiente, enquanto para as demais o problema está em aberto.

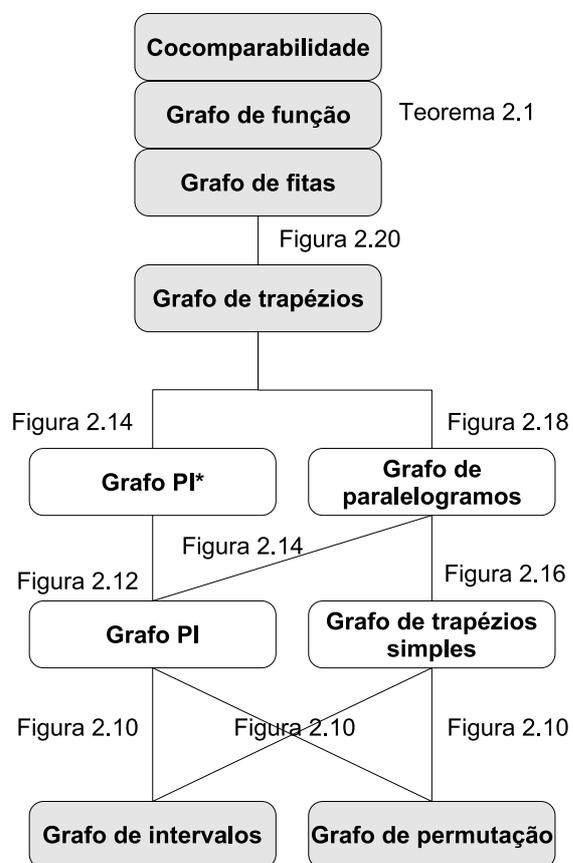


Figura 2.22: Hierarquia conhecida de inclusão entre as classes.

$INTERVALOS \subset PI$
 $INTERVALOS \subset TRAPÉZIOS \text{ SIMPLES}$
 $PERMUTAÇÃO \subset PI$
 $PERMUTAÇÃO \subset TRAPÉZIOS \text{ SIMPLES}$
 $PI \subset PI^* \subset TRAPÉZIOS$
 $PI \subset PARALELOGRAMOS$
 $TRAPÉZIOS \text{ SIMPLES} \subset PARALELOGRAMOS$
 $PARALELOGRAMOS \subset TRAPÉZIOS \subset COCOMPARABILIDADE$
 $FITAS = FUNÇÃO = COCOMPARABILIDADE$

Capítulo 3

Caracterização e reconhecimento de grafos de trapézios

Como vimos no capítulo 2, a classe de grafos de trapézios é uma classe que generaliza a classe de grafos PI. Um grafo G é um grafo de trapézios se ele é grafo de interseção de trapézios com o par de lados paralelos apoiados em duas retas paralelas, horizontais e não coincidentes. Numa versão pelo enfoque de ordens, uma ordem $P = (X, \prec)$ é dita ser uma *ordem de trapézios* se podemos associar a P um modelo de trapézios no qual $T_x \ll T_y$ se e somente se $x \prec y$. Conforme foi dito na seção 2.9, três grupos de autores resolveram o problema de reconhecimento de grafo de trapézios independentemente. A abordagem que é apresentada neste capítulo é a abordagem de Felsner, Habib e Möhring em 1994 [15] e Langley em 1995 [25], por ser mais simples e por ter as ordens e suas dimensões como principais ferramentas, que serão muito usadas nos capítulos 4 e 5, os quais nos dedicamos a caracterizações de grafos PI.

Seja G um grafo. Se \overline{G} não for orientável transitivamente, então G não é um grafo de cocomparabilidade, e portanto, G não é um grafo de trapézios. Caso contrário, seja F uma orientação transitiva de \overline{G} e P a ordem induzida por F .

Como veremos adiante (teorema 3.2), ser ordem de trapézios é uma invariante de comparabilidade, e portanto G é um grafo de trapézios $\iff P$ é uma ordem de trapézios.

No capítulo 1, vimos que $L = \{P_1, \dots, P_k\}$ é um realizador de uma ordem P se $P = \bigcap_{i=1..k} P_i$. Além disso, L é um realizador linear (intervalar) se cada membro de L é uma extensão linear (intervalar) de P . A dimensão linear (intervalar) de P , denotada por $\dim(P)$ ($\text{idim}(P)$), é o menor k para o qual P tem um realizador linear (intervalar) com k elementos.

Segue uma caracterização de ordem de trapézios em termos da sua dimensão intervalar.

Teorema 3.1 (Dagan, Golumbic e Pinter em 1988). *P é uma ordem de trapézios se e somente se $\text{idim}(P) \leq 2$.*

Demonstração. Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem de trapézios, com modelo de trapézios $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$. Sejam agora $\mathcal{R}_1 = \{I_x^1 \mid x \in X\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{I_x^2 \mid x \in X\}$ modelos de intervalos tais que $I_x^1 = t(T_x)$ e $I_x^2 = b(T_x)$, para todo $x \in X$, e $P_1 = (X, \prec_1)$ e $P_2 = (X, \prec_2)$ as ordens intervalares associadas a \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , respectivamente. Como $x \prec y \iff T_x \ll T_y \iff I_x^1 \ll I_y^1$ e $I_x^2 \ll I_y^2 \iff x \prec_1 y$ e $x \prec_2 y$, então $\{P_1, P_2\}$ é um realizador intervalar de P . Logo, $\text{idim}(P) \leq 2$.

Reciprocamente, suponha $\text{idim}(P) \leq 2$. Logo, existe um realizador intervalar $\{P_1, P_2\}$ de P . Sejam $\mathcal{R}_1 = \{I_x^1 \mid x \in X\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{I_x^2 \mid x \in X\}$ modelos de intervalos de P_1 e P_2 , respectivamente. Forme o modelo de trapézios $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$ tal que $t(T_x) = I_x^1$ e $b(T_x) = I_x^2$, para todo $x \in X$. Como $x \prec y \iff x \prec_1 y$ e $x \prec_2 y \iff I_x^1 \ll I_y^1$ e $I_x^2 \ll I_y^2 \iff T_x \ll T_y$, então \mathcal{R} é um modelo de trapézios de P . \square

O resultado seguinte é implicado pelo resultado de Habib, Kelly e Möhring de 1992 [22].

Teorema 3.2. *Ser ordem de trapézios é uma invariante de comparabilidade.*

Demonstração. Seja P uma ordem induzida por uma orientação transitiva F de um grafo G . Como a dimensão intervalar é uma invariante de comparabilidade [22], então P tem dimensão intervalar k , para qualquer F . Pelo teorema 3.1, P é uma ordem de trapézios $\iff k \leq 2$. Como k é fixo para qualquer F , então ou P é uma ordem de trapézios para qualquer F ou nenhum P o é, para qualquer F . Logo, ser ordem de trapézios é uma invariante de comparabilidade. \square

Dizemos que uma ordem $P = (X, \prec)$ pode ser *imersa* em \mathbb{R}^t se para cada $x \in X$ podemos associar uma tupla (x_1, \dots, x_t) tal que $x \prec y \iff x_i \leq y_i$, para todo $1 \leq i \leq t$, e existe $1 \leq j \leq t$ tal que $x_j < y_j$.

Teorema 3.3 (Dushnik e Miller em 1941). *Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem. Então, $\dim(P)$ é o menor t para o qual P pode ser imerso em \mathbb{R}^t .*

Demonstração. Vamos mostrar que podemos partir de um realizador com t elementos para compor uma imersão em \mathbb{R}^t e vice-versa.

Dado um realizador $L = \{P_1, \dots, P_t\}$ de P , podemos fazer uma imersão de P em \mathbb{R}^t associando uma tupla (x_1, \dots, x_t) para cada $x \in X$, onde x_i é a posição do elemento x na extensão linear P_i . Como $x \prec y \iff x_i < y_i$, $1 \leq i \leq t$, então as tuplas (x_1, \dots, x_t) , $x \in X$ formam uma imersão de P em \mathbb{R}^t .

Reciprocamente, considere uma imersão de P em \mathbb{R}^t que associa a cada elemento $x \in X$ a tupla (x_1, \dots, x_t) . Crie uma família de ordens $L = \{P_1, \dots, P_t\}$, $P_i = (X, \prec_i)$, $1 \leq i \leq t$, tal que $x \prec_i y \iff x_i < y_i$ ou $(x_i = y_i$ e $x_j < y_j$, onde j é a menor coordenada em que as tuplas diferem). Logo, P_i é o resultado da ordem sobre a projeção das tuplas no i -ésimo eixo coordenado, quebrando-se os empates pela primeira coordenada em que as tuplas diferem, para todo $1 \leq i \leq t$. Conseqüentemente, P_i é uma extensão linear sobre X , $1 \leq i \leq t$.

Assim, $x \prec y \iff x_i \leq y_i$, para todo $1 \leq i \leq t$ e existe $1 \leq j \leq t$ tal que $x_j < y_j \iff x \prec_i y$, para todo $1 \leq i \leq t$. Logo, L é um realizador de P . \square

O teorema 3.3 motiva o termo “dimensão de uma ordem”; a dimensão de uma ordem P é justamente o menor t para o qual P pode ser imerso em \mathbb{R}^t .

A idéia geral do reconhecimento será a seguinte. Seja P uma ordem. Na seção 3.1, apresentaremos uma definição da ordem auxiliar $B(P)$, resultado de uma transformação polinomial da ordem inicial P . Em seguida, utilizando outra ordem auxiliar $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$ definida na seção 3.2, mostraremos na seção 3.3 que $\text{idim}(P) = \text{dim}(B(P))$. Assim, um procedimento de reconhecimento será descrito na seção 3.4, que pode ser resumido da seguinte forma. Seja P uma ordem de trapézios. Pelo teorema 3.1, sabemos que P é uma ordem de trapézios se e somente se possuir dimensão intervalar no máximo 2. Como $\text{idim}(P) = \text{dim}(B(P))$, então P é uma ordem de trapézios se e somente se $B(P)$ possuir dimensão linear no máximo 2, o que pode ser reconhecido eficientemente.

3.1 A ordem $B(P)$

Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem. A ordem $B(P)$ é definida como segue. Para cada $x \in X$, sejam os seguintes subconjuntos de elementos de X :

- $L(x) = P^-(x)$
- $U(x) = \begin{cases} X & \text{se } P^+(x) = \emptyset \\ \bigcap_{z \in P^+(x)} P^-(z) & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Seja $M = \{L(x), U(x) \mid x \in X\}$. A ordem $B(P)$ é uma ordem sobre o conjunto M ordenado por inclusão de conjuntos, i.e., $B(P) = (M, \subset)$.

Por exemplo, considere a ordem P da figura 3.1 (a), representada pelo seu diagrama de Hasse.

A tabela 3.1 apresenta os conjuntos $L(x)$, $U(x)$, para todo $x \in X$. Logo, $M = \{a, b, c, d, e, f\}$, tal que $a = \emptyset$, $b = \{5\}$, $c = \{1, 5, 6, 8\}$, $d = \{1\}$, $e = \{1, 2, 4, 5\}$ e $f = X$. A figura 3.1 (b) mostra a ordem $B(P) = (M, \subset)$.

Passemos agora a verificar algumas propriedades dos conjuntos $L(x)$ e $U(x)$.

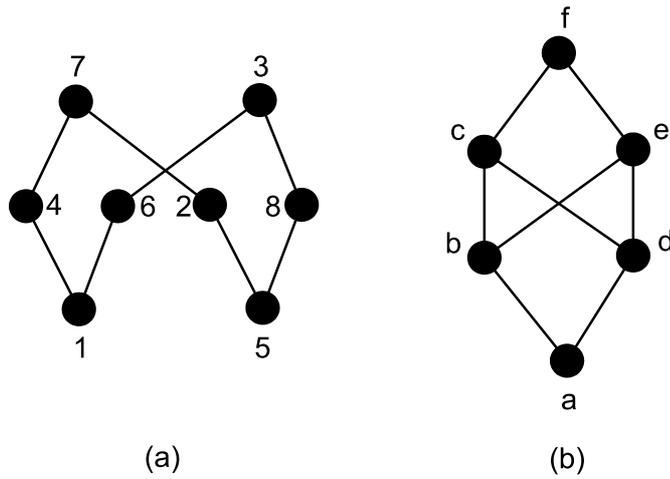


Figura 3.1: Ordem P e a ordem associada $B(P)$.

x	$L(x)$	$U(x)$
1	\emptyset	$\{1\}$
2	$\{5\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
3	$\{1, 5, 6, 8\}$	X
4	$\{1\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
5	\emptyset	$\{5\}$
6	$\{1\}$	$\{1, 5, 6, 8\}$
7	$\{1, 2, 4, 5\}$	X
8	$\{5\}$	$\{1, 5, 6, 8\}$

Tabela 3.1: Determinação dos conjuntos $L(x)$, $U(x)$, para todo $x \in X$

Lema 3.4. *São verdadeiras as seguintes propriedades.*

- (i) $x \in U(x)$
- (ii) $L(x) \subset U(x)$
- (iii) Se $x \prec y$, então $U(x) \subseteq L(y)$.

Demonstração. Provemos as propriedades.

- (i) Se $P^+(x) = \emptyset$, o resultado é imediato. Caso contrário, como $x \in P^-(z)$, para todo $z \in P^+(x)$, então $x \in U(x)$.

- (ii) Se $P^-(x) = \emptyset$, então $L(x) = \emptyset$. Como por (i) $x \in U(x)$, então o resultado é verdadeiro. Caso contrário, seja $y \in L(x)$. Logo, $y \prec x$. Como $y \prec z$, para todo $z \in P^+(x)$, então $y \in U(x)$. Conseqüentemente, $L(x) \subseteq U(x)$. Como $x \notin L(x)$ e, por (i), $x \in U(x)$, a inclusão é estrita.
- (iii) Se $x \prec y$, então $y \in P^+(x)$ e, conseqüentemente, $P^+(x) \neq \emptyset$. Logo, $U(x) = \bigcap_{z \in P^+(x)} P^-(z) \subseteq P^-(y) = L(y)$.

□

Proposição 3.5. *Se P é uma ordem, então $\text{idim}(P) \leq \text{dim}(B(P))$.*

Demonstração. Seja $P = (X, \prec)$. Primeiro vamos mostrar como converter uma extensão linear P_r de $B(P)$ em uma extensão intervalar I_r de P . Depois, vamos mostrar que se $\{P_1, \dots, P_k\}$ é um realizador linear de $B(P)$, então $\{I_1, \dots, I_k\}$ é um realizador intervalar de P , provando o resultado.

Seja $P_r = M_1 \prec_r \dots \prec_r M_t$ uma extensão linear de $B(P)$. Para cada $x \in X$, associe o intervalo aberto $I_r^x = (i, j)$, onde $M_i = L(x)$ e $M_j = U(x)$. Note que, pelo lema 3.4 (ii), cada intervalo tem tamanho não-vazio. Seja $I_r = (X, \prec'_r)$ a ordem intervalar associada ao modelo $\mathcal{R}_r = \{I_r^x \mid x \in X\}$. Pelo lema 3.4 (iii), $x \prec y \implies U(x) \subseteq L(y)$. Como $U(x) \subseteq L(y) \iff U(x) \prec_r L(y)$ ou $U(x) = L(y) \iff I_r^x \ll I_r^y \iff x \prec'_r y$, então I_r é uma extensão intervalar de P .

Agora, seja $\{P_1, \dots, P_k\}$ um realizador linear de $B(P)$ e I_i a ordem intervalar obtida da extensão linear P_i , $1 \leq i \leq k$, através do processo acima descrito. Como I_1, \dots, I_k são extensões intervalares de P , para provar que $\{I_1, \dots, I_k\}$ é um realizador intervalar de P , é suficiente mostrar que se $x \parallel y$, então $x \parallel y$ em $\bigcap_{i=1..k} I_i$. Suponha que $x \parallel y$ em P . Então $x \notin L(y)$. Pelo lema 3.4 (i), $x \in U(x)$, Logo, $U(x) \not\subseteq L(y)$. Portanto, existe um P_i , $1 \leq i \leq k$, tal que $U(x) \not\subseteq_i L(y)$ em P_i . Conseqüentemente, $x \not\prec'_i y$ em I_i . Por outro lado, $y \notin L(x)$. Pelo lema 3.4 (i), $y \in U(y)$, Logo, $U(y) \not\subseteq L(x)$. Portanto, existe um P_j , $1 \leq j \leq k$, tal que $U(y) \not\subseteq_j L(x)$ em P_j . Conseqüentemente, $y \not\prec'_j x$ em I_j . Logo, $x \parallel y$ em $\bigcap_{i=1..k} I_i$. □

Voltemos ao exemplo da ordem P dada anteriormente, e da sua ordem associada $B(P)$. Seja $L = \{P_1, P_2\}$ o seguinte realizador linear de $B(P)$: $P_1 = a \prec_1 b \prec_1 d \prec_1 c \prec_1 e \prec_1 f$ e $P_2 = a \prec_2 d \prec_2 b \prec_2 e \prec_2 c \prec_2 f$. Por sorte, temos que $\dim(B(P)) \leq 2$, e neste caso, a proposição 3.5 é suficiente para concluir que $\text{idim}(P) \leq 2$ e que, portanto, P é uma ordem de trapézios (teorema 3.1). Para exibir um modelo de trapézios de P , seguiremos os passos da prova anterior e da prova do teorema 3.1. Isto é, vamos construir os modelos de intervalos $\mathcal{R}_1 = \{I_1^x \mid x \in X\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{I_2^x \mid x \in X\}$ a partir de P_1 e P_2 , conforme a transformação descrita na prova anterior. Isto resulta na associação de intervalos dada na tabela 3.2. Como as extensões intervalares I_1 e I_2 associadas a \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , respectivamente, formam um realizador intervalar para P , então pela prova do teorema 3.1, podemos construir um modelo de trapézios para P tal que as bases e os topos dos trapézios associados a cada vértice são precisamente os intervalos associados a cada vértice em \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 . Seguindo esta transformação, obtemos o modelo de trapézios que foi usado de base para a construção do modelo apresentado na figura 2.19, onde foi feito alguns ajustes para tornar mais claro visualmente as comparabilidades entre os trapézios. Note que o grafo de incomparabilidade de P é o grafo de trapézios apresentado na figura 2.18.

x	I_1^x	I_2^x
1	(1, 3)	(1, 2)
2	(2, 5)	(3, 4)
3	(4, 6)	(5, 6)
4	(3, 5)	(2, 4)
5	(1, 2)	(1, 3)
6	(3, 4)	(2, 5)
7	(5, 6)	(4, 6)
8	(2, 4)	(3, 5)

Tabela 3.2: Modelos intervalares \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 obtidos de P_1 e P_2

3.2 A ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$

Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem e $I = \{I_1, \dots, I_t\}$ um realizador intervalar de P . Para cada $I_i = (X, \prec_i) \in I$, tome um modelo de intervalos \mathcal{I}_i , no qual (a_x^i, b_x^i) é o intervalo aberto associado a $x \in X$. Seja $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_k\}$.

Dado $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_k\}$ associado a P , o *cubo* associado ao elemento $x \in X$ é o espaço de \mathbb{R}^t definido pelo produtório de intervalos $\prod_{i=1..t} (a_x^i, b_x^i)$. A família de cubos \mathcal{I} associados a cada elemento é chamada de *imersão de cubos* de P em \mathbb{R}^t . Note que diferentes realizadores intervalares ou mesmo diferentes modelos de intervalos para um realizador podem gerar diferentes imersões de cubos de uma ordem. Cada cubo em \mathbb{R}^t é completamente determinado pelos seus pontos $l_x = (a_x^1, \dots, a_x^t)$ e $u_x = (b_x^1, \dots, b_x^t)$, chamados, respectivamente, de *ponto extremo inferior* e *ponto extremo superior*. Se r, s são pontos em \mathbb{R}^t , então escreveremos $r \leq s$ para denotar que cada componente de r é menor ou igual a respectiva componente de s .

Como I é um realizador intervalar de P , então $x \prec y \iff x \prec_i y$, para todo $1 \leq i \leq t \iff b_x^i \leq a_y^i$, para todo $1 \leq i \leq t \iff u_x \leq l_y$.

Seja $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ a ordem sobre o conjunto $\{l_x, u_x \mid x \in X\}$ e ordenado pela relação binária \leq de pontos em \mathbb{R}^t definida anteriormente. Note que, assim como a ordem $B(P)$, a ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ tem no máximo $2|X|$ elementos.

Na figura 3.2 temos um exemplo de uma imersão de cubos \mathcal{I} da ordem P dada na figura 3.1 (a) e sua ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ associada. Para verificar que de fato a figura exhibe uma imersão de cubos válida, projete os cubos nos eixos coordenados e obtenha os modelos de intervalo \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 . Obtenha de cada modelo a ordem intervalar I_1 e I_2 associada, e verifique que de fato $I = \{I_1, I_2\}$ é um realizador intervalar de P .

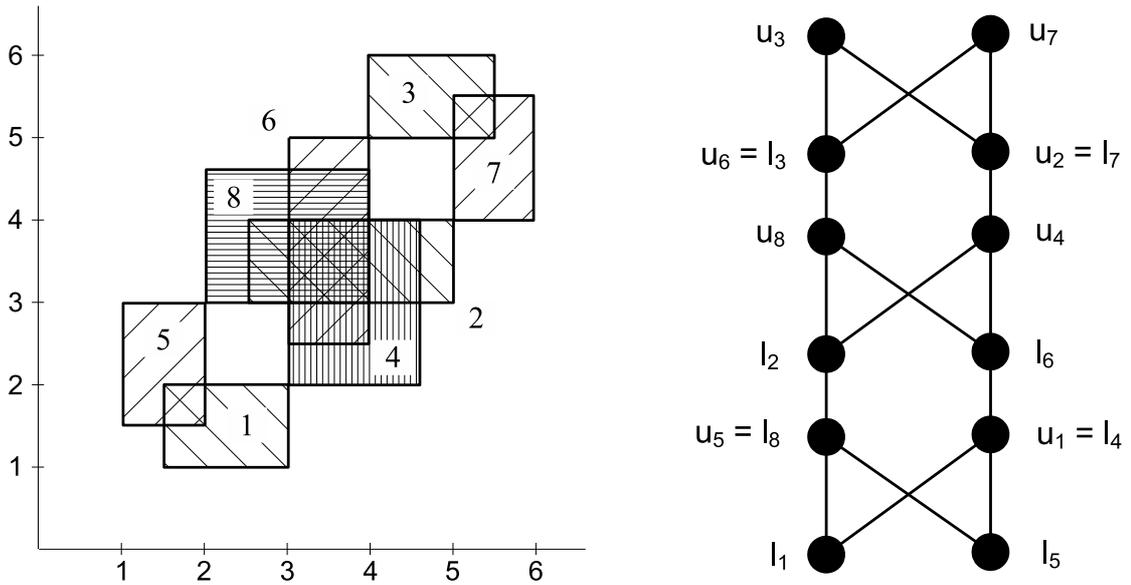


Figura 3.2: Uma imersão de cubos \mathcal{I} de P e a ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I})$.

Proposição 3.6. *Seja P uma ordem, I um realizador intervalar mínimo de P e \mathcal{I} a imersão de cubos associada a I . Então, $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{I})) \leq \text{idim}(P)$.*

Demonstração. Seja $\text{idim}(P) = |I| = t$. Observe que \mathcal{I} é uma imersão de cubos em \mathbb{R}^t associada a I . As tuplas correspondentes aos pontos extremos inferiores e superiores de cada cubo em \mathcal{I} formam uma imersão de $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ em \mathbb{R}^t . Logo, pelo teorema 3.3, $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{I})) \leq t = \text{idim}(P)$. \square

Comparando-se os termos das proposições 3.5 e 3.6, temos que se no lugar de $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{I})) \leq \text{idim}(P)$, na segunda proposição, fosse $\dim(B(P)) \leq \text{idim}(P)$, então a igualdade estaria estabelecida e o problema de decidir se uma dada ordem P tem dimensão intervalar no máximo 2 se reduziria ao problema de decidir se uma ordem associada a P construída em tempo polinomial tem dimensão no máximo 2, problema que pode ser resolvido de maneira eficiente [29], [30]. Porém, as ordens não são as mesmas e nem sequer elas são isomorfas no caso geral. A estratégia para o estabelecimento desta igualdade será o de criar uma operação de normalização sobre uma imersão de cubos \mathcal{I} , gerando a imersão de cubos \mathcal{I}^* , tal que a ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$ seja isomorfa à ordem $B(P)$.

Vamos agora tratar de descrever esta operação de normalização sobre uma imersão de cubos de uma ordem P , chamada de P -normalização. Seja $I = \{I_1, \dots, I_t\}$ um realizador intervalar de $P = (X, \prec)$, tal que cada $I_i = (X, \prec_i)$ esteja associado ao modelo de intervalos $\mathcal{I}_i = \{I_x^i \mid x \in X\}$, onde $I_x^i = (a_x^i, b_x^i)$. Seja \mathcal{I} a imersão de cubos de P em \mathbb{R}^t associada a estes modelos, i.e., $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_t\}$.

Primeiro, decremente os pontos inferiores dos intervalos de cada modelo enquanto se preservam as comparabilidades de P e o limite externo inferior dos modelos (o menor extremo inferior de algum intervalo). Em seguida, incremente os pontos superiores dos intervalos de cada modelo enquanto se preservam as comparabilidades de P e o limite externo superior dos modelos (o maior extremo superior de algum intervalo). Formalmente, seja:

$$a_x^{i*} = \begin{cases} \min\{a_z^i \mid z \in X\} & \text{se } x \text{ é minimal de } P \\ \max\{b_z^i \mid z \in P^-(x)\} & \text{se } x \text{ não é minimal de } P \end{cases}$$

e:

$$b_x^{i*} = \begin{cases} \max\{b_z^i \mid z \in X\} & \text{se } x \text{ é maximal de } P \\ \min\{a_z^{i*} \mid z \in P^+(x)\} & \text{se } x \text{ não é maximal de } P \end{cases}$$

Seja I_x^{i*} o intervalo (a_x^{i*}, b_x^{i*}) e I_i^* a ordem intervalar associada ao modelo $\mathcal{I}_i^* = \{I_x^{i*} \mid x \in X\}$. Então, a imersão de cubos $\mathcal{I}^* = \{\mathcal{I}_1^*, \dots, \mathcal{I}_t^*\}$ é o resultado da P -normalização de \mathcal{I} . Na figura 3.3 temos a imersão de cubos \mathcal{I}^* , resultado da P -normalização da imersão de cubos apresentada na figura 3.2, e a sua ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$ associada.

Seja $I^* = \{I_1^*, \dots, I_t^*\}$. No processo de P -normalização podem ser removidas comparabilidades de algum I_i , porém todas as comparabilidades de P são preservadas. Portanto, I^* também é um realizador intervalar de P .

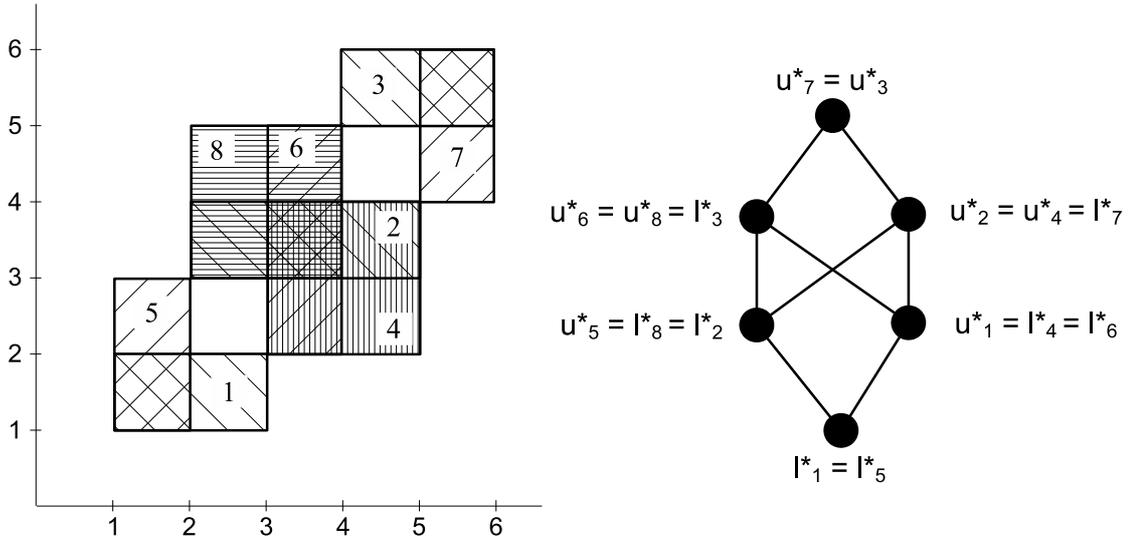


Figura 3.3: Imersão de cubos \mathcal{I}^* (P -normalização de \mathcal{I}) e a ordem $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$.

3.3 O isomorfismo entre $B(P)$ e $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$

Uma vez definidas as ordens $B(P)$ e $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$, o próximo passo será o de mostrar um isomorfismo entre elas, que é o que faremos através do seguinte lema.

Lema 3.7. *Seja P uma ordem tal que $\text{idim}(P) = t$. Sejam \mathcal{I} uma imersão de cubos de P em \mathbb{R}^t e \mathcal{I}^* sua P -normalização. Então, $B(P) \cong \mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$.*

Demonstração. Sejam as seguintes afirmações.

- (i) $U(x) \subseteq L(y) \iff u^*_x \leq l^*_y$
- (ii) $L(x) \subseteq L(y) \iff l^*_x \leq l^*_y$
- (iii) $U(x) \subseteq U(y) \iff u^*_x \leq u^*_y$
- (iv) $L(x) \subseteq U(y) \iff l^*_x \leq u^*_y$

Se mostrarmos que elas são verdadeiras, então é fácil notar que a bijeção $\phi : B(P) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$ tal que $\phi(L(x)) = l^*_x$ e $\phi(U(x)) = u^*_x$ é de fato um isomorfismo de $B(P)$ em $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$.

Seja $I^* = \{I^*_1, \dots, I^*_t\}$ o realizador intervalar associado a \mathcal{I}^* .

(i) Suponha $U(x) \subseteq L(y)$. Pelo lema 3.4 (i), sabemos que $x \in U(x)$. Logo, $x \in L(y)$ e por isso $x \prec y$ em P . Portanto, $x \prec y$ em cada I_i^* , $1 \leq i \leq t$, de onde concluímos que $b_x^{i*} \leq a_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Logo, $u_x^* \leq l_y^*$.

Reciprocamente, seja $u_x^* \leq l_y^*$. Logo, pela propriedade da imersão de cubos, temos que $x \prec y$ em P . Pelo lema 3.4 (iii), concluímos que $U(x) \subseteq L(y)$.

(ii) Suponha $L(x) \subseteq L(y)$. Logo, $P^-(x) \subseteq P^-(y)$. Se x é minimal em P , então $a_x^{i*} = \min\{a_z^i \mid z \in X\} \leq a_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Caso contrário, $a_x^{i*} = \max\{b_z^i \mid z \in P^-(x)\} \leq \max\{b_z^i \mid z \in P^-(y)\} = a_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Em ambos os casos, temos que $l_x^* \leq l_y^*$.

Reciprocamente, se $l_x^* \leq l_y^*$, então, $a_x^{i*} \leq a_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Para qualquer $z \prec x$ em P , temos que $b_z^{i*} \leq a_x^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Logo, $b_z^{i*} \leq a_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$, de onde concluímos que $z \prec y$. Portanto, $P^-(x) \subseteq P^-(y)$.

(iii) Suponha $U(x) \subseteq U(y)$. Se y é maximal em P , então $b_y^{i*} = \max\{b_z^i \mid z \in X\} \geq b_x^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Caso contrário, como $U(x) \subseteq U(y) \subset X$, então x também não é maximal em P . Seja $z \in P^+(y)$. Temos que $U(y) \subseteq P^-(z)$. Pelo lema 3.4 (i), sabemos que $x \in U(x)$. Logo, $x \in P^-(z)$ ou, em outros termos, $z \in P^+(x)$. Conseqüentemente, $P^+(y) \subseteq P^+(x)$. Logo, $b_x^{i*} = \min\{a_z^{i*} \mid z \in P^+(x)\} \leq \min\{a_z^{i*} \mid z \in P^+(y)\} = b_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Em ambos os casos, temos que $u_x^* \leq u_y^*$.

Reciprocamente, se $u_x^* \leq u_y^*$, então $b_x^{i*} \leq b_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Para qualquer $z \in P^+(y)$, temos que $a_z^{i*} \geq b_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Logo, $a_z^{i*} \geq b_x^{i*}$, $1 \leq i \leq t$, de onde concluímos que $z \succ x$. Assim, $P^+(y) \subseteq P^+(x)$ e temos que $U(y) = \bigcap_{z \in P^+(y)} P^-(z) \supseteq \bigcap_{z \in P^+(x)} P^-(z) = U(x)$.

(iv) Suponha $L(x) \subseteq U(y)$. Se x é minimal em P , então $a_x^{i*} = \min\{a_z^i \mid z \in X\} \leq b_x^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Caso contrário, se y é maximal em P , então $b_y^{i*} = \max\{b_z^i \mid z \in X\} \geq a_x^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Caso contrário, então existem $v \in P^-(x)$ e $w \in P^+(y)$ tais que $b_v^i = a_x^{i*}$ e $b_w^i = a_w^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Como $v \in L(x) \subseteq U(y)$

$= \cap_{z \in P^+(y)} P^-(z) \subseteq P^-(w)$, então $v \prec w$. Logo, $a_x^{i*} = b_v^i \leq b_v^{i*} \leq a_w^{i*} = b_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Em todos os casos, temos que $l_x^* \leq u_y^*$.

Reciprocamente, suponha $l_x^* \leq u_y^*$. Então, $a_x^{i*} \leq b_y^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Se y é maximal em P , então $L(x) \subseteq U(y) = X$. Se x é minimal em P , então $\emptyset = L(x) \subseteq U(y)$. Caso contrário, sejam v, w tal que $v \prec x$ e $y \prec w$. Portanto, $b_v^{i*} \leq a_x^{i*} \leq b_y^{i*} \leq a_w^{i*}$, $1 \leq i \leq t$. Logo, $v \prec w$. Como w é um sucessor qualquer de y , segue que $v \in \cap_{z \in P^+(y)} P^-(z) = U(y)$. Como v é um predecessor qualquer de x , concluímos que $L(x) \subseteq U(y)$.

□

Agora, segue o resultado fundamental.

Teorema 3.8. *Seja P uma ordem. Então, $\text{idim}(P) = \text{dim}(B(P))$.*

Demonstração. Usando as desigualdades das proposições 3.5 e 3.6, e o fato de que as ordens $B(P)$ e $\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)$ são isomorfas (lema 3.7), temos que $\text{idim}(P) \leq \text{dim}(B(P)) = \text{dim}(\mathcal{B}(\mathcal{I}^*)) \leq \text{idim}(P)$, e portanto $\text{idim}(P) = \text{dim}(B(P))$. □

3.4 Reconhecimento e complexidade

Seja P uma ordem. Pelo teorema 3.1, sabemos que P é uma ordem de trapézios se e somente se possuir dimensão intervalar no máximo 2. A questão $\text{idim}(P) \leq 2$, por sua vez, pode ser reduzida à questão $\text{dim}(B(P)) \leq 2$, pelo teorema 3.8. Portanto, reconhecer grafos de trapézios é o mesmo que reconhecer grafos de permutação.

O problema de saber se $\text{dim}(Q) \leq k$, para k geral, foi mostrado ser um problema NP-Completo por Yannakakis em 1982 [36]. No entanto, para $k = 2$, restrição que é suficiente para nossos propósitos, o problema é polinomial pela caracterização de Dushnik e Miller em 1941 [13], embora existam algoritmos mais recentes [18] cujas complexidades variam de $O(n^3)$ (algoritmos que se baseiam em orientações transitivas) a $O(n + m)$, sendo n o número de vértices e m o número

de arestas do grafo de incomparabilidade (algoritmos de reconhecimento de grafos de permutação de McConnell e Spinrad [29], [30]).

Para computar $Q = B(P)$, Langley em 1995 [25] mostrou que a complexidade é de $O(n^3)$, porém Felsner, Habib e Möhring em 1994 [15] mostraram que com mais cuidado é possível computar em $O(n^\alpha)$, onde $O(n^\alpha)$ é a complexidade de se processar multiplicação de matrizes.

Assim, o método de reconhecimento de grafos de trapézios apresentado neste capítulo é assim descrito. Primeiro, encontrar uma orientação transitiva de \overline{G} , gerando uma ordem P . Caso não exista uma orientação transitiva, então o grafo não é de cocomparabilidade e logo não é grafo de trapézios. Se a ordem P for encontrada, computar então $B(P)$, que como vimos, é implementável em tempo polinomial. O grafo G será um grafo de trapézios se e somente se $\dim(B(P)) \leq 2$. Encontrado um realizador de dimensão no máximo 2 para $B(P)$ [13], as provas da proposição 3.5 e do teorema 3.1 fornecem o algoritmo de construção de um modelo de trapézios de P .

A complexidade do método inteiro varia de $O(n^3)$ para as implementações mais diretas a $O(n^\alpha)$ para as mais cuidadosas. *No entanto, grafos de trapézios podem ser reconhecidos em tempo $O(n^2)$* , pela abordagem de Ma e Spinrad de 1994 [27].

Capítulo 4

Caracterizações de grafos PI

A classe de grafos PI é uma classe de grafos que, por definição, está muito próxima das classes de grafos de permutação, grafos de trapézios e grafos de intervalos, para as quais existem métodos de reconhecimento eficientes. Portanto, uma abordagem natural para o reconhecimento dos grafos PI seria a de verificar se não existe uma maneira de relacionar a classe de grafos PI com estas outras classes, de modo a adaptar estes métodos de reconhecimento. Há alguns trabalhos neste sentido. Mais especificamente, em [8], é apresentado um procedimento de reconhecimento de grafos de trapézios, que transforma o grafo de entrada em um grafo que deve ser reconhecido como um grafo de permutação com uma certa propriedade. No mesmo trabalho, menciona-se que foi tentado um procedimento similar para o reconhecimento das classes de grafos PI e grafos PI^* , porém sem sucesso, conjecturando-se que tais adaptações deveriam existir. Já em [12], é apresentada uma caracterização de grafos PI que reduz o problema do reconhecimento à questão de decidir se o grafo de entrada possui um modelo de trapézios com uma certa propriedade. Porém, não é apresentado um procedimento eficiente de reconhecimento. Neste capítulo, apresentaremos três caracterizações de grafos PI utilizando abordagens similares. Apesar destas caracterizações não conduzirem diretamente a algoritmos polinomiais, elas são úteis por contribuírem para um entendimento do problema de reconhecimento desta classe de grafos. Na seção

4.1, apresentaremos uma caracterização dos grafos PI, relacionando-os com grafos de permutação. Na seção 4.2, mostraremos que um grafo PI pode ser visto como a união de um grafo de intervalos com um grafo de permutação. Na seção 4.3, trataremos de uma caracterização sob o ponto de vista de ordens e suas dimensões.

4.1 Por grafos de permutação

Nesta seção apresentaremos uma caracterização dos grafos PI, na qual mostramos que o problema de reconhecer um grafo PI é equivalente ao de reconhecer se existe um grafo de permutação com um modelo que possui uma certa propriedade.

Esta abordagem é próxima daquela utilizada no reconhecimento de grafos de trapézios em [7]. Porém, como naquele caso foi encontrado uma forma eficiente de transformar um grafo de trapézios em um grafo de permutação e detectar a propriedade especial do grafo de permutação gerado, então a caracterização levou a um reconhecimento eficiente de grafos de trapézios. Neste mesmo trabalho, tentou-se aplicar uma abordagem análoga aos grafos PI, porém sem o mesmo sucesso.

Seja G um grafo qualquer. Definamos $P(G)$ como sendo a família de grafos tal que:

$H \in P(G) \iff H$ possui as seguintes propriedades:

- (i) $V(H) = \{v_1, v_2 \mid v \in V(G)\}$; i.e., cada vértice de G está associado a dois vértices distintos de H .
- (ii) $(v_1, v_2) \notin E(H)$, para todo $v \in V(G)$;
- (iii) G é isomorfo ao grafo resultante da contração dos vértices v_1 e v_2 , para todo $v \in V(G)$.

Como exemplo, considere o grafo G da figura 4.1 e um grafo H na família $P(G)$.

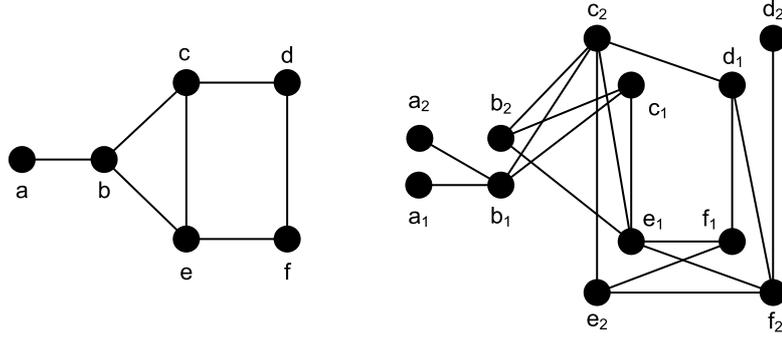


Figura 4.1: Grafo G e um grafo $H \in P(G)$.

Teorema 4.1. *Um grafo G é um grafo PI se e somente se existir um grafo de permutação $H \in P(G)$ com um modelo de permutação no qual $t(\ell_{v_1})$ e $t(\ell_{v_2})$ sejam consecutivos, para todo $v \in V(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo PI e $\mathcal{R}_G = \{T_v \mid v \in V(G)\}$ um modelo PI de G . Seja $\mathcal{R}_H = \{\ell_{v_1}, \ell_{v_2} \mid v \in V(G)\}$ obtido a partir de \mathcal{R}_G , tal que ℓ_{v_1} e ℓ_{v_2} são, respectivamente, os lados esquerdo e direito de T_v , para todo $v \in V(G)$, e faça $t(\ell_{v_1}) \ll t(\ell_{v_2})$, tornando-os distintos, para todo $v \in V(G)$. Note que \mathcal{R}_H é um modelo de permutação. Seja $H = (\{v_1, v_2 \mid v \in V(G)\}, E)$ o grafo de permutação com modelo de permutação \mathcal{R}_H , tal que v_1 corresponde ao segmento ℓ_{v_1} e v_2 corresponde ao segmento ℓ_{v_2} . Vamos, agora, mostrar que $H \in P(G)$.

As condições (i) e (ii) são satisfeitas por construção. Mostremos a condição (iii). Seja G' o grafo resultante da contração de v_1 e v_2 , para todo $v \in V(G)$. Seja a bijeção $\phi : V(G') \rightarrow V(G)$ tal que $\phi(v') = v$, onde v' é o vértice associado à contração de v_1 e v_2 . Como $(x, y) \in E(G) \iff T_x \parallel T_y$ em $\mathcal{R}_G \iff \ell_{x_i} \parallel \ell_{y_j}$ em \mathcal{R}_H , para algum i, j com $1 \leq i, j \leq 2 \iff (x_i, y_j) \in E(H)$, para algum i, j com $1 \leq i, j \leq 2 \iff (x', y') \in E(G')$, então $G' \cong G$. Logo, $H \in P(G)$. Como \mathcal{R}_H é um modelo de permutação no qual $t(\ell_{v_1})$ e $t(\ell_{v_2})$ são consecutivos, para todo $v \in V(G)$, completamos a primeira parte da prova.

Sejam agora G um grafo e $H = (\{v_1, v_2 \mid v \in V(G)\}, E_H) \in P(G)$ com modelo de permutação \mathcal{R}_H no qual $t(\ell_{v_1})$ e $t(\ell_{v_2})$ são consecutivos, para todo $v \in V(G)$. Seja \mathcal{R}' um modelo construído a partir de \mathcal{R}_H , identificando os pontos $t(\ell_{v_1})$ e

$t(\ell_{v_2})$, para todo $v \in V(G)$. Como $t(\ell_{v_1})$ e $t(\ell_{v_2})$ são pontos consecutivos, é possível fazer tais identificações sem mudar qualquer posição relativa entre os segmentos de \mathcal{R}_H . Agora, note que se considerarmos os segmentos ℓ_{v_1} e ℓ_{v_2} em \mathcal{R}' como sendo os lados de um triângulo T_v , então temos que $\mathcal{R}' = \{T_v \mid v \in V(G)\}$ é um modelo PI. Além disso, $(x, y) \in E(G) \iff (x_i, y_j) \in E_H$, para algum i, j com $1 \leq i, j \leq 2 \iff \ell_{x_i} \parallel \ell_{y_j}$, para algum i, j com $1 \leq i, j \leq 2 \iff T_x \parallel T_y$. Logo \mathcal{R}' é um modelo PI de G e segue o resultado. \square

O grafo G da figura 4.1 é, como vimos, um grafo PI (figura 2.10). Logo, pelo teorema anterior, existe um grafo de permutação na família $P(G)$ que possui um modelo onde os topos dos segmentos “irmãos” são consecutivos. De fato, a figura 4.2 mostra um modelo com tal propriedade para o grafo H da figura 4.1.

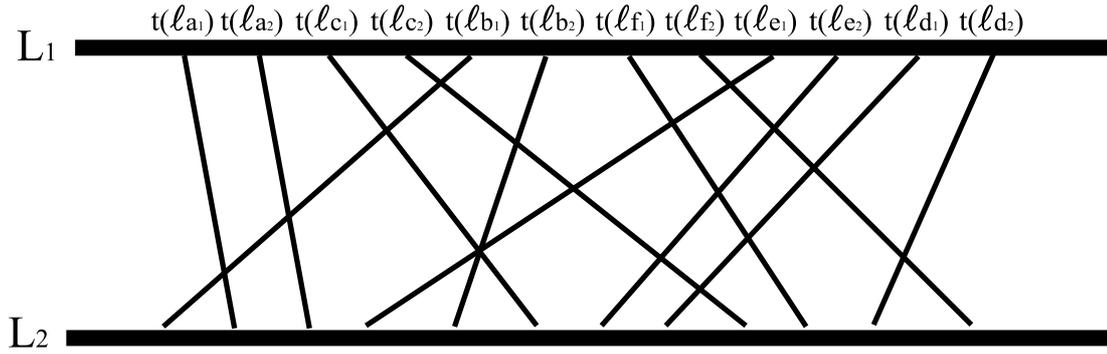


Figura 4.2: Modelo de permutação do grafo H .

4.2 Por classificação de arestas

Nesta seção, mostraremos que todo grafo PI é, na verdade, a união de um grafo de permutação com um grafo de intervalos. Como vimos no capítulo 2, a classe de grafos PI generaliza tanto a classe de grafos de permutação quanto a classe de grafos de intervalos.

Sejam G um grafo de permutação e $P = (V(G), \prec)$ uma ordem linear. Dizemos que P é *factível* para G se existe um modelo de permutação \mathcal{R} de G no qual a

ordem linear de $V(G)$ dada pela seqüência crescente dos topos dos segmentos de retas de \mathcal{R} seja P . Mais precisamente, $P = (V(G), \prec)$ é factível para G quando existe um modelo de permutação $\mathcal{R} = \{\ell_x \mid x \in V(G)\}$ tal que $x \prec y \iff t(\ell_x) \ll t(\ell_y)$. Por exemplo, a ordem $P = a \prec b \prec c \prec e \prec d \prec f$ é factível para o grafo G_P da figura 4.3. Por outro lado, qualquer ordem que contiver a subordem $P' = b \prec a \prec c$, por exemplo, não será factível para G_P , pois como ℓ_b deve ter interseção com ℓ_c e $t(\ell_a)$ está entre $t(\ell_b)$ e $t(\ell_c)$, então ℓ_a deveria ter interseção com ℓ_b ou com ℓ_c , porem nenhuma destas situações é permitida.

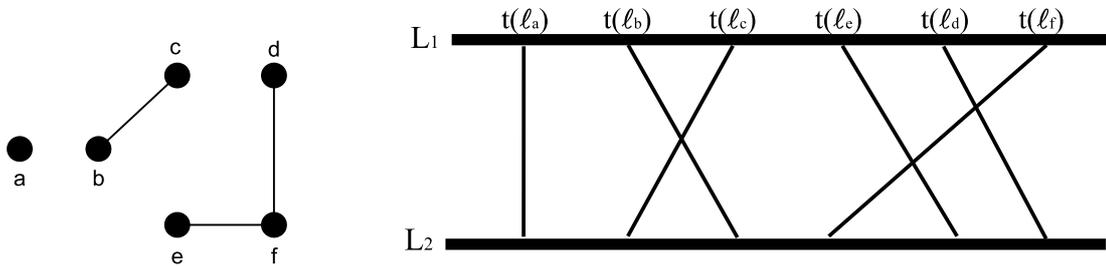


Figura 4.3: $P = a \prec b \prec c \prec e \prec d \prec f$ é factível para o grafo de permutação G_P .

Seja G um grafo de intervalos e $\mathcal{R} = \{I_v \mid v \in V(G)\}$ um modelo de intervalos de G . A *ordem inicial* de \mathcal{R} é a ordem linear sobre o conjunto de vértices de G que corresponde à seqüência em que os intervalos em \mathcal{R} se iniciam. Mais precisamente, $P = (V(G), \prec)$ é a ordem inicial de \mathcal{R} quando $x \prec y \iff e(I_x) \ll e(I_y)$. No grafo G_I da figura 4.4, a ordem inicial do modelo dado é $P = a \prec b \prec c \prec e \prec d \prec f$.

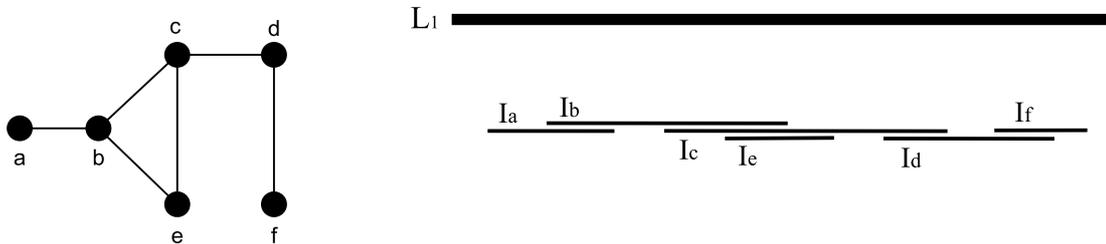


Figura 4.4: O grafo de intervalos G_I e a ordem inicial $a \prec b \prec c \prec e \prec d \prec f$.

Teorema 4.2. *Um grafo G é um grafo PI se e somente se existirem um grafo de permutação G_P e um grafo de intervalos G_I tais que $G = G_P \cup G_I$ e G_I tenha um modelo de intervalos cuja ordem inicial seja factível para G_P .*

Demonstração. Seja G um grafo PI e $\mathcal{R}_G = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ um modelo PI de G . Vamos construir dois modelos a partir de \mathcal{R}_G : $\mathcal{R}_I = \{I_x \mid x \in V(G) \text{ e } I_x = b(T_x)\}$ e $\mathcal{R}_P = \{\ell_x \mid x \in V(G) \text{ e } \ell_x = e(T_x)\}$. É claro que \mathcal{R}_I é um modelo de intervalos e \mathcal{R}_P um modelo de permutação. Sejam, pois, G_I e G_P os grafos de interseção de \mathcal{R}_I e \mathcal{R}_P , respectivamente, tais que $V(G_P) = V(G_I) = V(G)$. Como para quaisquer dois vértices distintos $u, v \in V(G)$, $T_u \parallel T_v \iff (b(T_u) \parallel b(T_v) \text{ ou } e(T_u) \parallel e(T_v))$, temos que $e \in E(G) \iff (e \in E(G_I) \text{ ou } e \in E(G_P))$. Logo, $G = G_I \cup G_P$. Agora, seja P a ordem inicial de \mathcal{R}_I . Note que P é precisamente a ordem dada pela seqüência das bases do modelo de permutação \mathcal{R}_P , por construção. Seja \mathcal{R}' a reflexão vertical de \mathcal{R}_P . Como P é agora a seqüência dos topos em \mathcal{R}' e \mathcal{R}' é modelo de permutação de G_P , então \mathcal{R}_I é um modelo de intervalos de G_I cuja ordem inicial P é factível para G_P .

Reciprocamente, seja o grafo de permutação G_P com modelo de permutação $\mathcal{R}_P = \{\ell_x \mid x \in V(G)\}$ e o grafo de intervalos G_I com modelo de intervalos $\mathcal{R}_I = \{I_x \mid x \in V(G)\}$ tais que \mathcal{R}_P seja a comprovação de que a ordem inicial P de \mathcal{R}_I é factível para G_P . Note que, como a ordem P é sobre o conjunto de vértices de G_I e é factível para G_P , então necessariamente $V(G_P) = V(G_I)$. Provemos que $G_P \cup G_I$ é um grafo PI. Seja \mathcal{R}' a reflexão vertical de \mathcal{R}_P . Construa o modelo PI $\mathcal{R}_G = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ da seguinte forma: a base do triângulo T_x é I_x em \mathcal{R}_I e o topo do triângulo T_x é o topo de ℓ_x em \mathcal{R}' . Seja G o grafo de interseção do modelo \mathcal{R}_G , tal que $V(G) = V(G_P) = V(G_I)$. Sejam os triângulos distintos $T_u, T_v \in \mathcal{R}_G$. Como $e = (u, v) \in E(G) \iff T_u \parallel T_v \iff (b(T_u) \parallel b(T_v) \text{ ou } e(T_u) \parallel e(T_v)) \iff (e \in E(G_I) \text{ ou } e \in E(G_P))$, então $G = G_P \cup G_I$. Logo, $G_P \cup G_I$ é um grafo PI. \square

Voltando aos exemplos anteriores, note que a ordem inicial P do grafo de intervalos da figura 4.4 é factível para o grafo de permutação G_P , da figura 4.3. Logo,

pelo teorema anterior, $G = G_P \cup G_I$ é um grafo PI. De fato, seguindo a construção dada na prova, o modelo da figura 4.5 é um modelo PI de G .

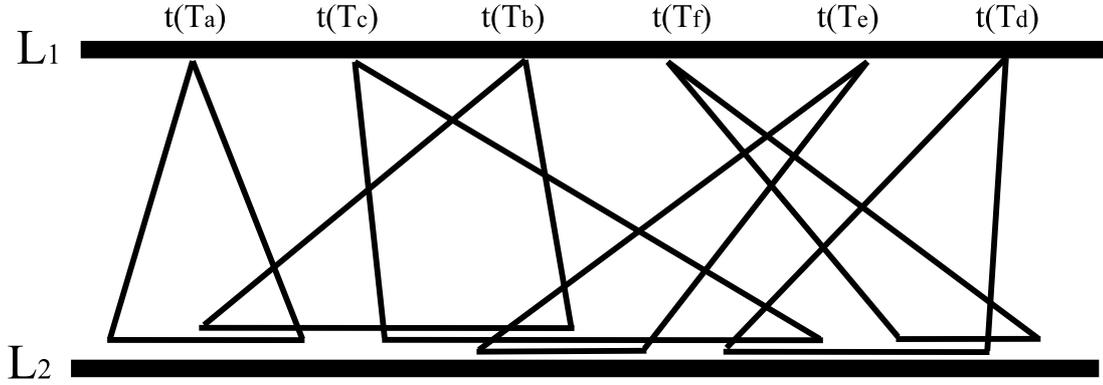


Figura 4.5: Modelo PI de $G_P \cup G_I$.

A caracterização acima pode ser estendida para grafos de trapézios com pequenas adaptações. Em outras palavras, podemos também caracterizar grafos de trapézios em termos de união de um grafo de permutação com dois grafos de intervalos.

Teorema 4.3. *Um grafo G é um grafo de trapézios se e somente se existirem um grafo de permutação G_P e dois grafos de intervalos G_I^1 e G_I^2 tais que $G = G_P \cup G_I^1 \cup G_I^2$ e G_I^1 e G_I^2 tenham modelos de intervalos cujas respectivas ordens iniciais sejam factíveis para G_P , o que é comprovado pelos modelos de permutação \mathcal{R}_P^1 e \mathcal{R}_P^2 , tais que \mathcal{R}_P^1 é a reflexão vertical do modelo \mathcal{R}_P^2 .*

Demonstração. Seja G um grafo de trapézios e $\mathcal{R}_G = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ um modelo de trapézios de G . Vamos construir três modelos a partir de \mathcal{R}_G : $\mathcal{R}_I^1 = \{I_x^1 \mid x \in V(G) \text{ e } I_x^1 = t(T_x)\}$, $\mathcal{R}_I^2 = \{I_x^2 \mid x \in V(G) \text{ e } I_x^2 = b(T_x)\}$ e $\mathcal{R}_P = \{\ell_x \mid x \in V(G_P) \text{ e } \ell_x = e(T_x)\}$. É claro que \mathcal{R}_I^1 e \mathcal{R}_I^2 são modelos de intervalos e \mathcal{R}_P um modelo de permutação. Sejam, pois, G_I^1 , G_I^2 e G_P os respectivos grafos de interseção, tais que $V(G_P) = V(G_I^1) = V(G_I^2) = V(G)$. Como para quaisquer dois vértices distintos $u, v \in V(G)$, $T_u \parallel T_v \iff (t(T_u) \parallel t(T_v) \text{ ou } b(T_u) \parallel b(T_v) \text{ ou } e(T_u) \parallel e(T_v))$, temos que $e \in E(G) \iff (e \in E(G_I^1) \text{ ou } e \in E(G_I^2) \text{ ou } e \in E(G_P))$. Logo, $G =$

$G_I^1 \cup G_I^2 \cup G_P$. Agora, sejam P^1 e P^2 as ordens iniciais de \mathcal{R}_I^1 e \mathcal{R}_I^2 , respectivamente. Note que P^2 é precisamente a ordem dada pela seqüência das bases do modelo de permutação \mathcal{R}_P , por construção. Seja \mathcal{R}' a reflexão vertical de \mathcal{R}_P . Como P^2 é agora a seqüência dos topos em \mathcal{R}' , modelo de permutação de G_P , temos que \mathcal{R}_I^2 é um modelo de intervalos de G_I^2 cuja ordem inicial P^2 é factível para G_P . Por último, note que P^1 é precisamente a ordem dada pela seqüência dos topos do modelo de permutação \mathcal{R}_P , por construção. Logo, \mathcal{R}_I^1 é um modelo de intervalos de G_I^1 cuja ordem inicial P^1 é também factível para G_P , comprovado pelo modelo de permutação \mathcal{R}_P .

Reciprocamente, seja o grafo de permutação G_P e os grafos de intervalos G_I^1 e G_I^2 com modelos de intervalos $\mathcal{R}_I^1 = \{I_x^1 \mid x \in V(G)\}$ e $\mathcal{R}_I^2 = \{I_x^2 \mid x \in V(G)\}$, respectivamente, tais que \mathcal{R}_P^1 e \mathcal{R}_P^2 sejam a comprovação de que as ordens iniciais P^1 de \mathcal{R}_I^1 e P^2 de \mathcal{R}_I^2 sejam factíveis para G_P , sendo \mathcal{R}_P^1 a reflexão vertical de \mathcal{R}_P^2 . Note que, como as ordens P^1 e P^2 são sobre o conjunto de vértices de G_I^1 e G_I^2 e ambas são factíveis para G_P , então necessariamente $V(G_P) = V(G_I^1) = V(G_I^2)$. Provemos que $G_P \cup G_I^1 \cup G_I^2$ é um grafo de trapézios. Construa o modelo de trapézios $\mathcal{R}_G = \{T_x \mid x \in V(G)\}$ da seguinte forma: o topo do trapézio T_x é I_x^1 , a base do trapézio T_x é I_x^2 . Seja G o grafo de trapézios associado ao modelo \mathcal{R}_G , tal que $V(G) = V(G_P) = V(G_I^1) = V(G_I^2)$. Note que G_P é o grafo de interseção do modelo de permutação $\{e(T_x) \mid x \in V(G)\}$, pois P^1 é a ordem inicial dos intervalos que formam os topos dos trapézios e é a ordem dos topos de \mathcal{R}_P^1 e P^2 é a ordem inicial dos intervalos que formam as bases dos trapézios e é a ordem das bases de \mathcal{R}_P^2 . Portanto, sejam os trapézios distintos $T_u, T_v \in \mathcal{R}_G$. Como $e = (u, v) \in E(G) \iff T_u \parallel T_v \iff (t(T_u) \parallel t(T_v) \text{ ou } b(T_u) \parallel b(T_v) \text{ ou } e(T_u) \parallel e(T_v)) \iff (e \in E(G_I^1) \text{ ou } e \in E(G_I^2) \text{ ou } e \in E(G_P))$, então $G = G_P \cup G_I^1 \cup G_I^2$. Logo, $G_P \cup G_I^1 \cup G_I^2$ é um grafo de trapézios. \square

4.3 Por dimensão de ordens

Nesta seção, introduziremos no estudo de grafos PI o uso de uma importante ferramenta matemática: as ordens e suas dimensões. Uma ordem $P = (X, \prec)$ é chamada de *ordem PI* se existir um modelo PI $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$, tal que $T_x \ll T_y \iff x \prec y$.

Os seguintes resultados decorrem diretamente das definições e mostram o relacionamento próximo entre ordens PI e grafos PI.

Proposição 4.4. *Se P é uma ordem PI, então o grafo de incomparabilidade de P é um grafo PI.*

Demonstração. Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem PI e $G = (X, E)$ o grafo de incomparabilidade de P . Seja $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$ um modelo PI de P . Como $(x, y) \in E \iff x \parallel y \iff T_x \parallel T_y$, então \mathcal{R} é um modelo PI de G . \square

Proposição 4.5. *Se $G = (X, E)$ é um grafo PI, então existe uma ordem PI $P = (X, \prec)$ cujo grafo de incomparabilidade é G .*

Demonstração. Seja $G = (X, E)$ um grafo PI e $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$ um modelo PI de G . Seja $P = (X, \prec)$ a ordem tal que $x \prec y \iff T_x \ll T_y$. Note que P é uma ordem PI, por definição. Como $(x, y) \in E \iff T_x \parallel T_y \iff x \parallel y$, então G é o grafo de incomparabilidade de P . \square

Em outras palavras, se G é um grafo PI, o que a prova da proposição 4.5 nos mostra é que existe uma orientação transitiva de \overline{G} que induz uma ordem PI.

Note que transformar o problema de encontrar um modelo de uma ordem PI em encontrar um modelo de um grafo PI é direto, pela proposição 4.4. Porém, transformar o problema de encontrar um modelo de um grafo PI no problema de encontrar um modelo de uma ordem PI, exige a princípio que resolvamos o subproblema de orientar transitivamente o complemento do grafo de modo que a propriedade de ser PI ocorra na ordem induzida pela orientação se e somente se o grafo instância do problema for PI.

Uma propriedade π de uma ordem P é dita ser uma *invariante de comparabilidade* se qualquer orientação transitiva do grafo de comparabilidade de P induzir uma ordem com a propriedade π . De outra maneira, uma propriedade π é uma *invariante de comparabilidade* se ou todas as ordens com um mesmo grafo de comparabilidade possuem a propriedade π ou nenhuma delas a possui. Como se pode imaginar, encontrar propriedades invariantes de comparabilidade é muito útil.

Não é difícil pensar em propriedades que *não são* invariantes de comparabilidade. Por exemplo, o número de elementos maximais não é uma invariante de comparabilidade (as ordens Q e R da figura 4.6 possuem o mesmo grafo de comparabilidade, mas o número de elementos maximais de cada uma são diferentes). Por outro lado, é sabido que as dimensões linear e intervalar de uma ordem é uma invariante de comparabilidade [21, 22].

Mostrar que uma determinada propriedade é uma invariante de comparabilidade em geral não é muito fácil, devido ao quantificador *para todo*, presente na definição. No entanto, Gallai desenvolveu uma importante ferramenta que facilita este trabalho, conhecida como *Teorema de Gallai* [21].

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que $A \subseteq V$ é um *conjunto homogêneo* se cada vértice de $V \setminus A$ é adjacente ou a todos os vértice de A ou a nenhum deles. Sejam $P_1 = (X, \prec_1)$ e $P_2 = (X, \prec_2)$ duas ordens com o mesmo grafo de comparabilidade G . Dizemos que P_2 é obtida de P_1 por uma *reversão elementar* se existe um conjunto homogêneo $A \subseteq X$ de G que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) A não é um conjunto independente de G ;
- (ii) Se x, y não estão ambos em A , então $x \prec_1 y \iff x \prec_2 y$;
- (iii) Se $x, y \in A$, então $x \prec_1 y \iff y \prec_2 x$.

Desta forma, a obtenção de P_2 a partir de P_1 se faz através da reversão das comparabilidades entre os elementos de A .

Como exemplo, considere a figura 4.6. A ordem Q é obtida de P por uma reversão elementar através do conjunto homogêneo $\{b, c, d\}$ e R é obtida de Q primeiro por uma reversão elementar usando o conjunto homogêneo $\{a, d\}$, e então por uma reversão elementar através do conjunto homogêneo $\{a, b, c, d\}$.

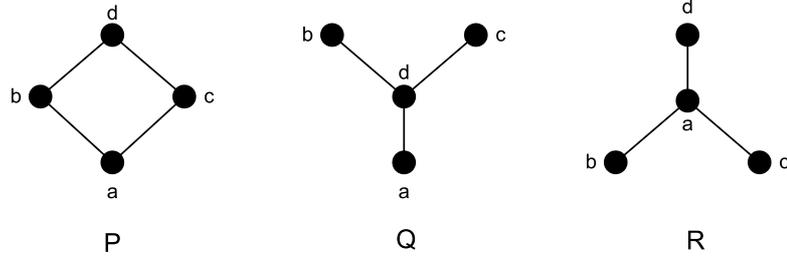


Figura 4.6: Ordens P , Q e R , obtidas umas das outras por reversões elementares.

Teorema 4.6 (de Gallai). *Sejam $P = (X, \prec_P)$ e $Q = (X, \prec_Q)$ ordens com o mesmo grafo de comparabilidade. Então existe uma seqüência P_1, \dots, P_k , $k \geq 2$, tal que $P_1 = P$, $P_k = Q$ e P_i é obtida de P_{i-1} por uma reversão elementar, $1 < i \leq k$.*

Lema 4.7. *Sejam $P_1 = (X, \prec_1)$ e $P_2 = (X, \prec_2)$ ordens tais que P_2 é obtida de P_1 por uma reversão elementar através do conjunto homogêneo $A \subseteq X$. Então, os conjuntos $P_1^-(A)$, $P_1^+(A)$ e $Inc(A) = \{x \in X \setminus A \mid x \parallel a \text{ para todo } a \in A\}$ particionam $X \setminus A$.*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus A$. Se $x \parallel y$, para algum $y \in A$, então $x \parallel a$, para todo $a \in A$ pois, caso contrário, A não seria um conjunto homogêneo do grafo de comparabilidade de P_1 . Logo, x pertence somente a $Inc(A)$. Vamos mostrar agora que se $x \prec_1 y$, para algum $y \in A$, então $x \prec_1 a$, para todo $a \in A$. Suponha o contrário. Então, existe $x \in X \setminus A$ e $a_1, a_2 \in A$ tais que $x \prec_1 a_1$ e $x \succ_1 a_2$. Logo, $a_2 \prec_1 a_1$. Pela definição de reversão elementar, temos que $a_1 \prec_2 a_2$, $x \prec_2 a_1$ e $x \succ_2 a_2$, contradizendo o fato de que P_2 é uma ordem. Para o caso $x \succ_1 y$, para algum $y \in A$, conclui-se analogamente que $x \succ_1 a$, para todo $a \in A$. Logo, para todo $x \in X \setminus A$, ou $x \in P_1^-(A)$, ou $x \in P_1^+(A)$, ou $x \in Inc(A)$. \square

Seja P uma ordem e π uma propriedade sobre ordens. Denotaremos por $P \in \pi$ quando a propriedade π for válida para P .

Segue então o importante corolário:

Corolário 4.8. *Sejam P e Q ordens com o mesmo grafo de comparabilidade e π uma propriedade sobre ordens. Para provar que $P \in \pi \iff Q \in \pi$, é suficiente mostrar que $P \in \pi \Rightarrow Q \in \pi$ para o caso em que Q pode ser obtida de P por uma reversão elementar.*

Demonstração. Pelo teorema 4.6, é suficiente mostrar que $P \in \pi \iff Q \in \pi$ somente nos casos onde Q pode ser obtida de P por uma reversão elementar. Além disso, como o processo de obter uma ordem de outra por uma reversão elementar é simétrico, segue o resultado. \square

De posse do teorema de Gallai e seu corolário, vamos agora mostrar que ser uma ordem PI é uma invariante de comparabilidade.

Teorema 4.9. *Sejam P e Q ordens com o mesmo grafo de comparabilidade. P é uma ordem PI se e somente se Q for uma ordem PI.*

Demonstração. Se $P = Q$, o resultado é imediato. Caso contrário, pelo corolário 4.8, é suficiente mostrar que P é uma ordem PI $\Rightarrow Q$ é uma ordem PI quando Q pode ser obtida de P por uma reversão elementar. A prova segue com os seguintes passos: primeiro, apresentamos uma operação geral de *redimensionamento* de uma parte de um modelo PI, transformando-o em um outro; a seguir, usamos esta operação para construir, a partir de um modelo PI de P , um segundo modelo PI; por último, mostramos que este segundo modelo é modelo PI de Q , de onde segue o resultado.

Seja $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$ um modelo PI e duas constantes $M < N$ quaisquer. A operação de *redimensionar* $A \subseteq X$ entre as retas $x = M$ e $x = N$ consiste em fazer com que todo triângulo T_x , $x \in A$, fique dentro da região delimitada pelas retas $x = M$ e $x = N$ do modelo, sem que a comparabilidade entre dois elementos de A

ou entre dois elementos de $X \setminus A$ se altere. Esta transformação na representação é feita da seguinte maneira.

- (i) Seja $a \in A$ o elemento cujo triângulo associado T_a tenha o ponto de menor abscissa, dentre todos os triângulos T_x , $x \in A$. Note que este ponto de menor abscissa é o ponto $e(b(T_a))$ ou o ponto $t(T_a)$. Translade horizontalmente em \mathcal{R} os triângulos T_x , $x \in A$, de modo que o ponto $e(b(T_a))$ ou o ponto $t(T_a)$, aquele que tiver a menor abscissa, tenha nova abscissa $x = M$.
- (ii) Redimensione todo triângulo transladado T'_x , $x \in A$, criando os triângulos T''_x , $x \in A$ de modo que o ponto (p, q) do triângulo T'_x seja mapeado no ponto $(M + (p - M)(N - M)/(Q - M), q)$ do triângulo T''_x , onde Q é a maior abscissa de algum ponto de um triângulo T'_x , $x \in A$; de maneira menos formal, “estique” ou “comprima” a direita dos triângulos transladados de forma que o ponto de maior abscissa de algum triângulo transladado tenha a abscissa $x = N$.

Isto completa a operação de *redimensionamento*. Note que, ao final da transformação de *redimensionamento*, $T_x \ll T_y \iff T''_x \ll T''_y$ para todo $x, y \in A$ e para todo $x, y \in X \setminus A$. O mesmo pode não ocorrer para $x \in A$, $y \notin A$.

Como P é uma ordem PI, seja $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$ um modelo PI de P . Seja A o conjunto homogêneo tal que Q é obtida de P através da reversão elementar de A . Como A não é um conjunto independente no grafo de comparabilidade, então existem $b, c \in A$ tais que $b \prec_P c$. Modifique o modelo \mathcal{R} , adicionando uma constante apropriada a cada topo de triângulo, de modo que o ponto $t(T_b)$ tenha a mesma abscissa do ponto $d(b(T_b))$; ou seja, o lado direito de T_b passa a ser ortogonal às retas paralelas do modelo. Seja $\mathcal{R}' = \{T'_x \mid x \in X\}$ este novo modelo. Seja S a região retangular maximal compreendida estritamente entre T'_b e T'_c . Considere que S é a região delimitada pelas retas $x = M$ e $x = N$. Agora, redimensione A entre as retas $x = M$ e $x = N$, conforme operação descrita anteriormente. Em seguida, reflita horizontalmente os triângulos redimensionados, obtendo o modelo

$\mathcal{R}'' = \{T_x'' \mid x \in X\}$. Nosso objetivo passa a ser o de mostrar que \mathcal{R}'' é um modelo PI de Q .

Como a operação de redimensionamento foi composta por uma reflexão horizontal, podemos concluir que, para todo $x, y \in A$, $x \prec_Q y \iff y \prec_P x \iff T_y \ll T_x \iff T_x'' \ll T_y''$, o que está de acordo com o objetivo de mostrar que \mathcal{R}'' é modelo PI de Q . Como $T_x = T_x''$, para todo $x \in X \setminus A$, temos que para todo $x, y \in X \setminus A$, $x \prec_Q y \iff x \prec_P y \iff T_x \ll T_y \iff T_x'' \ll T_y''$, novamente consistente com o nosso objetivo. Por último, para todo $x \in X \setminus A$ e $y \in A$, consideremos as possibilidades:

- $x \prec_Q y$: então $x \prec_P y$. Pelo lema 4.7, $x \prec_P a$, para todo $a \in A$, em particular, $x \prec_P b$. Logo, $T_x \ll T_b$. Como $T_b \ll T_a''$, para todo $a \in A$, então $T_x \ll T_a''$, para todo $a \in A$, em particular, $T_x \ll T_y''$. Como $T_x = T_x''$, segue que $T_x'' \ll T_y''$;
- $x \succ_Q y$: então $x \succ_P y$. Pelo lema 4.7, $x \succ_P a$, para todo $a \in A$, em particular, $x \succ_P c$. Logo, $T_x \gg T_c$. Como $T_c \gg T_a''$, para todo $a \in A$, então $T_x \gg T_a''$, para todo $a \in A$, em particular, $T_x \gg T_y''$. Como $T_x = T_x''$, segue que $T_x'' \gg T_y''$;
- $x \parallel_Q y$: então $x \parallel_P y$. Pelo lema 4.7, $x \parallel_P a$, para todo $a \in A$, em particular, $x \parallel_P b$ e $x \parallel_P c$. Logo, $T_x \parallel T_b$ e $T_x \parallel T_c$. Como $T_b \ll T_a'' \ll T_c$, para todo $a \in A$, então $T_x \parallel T_a''$, para todo $a \in A$, em particular, $T_x \parallel T_y''$. Como $T_x = T_x''$, segue que $T_x'' \parallel T_y''$.

Isto completa a prova. □

Corolário 4.10. *G é um grafo PI se e somente se qualquer ordem cujo grafo de incomparabilidade seja G for uma ordem PI.*

Demonstração. Imediato a partir da proposição 4.4 e do teorema 4.9. □

Isto fornece uma transformação direta do problema de reconhecer um modelo para um grafo PI no de reconhecer uma ordem PI. Para obtenção de uma orientação transitiva, [18] descreve um procedimento polinomial.

Vamos agora tratar as ordens sob o ponto de vista de suas dimensões.

A dimensão linear ou intervalar de uma ordem pode estar relacionada com o tipo da ordem. Como vimos no capítulo 3, P é uma ordem de trapézios $\iff P$ tem dimensão intervalar no máximo 2. É conhecido também que P é uma ordem de permutação $\iff P$ tem dimensão linear no máximo 2 [21].

Vejam os como podemos estender estes resultados para ordens PI.

Seja P uma ordem e F um realizador de P . Diremos que F é um *realizador linear-intervalar* (p, q) de P se cada elemento de F é uma extensão linear ou intervalar de P e se F tem p extensões de P estritamente intervalares (extensões intervalares que não são lineares) e q extensões lineares de P .

A *dimensão linear-intervalar* de uma ordem P , denotada por $lidim(P)$, é o par ordenado (p, q) tal que existe um realizador linear-intervalar (p, q) para P e $(p + q, p, q)$ seja lexicograficamente mínimo. Diremos que $lidim(P) = (p, q) \leq lidim(Q) = (p', q')$ quando $(p + q, p, q)$ for lexicograficamente menor ou igual que $(p' + q', p', q')$.

Teorema 4.11. P é uma ordem PI se e somente se $lidim(P) \leq (1, 1)$.

Demonstração. Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem PI e $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$ um modelo PI de P . Considere as ordens $P_I = (X, \prec_I)$ e $P_L = (X, \prec_L)$ tais que $x \prec_I y \iff b(T_x) \ll b(T_y)$ e $x \prec_L y \iff t(T_x) \ll t(T_y)$. Por construção, é claro que P_L é uma extensão linear de P e P_I é uma extensão intervalar de P . Como $x \prec y \iff t(T_x) \ll t(T_y)$ e $b(T_x) \ll b(T_y) \iff x \prec_L y$ e $x \prec_I y$, então $\{P_L, P_I\}$ é um realizador linear-intervalar de P . Logo, $lidim(P) \leq (1, 1)$.

Reciprocamente, seja $P = (X, \prec)$ uma ordem tal que $lidim(P) \leq (1, 1)$. Se $lidim(P) = (0, 2)$ ou $lidim(P) = (0, 1)$, então P é uma ordem de permutação e, conseqüentemente, P é uma ordem PI. Se $lidim(P) = (1, 0)$, então P é uma ordem intervalar e, conseqüentemente, P é uma ordem PI. Por fim, considere que $lidim(P) = (1, 1)$ e então tome um realizador linear-intervalar $\{P_I, P_L\}$ de P , tal que $P_I = (X, \prec_I)$ é uma extensão estritamente intervalar e $P_L = (X, \prec_L)$ é uma extensão linear de P . Seja $\mathcal{R}_I = \{I_x \mid x \in X\}$ um modelo de intervalos de P_I .

Vamos construir um modelo PI, $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$, tal que $b(T_x) = I_x$, $x \in X$ e $t(T_x) \ll t(T_y) \iff x \prec_L y$. Assim, $x \prec y \iff (x \prec_L y \text{ e } x \prec_I y) \iff (t(T_x) \ll t(T_y) \text{ e } b(T_x) \ll b(T_y)) \iff T_x \ll T_y$. Logo, \mathcal{R} é um modelo PI de P . □

Capítulo 5

Reconhecimento de grafos PI

Neste capítulo apresentaremos uma conjectura que, se verdadeira, implica no reconhecimento eficiente de grafos PI, problema atualmente em aberto [6, 5, 34].

Na seção 5.1, introduziremos os conceitos de representações básicas e compatibilidade. Na seção 5.2, apresentaremos uma nova caracterização dos grafos PI, baseada nos conceitos anteriores. Na seção 5.3, será discutido um problema relacionado cuja resolução será demonstrada ser eficiente. Uma conjectura será então formulada na seção 5.4. Uma solução positiva para esta conjectura implicará que o reconhecimento de grafos PI pode ser resolvido eficientemente. Por fim, na seção 5.5, analisaremos algumas evidências para a verdade da conjectura.

5.1 Representações básicas

Sejam $P = (X, \prec)$ uma ordem PI e \mathcal{R} um modelo PI de P . Sabemos que $a \parallel b \iff T_a \parallel T_b$ em \mathcal{R} . Além disso, note que $T_a \parallel T_b$ se e somente se ou $t(T_a) \ll t(T_b)$ e $e(b(T_b)) \ll d(b(T_a))$, ou $t(T_b) \ll t(T_a)$ e $e(b(T_a)) \ll d(b(T_b))$. Sejam $a, b \in X$, tais que $a \parallel b$. Dizemos que \mathcal{R} possui a *representação básica* (a, b) , denotando por $\mathcal{R}(a, b)$, se $t(T_a) \ll t(T_b)$ (e, conseqüentemente, $e(b(T_b)) \ll d(b(T_a))$). Assim, para todo $a \parallel b$, ocorre ou $\mathcal{R}(a, b)$, ou $\mathcal{R}(b, a)$.

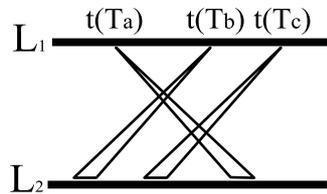
Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem e considere os elementos distintos $a, b, c, d \in X$ tais que $a \parallel b$ e $c \parallel d$. Dizemos que (a, b) é *compatível* com (c, d) se existir \mathcal{R} ,

um modelo PI de $P[\{a, b, c, d\}]$, no qual ocorrem $\mathcal{R}(a, b)$ e $\mathcal{R}(c, d)$. Note que esta relação de compatibilidade é simétrica.

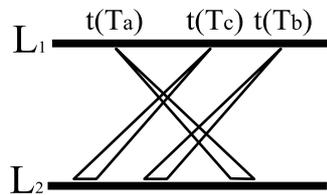
Lema 5.1. *Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem e considere os elementos distintos $a, b, c \in X$, tais que $a \parallel b$ e $a \parallel c$. Então, tanto (a, b) é compatível com (a, c) , quanto (b, a) é compatível com (c, a) .*

Demonstração. Vamos mostrar por enumeração de casos que (a, b) é compatível com (a, c) . Considere as possíveis comparabilidades entre b e c :

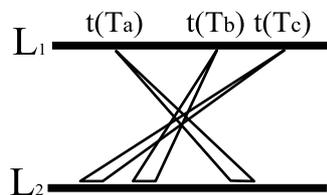
(i) $b \prec c$:



(ii) $b \succ c$:



(iii) $b \parallel c$:



Para mostrar que (b, a) é compatível com (c, a) , basta usar os modelos dos casos acima refletidos horizontalmente. \square

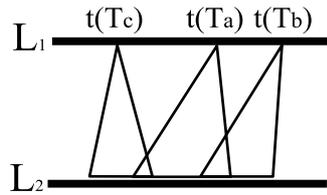
Lema 5.2. *Seja $P = (X, \prec)$ e considere os elementos distintos $a, b, c \in X$, tais que $a \parallel b$ e $a \parallel c$. Então, (a, b) é compatível com (c, a) se e somente se $b \not\prec c$.*

Demonstração. Novamente, vamos demonstrar por enumeração de casos:

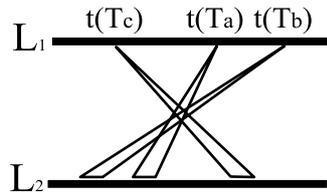
(i) $b \prec c$

Suponha que exista \mathcal{R} , um modelo PI de $P[\{a, b, c\}]$, tal que ocorre $\mathcal{R}(a, b)$. Logo, $t(T_a) \ll t(T_b)$. Como $b \prec c$, então $t(T_b) \ll t(T_c)$, e portanto, $t(T_a) \ll t(T_c)$. Conseqüentemente, ocorre $\mathcal{R}(a, c)$. Logo, (a, b) não é compatível com (c, a) .

(ii) $b \succ c$:



(iii) $b \parallel c$:



□

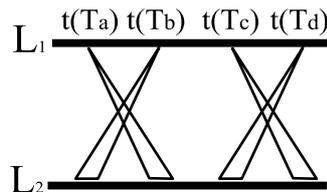
Lema 5.3. *Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem e considere os elementos $a, b, c, d \in X$ distintos, tais que $a \parallel b$, $c \parallel d$. Então, (a, b) é compatível com (c, d) se e somente se não ocorrer simultaneamente $a \parallel c$, $b \parallel d$, $a \not\parallel d$ e $b \not\parallel c$.*

Demonstração. Também será demonstrado por enumeração de casos. Como são quatro duplas cujas comparabilidades estão indefinidas $((a, c), (b, d), (a, d), (b, c))$, a princípio teríamos que enumerar $3^4 = 81$ casos. Porém, iremos eliminar casos

equivalentes com o objetivo de diminuir a quantidade de casos a serem analisados. Por casos equivalentes, nos referimos aos casos onde as comparabilidades entre os elementos são as mesmas que um outro caso já analisado, a menos de uma troca de papéis entre as duplas (a, b) e (c, d) . Portanto, desconsideraremos a análise de $c \prec a$, dado que faremos a análise completa de quando $a \prec c$. Da mesma forma, quando os casos nos quais $a \parallel c$ e $b \prec d$ estiverem totalmente analisados, então podemos eliminar a análise dos casos nos quais $a \parallel c$ e $b \succ d$. Além disso, quando os casos nos quais $a \parallel c$, $b \parallel d$ e $a \prec d$ forem totalmente analisados, torna-se dispensável a análise dos casos nos quais $a \parallel c$, $b \parallel d$ e $b \succ c$. Este são os três grupos de casos que não serão analisados, além de mais alguns casos específicos, que serão mostrados durante a enumeração. Finalmente, eliminaremos também da análise todos os casos onde as comparabilidades entre a, b, c, d contradizem o fato de que $a \parallel b$, $c \parallel d$ e de que P é uma ordem. Ou seja, casos nos quais haja as comparabilidades $(a \prec c \text{ e } b \succ c)$ ou $(a \succ c \text{ e } b \prec c)$ ou $(a \prec d \text{ e } b \succ d)$ ou $(a \succ d \text{ e } b \prec d)$ serão desconsiderados. Com estes cortes na árvore de buscas, serão analisados 37 casos.

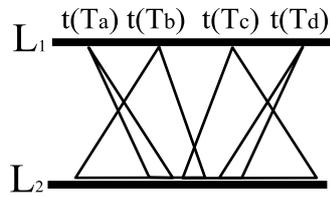
Passemos a enumerar os casos pelo método sistemático de *backtracking* colocando comparabilidades entre a e c , b e d , a e d e, finalmente, b e c , nesta ordem. Para cada dupla, a seqüência de atribuições de comparabilidade entre seus elementos será a ordem $(\prec, \succ, \parallel)$. Próximos estados que representem casos que sejam equivalentes a outros já enumerados ou contrariem a ordem P e o fato de que $a \parallel b$ e $c \parallel d$ serão “podados” da árvore de busca e o motivo será resumidamente mostrado entre parênteses.

$$(1) a \prec c, b \prec d, a \prec d, b \prec c$$



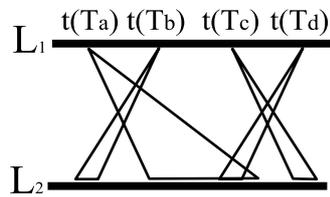
$$(2) a \prec c, b \prec d, a \prec d, b \succ c \text{ (desconsiderado: } a \prec c, b \succ c)$$

(3) $a \prec c, b \prec d, a \prec d, b \parallel c$



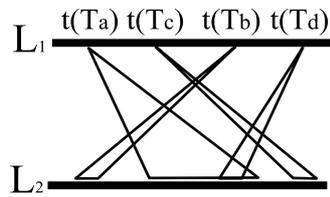
(4) $a \prec c, b \prec d, a \succ d$ (*desconsiderado: $a \prec c, a \succ d$*)

(5) $a \prec c, b \prec d, a \parallel d, b \prec c$



(6) $a \prec c, b \prec d, a \parallel d, b \succ c$ (*desconsiderado: $a \prec c, b \succ c$*)

(7) $a \prec c, b \prec d, a \parallel d, b \parallel c$



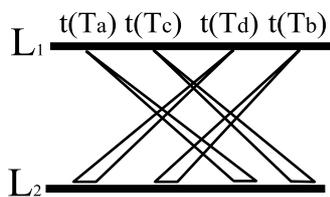
(8) $a \prec c, b \succ d, a \prec d$ (*desconsiderado: $b \succ d, a \prec d$*)

(9) $a \prec c, b \succ d, a \succ d$ (*desconsiderado: $a \prec c, a \succ d$*)

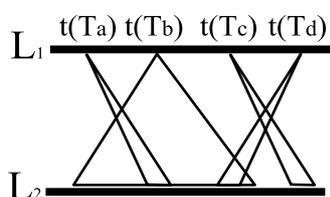
(10) $a \prec c, b \succ d, a \parallel d, b \prec c$ (*desconsiderado: $b \succ d, b \prec c$*)

(11) $a \prec c, b \succ d, a \parallel d, b \succ c$ (*desconsiderado: $a \prec c, b \succ c$*)

(12) $a \prec c, b \succ d, a \parallel d, b \parallel c$

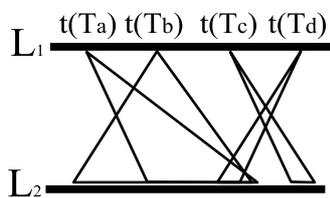


(13) $a \prec c, b \parallel d, a \prec d, b \prec c$



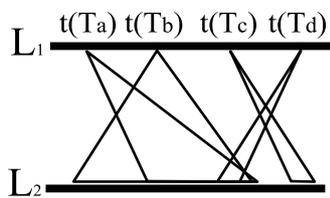
(14) $a \prec c, b \parallel d, a \prec d, b \succ c$ (*desconsiderado: $a \prec c, b \succ c$*)

(15) $a \prec c, b \parallel d, a \prec d, b \parallel c$



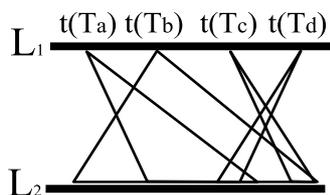
(16) $a \prec c, b \parallel d, a \succ d$ (*desconsiderado: $a \prec c, a \succ d$*)

(17) $a \prec c, b \parallel d, a \parallel d, b \prec c$



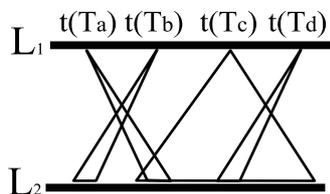
(18) $a \prec c, b \parallel d, a \parallel d, b \succ c$ (*desconsiderado: $a \prec c, b \succ c$*)

(19) $a \prec c, b \parallel d, a \parallel d, b \parallel c$



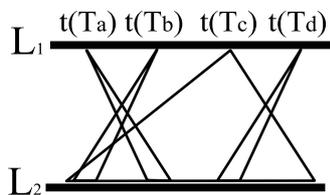
(20) $a \succ c$ (*desconsiderado*: equivalentes aos casos nos quais $a \prec c$)

(21) $a \parallel c, b \prec d, a \prec d, b \prec c$



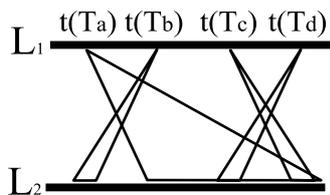
(22) $a \parallel c, b \prec d, a \prec d, b \succ c$ (*desconsiderado*: $b \prec d, b \succ c$)

(23) $a \parallel c, b \prec d, a \prec d, b \parallel c$



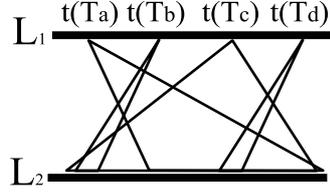
(24) $a \parallel c, b \prec d, a \succ d$ (*desconsiderado*: $b \prec d, a \succ d$)

(25) $a \parallel c, b \prec d, a \parallel d, b \prec c$



(26) $a \parallel c, b \prec d, a \parallel d, b \succ c$ (*desconsiderado*: $b \prec d, b \succ c$)

$$(27) \quad a \parallel c, b \prec d, a \parallel d, b \parallel c$$



$$(28) \quad a \parallel c, b \succ d \text{ (desconsiderado: equivalentes aos casos nos quais } a \parallel c, b \prec d)$$

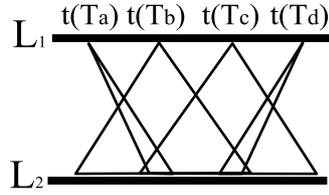
$$(29) \quad a \parallel c, b \parallel d, a \prec d, b \prec c$$

Suponha que exista \mathcal{R} , um modelo PI de $P[\{a, b, c, d\}]$, tal que ocorra $R(a, b)$ e $R(c, d)$. Como $b \prec c$, então $t(T_a) \ll t(T_b) \ll t(T_c) \ll t(T_d)$. Como $a \prec d$ e $a \parallel c$, então $e(b(T_c)) \ll e(b(T_d))$. Agora, a única maneira de T_b ter interseção com T_d é tendo interseção com T_c , o que contradiz $b \prec c$. Logo, (a, b) não é compatível com (c, d) .

$$(30) \quad a \parallel c, b \parallel d, a \prec d, b \succ c$$

Suponha que exista \mathcal{R} , um modelo PI de $P[\{a, b, c, d\}]$, tal que ocorra $R(a, b)$ e $R(c, d)$. Então, podemos ter ao todo quatro possibilidades para a ordenação dos topos: $t(T_a)$ e $t(T_c)$ em alguma ordem seguidos de $t(T_b)$ e $t(T_d)$ em alguma ordem. Suponha que $t(T_a) \ll t(T_c)$. Como ocorre $\mathcal{R}(c, d)$, então $d(b(T_c)) \gg e(b(T_d))$. Agora, como $a \prec d$, seja qual for a posição de $t(T_b)$ em relação à $t(T_d)$, para que T_b tenha interseção com T_a , é necessário que T_b tenha interseção com T_c , o que contradiz $b \succ c$. De maneira análoga, se $t(T_c) \ll t(T_a)$, como ocorre $\mathcal{R}(a, b)$, então $d(b(T_a)) \gg e(b(T_b))$. Agora, como $c \prec b$, seja qual for a posição de $t(T_d)$ em relação à $t(T_b)$, para que T_d tenha interseção com T_c , é necessário que T_d tenha interseção com T_a . Contradição com a suposição de que $a \prec d$. Logo, (a, b) não é compatível com (c, d) .

$$(31) a \parallel c, b \parallel d, a \prec d, b \parallel c$$

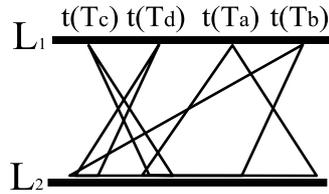


$$(32) a \parallel c, b \parallel d, a \succ d, b \prec c$$

Suponha que exista \mathcal{R} , um modelo PI de $P[\{a, b, c, d\}]$, tal que ocorra $R(a, b)$ e $R(c, d)$. Como $b \prec c$, temos que $t(T_a) \ll t(T_b) \ll t(T_c) \ll t(T_d)$. Isto contradiz $a \succ d$. Logo, (a, b) é incompatível com (c, d) .

$$(33) a \parallel c, b \parallel d, a \succ d, b \succ c \text{ (desconsiderado: equivalente ao caso no qual } a \parallel c, b \parallel d, a \prec d \text{ e } b \prec c)$$

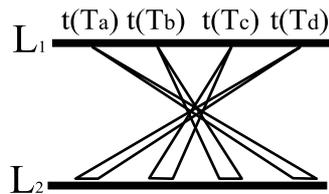
$$(34) a \parallel c, b \parallel d, a \succ d, b \parallel c$$



$$(35) a \parallel c, b \parallel d, a \parallel d, b \prec c \text{ (desconsiderado: equivalente ao caso no qual } a \parallel c, b \parallel d, a \succ d \text{ e } b \parallel c)$$

$$(36) a \parallel c, b \parallel d, a \parallel d, b \succ c \text{ (desconsiderado: equivalente ao caso no qual } a \parallel c, b \parallel d, a \prec d \text{ e } b \parallel c)$$

$$(37) a \parallel c, b \parallel d, a \parallel d, b \parallel c$$



□

5.2 Uma nova caracterização dos grafos PI

Seja $P = (X, \prec)$ uma ordem e $G^I = (X, E^I)$ o grafo de incomparabilidade de P . Construiremos o grafo $G^P = (V^P, E^P)$ da seguinte forma:

- $V^P = \{(x, y), (y, x) \mid (x, y) \in E^I\}$;
- $E^P = \{((x, y), (w, z)) \mid (x, y) \text{ é compatível com } (w, z)\}$.

Como exemplo, na figura 5.1 apresentamos uma ordem P e o grafo G^P associado. Nesta representação, estamos representando com uma linha pontilhada as não-arestas de G^P . Ou seja, considere que há aresta entre quaisquer dois vértices não-irmãos que não estejam ligados por uma linha pontilhada.

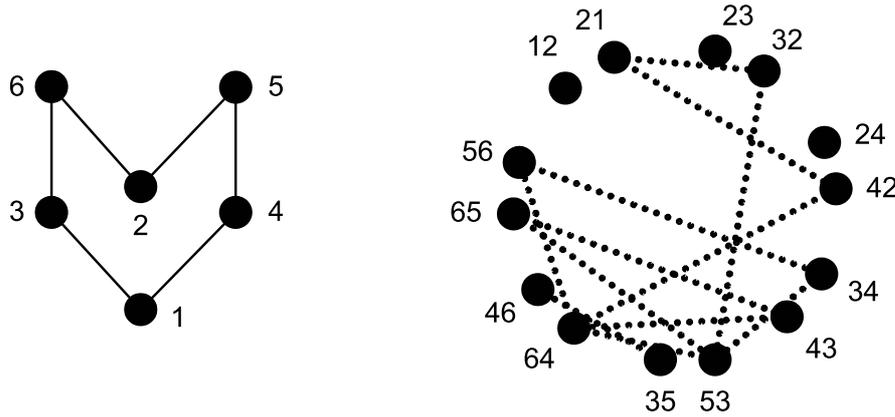


Figura 5.1: Exemplo de ordem P e grafo G^P associado.

Seja m o número de pares distintos incomparáveis de P , i.e., $m = |E^I|$. Por conveniência, para denotar os elementos de V^P , usaremos xy no lugar de (x, y) quando não se causar ambigüidades.

Teorema 5.4. *P é uma ordem PI se e somente se existir uma clique C em G^P de tamanho m na qual não ocorre $xy, yz, zx \in C$, para quaisquer $x, y, z \in X$ distintos.*

Demonstração. Sejam P uma ordem PI e \mathcal{R} um modelo PI de P . Seja $C = \{xy \mid x \parallel y \text{ e ocorre } \mathcal{R}(x, y)\}$. Note que exatamente um vértice de cada uma

das m duplas (xy, yx) pertencem a C e, portanto, $|C| = m$. Seja $u_1u_2 \in C$ o vértice associado ao par $x \parallel y$ e $v_1v_2 \in C$ o vértice associado ao par $w \parallel z$. Como ocorre $\mathcal{R}(u_1, u_2)$ e $\mathcal{R}(v_1, v_2)$, por construção de C , então (u_1, u_2) é compatível com (v_1, v_2) . Logo, $(u_1u_2, v_1v_2) \in E^P$. Isto é suficiente para mostrar que existe uma clique de tamanho m em G^P . Além disso, dado $z \in X$ tal que $x \parallel z$ e $y \parallel z$, como a ocorrência de $\mathcal{R}(x, y)$ e $\mathcal{R}(y, z)$ implica na ocorrência de $\mathcal{R}(x, z)$, então para quaisquer $x, y, z \in X$ distintos, temos que não ocorre $xy, yz, zx \in C$.

Reciprocamente, seja $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma clique de tamanho m de G^P , tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ distintos, temos que não ocorre $xy, yz, zx \in C$. Como $(xy, yx) \notin E^P$ para todo $x \parallel y$ em P , então cada v_i está associado a um par distinto de elementos incomparáveis em P , $1 \leq i \leq m$.

Seja \prec_L a relação binária em X que se obtém adicionando-se à relação \prec o par (x, y) se $xy \in C$, para todo $x \parallel y$ em P . Vamos mostrar que $P_L = (X, \prec_L)$ é uma extensão linear de P . Como \prec_L é uma relação formada apenas acrescentando-se novas comparabilidades a \prec , e para cada par distinto de elementos incomparáveis $x \parallel y$ em P , há a adição ou de (x, y) ou de (y, x) em \prec_L , então basta mostrar que \prec_L é transitiva para demonstrar que P_L de fato é uma ordem e em particular uma extensão linear de P . Suponha, por absurdo, que \prec_L não é transitiva. Então, considere o processo de se adicionar seqüencialmente novas relações a \prec até que se produza a relação \prec_L , uma para cada vértice de C , em qualquer ordem. Então, em algum momento, uma relação (x, y) , associada ao vértice $xy \in C$, não poderá ser adicionada a \prec_L sem que a relação se mantenha acíclica, pois existem as relações $y \prec_L z$ e $z \prec_L x$, para algum $z \in X$. Analisemos os casos de como estas relações podem estar em \prec . Ambas não poderiam estar inicialmente em \prec , pois caso contrário, x não seria incomparável a y . Se somente $y \prec z$, então como $z \prec_L x$, temos que $zx \in C$. Porém, como $y \prec z$, (x, y) não é compatível com (z, x) e portanto xy e zx não poderiam estar simultaneamente em C , uma contradição. Analogamente, se somente $z \prec x$, então como $y \prec_L z$, temos que $yz \in C$. Porém, como $z \prec x$, (y, z) não é compatível com (x, y) e portanto yz e xy não poderiam estar simultaneamente em C , chegando novamente em uma contradição.

Por último, se nem $y \prec z$, nem $z \prec x$, então em C existiriam $x, y, z \in X$ tais que $xy, yz, zx \in C$, o que é absurdo pela hipótese. Logo, $P_L = (X, \prec_L)$ é, de fato, extensão linear de P .

Seja $X_i \subseteq X$ os primeiros i elementos na ordem P_L . Vamos mostrar que, para qualquer $1 \leq i \leq |X|$, existe \mathcal{R} , um modelo PI de $P[X_i]$, tal que a ordem dos topos dos triângulos em \mathcal{R} seja precisamente a ordem $P_L[X_i]$. Note que se $i = |X|$, então \mathcal{R} é um modelo PI de P , finalizando a prova. Iremos mostrar esta afirmação por indução em $k = |X|$. Se $k = 1$, então \mathcal{R} consiste de um único triângulo e a proposição é trivialmente verdadeira. Suponha que exista um modelo PI de $P[X_i]$ que respeite a ordem $P_L[X_i]$ dos topos dos triângulos, para qualquer $1 \leq k < |X|$. Seja $k = |X|$ e considere x o elemento maximal de P_L . Seja $P' = P[X \setminus \{x\}]$. Então, por hipótese de indução, existe um modelo PI de P' que respeita a ordem $P_L[X_{|X|-1}]$ dos topos dos triângulos. Seja \mathcal{R}' tal modelo. Construiremos \mathcal{R} a partir de \mathcal{R}' da maneira que se segue:

- (i) Coloquemos o triângulo T_x à direita de todos os triângulos em \mathcal{R}' .
- (ii) Seja T_y o triângulo cuja base possui um dos pontos extremos $e(b(T_y))$ ou $d(b(T_y))$ imediatamente à esquerda de $e(b(T_x))$ (o extremo de $b(T_y)$ que está imediatamente à esquerda de $e(b(T_x))$ é o ponto $d(b(T_y))$); o propósito desta condição mais geral é servir para as iterações posteriores do procedimento que estamos descrevendo). Seja p tal ponto. Se $x \parallel y$ em P , como $t(T_y) \ll t(T_x)$, então pela construção de P_L o vértice $yx \in C$. Troque de posição o ponto p com $e(b(T_x))$. Repita este passo geral até que o ponto $e(b(T_x))$ vá parar na posição mais à esquerda de \mathcal{R}' , caso em que podemos dar por encerrado a montagem de \mathcal{R} , ou até que se encontre um T_y tal que $y \prec x$. Para continuar a prova, suponha que tal T_y foi encontrado.
- (iii) Suponha que exista T_w tal que $w \parallel x$, mas $d(b(T_w)) \ll d(b(T_y))$ e que, portanto, o modelo \mathcal{R} ainda estaria incompleto no mínimo por faltar a interseção de T_w com T_x . Se mais de um triângulo for candidato à T_w , escolha aquele com o ponto $d(b(T_w))$ mais à direita. Para que esta interseção que

falta ocorra, tente mover o ponto $d(b(T_w))$ para a posição imediatamente à direita do ponto $e(b(T_x))$. Se isto for possível, i.e., se esta mudança preservar as comparabilidades entre os elementos (exceto a de w e x , naturalmente), então repetimos este passo geral de identificação de um T_w até que não exista mais algum T_w nestas condições, situação em que novamente podemos dar o processo de montagem de \mathcal{R} por encerrado. Porém, suponha que, para um certo T_w , isto não seja possível, por trazer incomparabilidades indesejadas. Então, existe $z \in X$ tal que $w \prec z$ e $e(b(T_z)) \ll d(b(T_y))$ (note que, por construção, $d(b(T_y))$ e $e(b(T_x))$ são consecutivos). Podemos inferir que $w \parallel y$, pois caso contrário, se $w \prec y$, então $w \prec x$ e se $y \prec w$, então haveria contradição com a suposição de que $d(b(T_w)) \ll d(b(T_y))$. Podemos inferir também que $z \parallel x$, pois caso contrário, se $z \prec x$, então $w \prec x$ e se $x \prec z$, então haveria contradição no fato de que $t(T_x)$ é o topo mais à direita no modelo \mathcal{R} . Por fim, como $e(b(T_z)) \ll d(b(T_y))$, $y \prec x$ e $z \parallel x$, então $y \parallel z$. Analisemos as três possibilidades para as posições relativas de $t(T_w)$, $t(T_y)$ e $t(T_z)$:

- $t(T_y) \ll t(T_w) \ll t(T_z)$: Como $w \parallel y$, então $yw \in C$. Similarmente, $zx \in C$. Por outro lado, como $y \parallel z$, $w \parallel x$, $y \prec x$ e $w \prec z$, então pelo lema 5.3, (y, w) não é compatível com (z, x) e, portanto, $(yw, zx) \notin E^P$. Contradição com a suposição de que $yw, zx \in C$.
- $t(T_w) \ll t(T_y) \ll t(T_z)$: Como $w \parallel x$, então $wx \in C$. Similarmente, $yz \in C$. Por outro lado, como $w \parallel y$, $x \parallel z$, $w \prec z$ e $y \prec x$, então pelo lema 5.3, (w, x) não é compatível com (y, z) . Logo, $(wx, yz) \notin E^P$. Contradição com a suposição de que $wx, yz \in C$.
- $t(T_w) \ll t(T_z) \ll t(T_y)$ (vide figura 5.2): Vamos mover o ponto $d(b(T_y))$ para a posição imediatamente à esquerda de $d(b(T_w))$. Este movimento só não é possível se existir $z' \in X$ tal que $w \prec z'$, $t(T_y) \ll t(T_{z'})$ e $z' \parallel y$, pois com o movimento $T_{z'}$ perderia a interseção com T_y . Suponha que tal elemento exista. Então, $z' \parallel x$ (pois caso contrário, se $z' \prec x$

então $w \prec x$ e se $x \prec z'$ então haveria contradição com o fato de que $t(T_x)$ é o topo mais à direita no modelo). Repare que z' possui as mesmas comparabilidades que z em relação a w , y e x . Por raciocínio análogo ao caso anterior, com z' no papel de z , chegamos à conclusão de que a ordem de topos $t(T_w) \ll t(T_y) \ll t(T_{z'})$ é absurda. Logo, tal elemento não existe. Podemos então mover o ponto $d(b(T_y))$ para a posição imediatamente à esquerda de $d(b(T_w))$.

Agora, vamos mover o ponto $e(b(T_z))$ para a posição imediatamente à direita de $e(b(T_x))$. Este movimento só não é possível se existir $y' \in X$ tal que $y' \prec x$, $y' \parallel z$ e $t(T'_y) \ll t(T_z)$. Similarmente, a suposição de que tal elemento exista, nos leva a concluir que $y' \parallel w$ e verificar que y' possuiria as mesmas comparabilidades que y em relação a w , z e x . Por raciocínio análogo aos casos anteriores, com y' no papel de y , chegamos à conclusão de que a ordem de topos $t(T_w) \ll t(T'_y) \ll t(T_z)$ ou $t(T'_y) \ll t(T_w) \ll t(T_z)$ são absurdas. Logo, tal elemento também não existe. Então, podemos mover o ponto $e(b(T_z))$ para a posição imediatamente à direita de $e(b(T_x))$.

Com esta modificação no modelo, temos que o triângulo cuja base possui um dos pontos extremos imediatamente à esquerda de $e(b(T_x))$ não é mais T_y , e T_w está agora numa posição no modelo tal que T_y não o impede mais de eventualmente ter interseção com T_x . Logo, podemos voltar ao segundo passo do procedimento geral com progresso feito no processo de montagem do modelo \mathcal{R} .

É fácil ver que após o término do algoritmo o modelo \mathcal{R} produzido é de fato um modelo PI de P , pois todas as incomparabilidades de x estão representadas em \mathcal{R} e todas as comparabilidades foram respeitadas durante a modificação do modelo \mathcal{R}' . □

Dados uma ordem $P = (X, \prec)$ e uma clique C do grafo G^P , diremos que C é *acíclica* se para todo $x, y, z \in X$ distintos, $\{xy, yz, zx\} \not\subseteq C$. Com esta definição, o

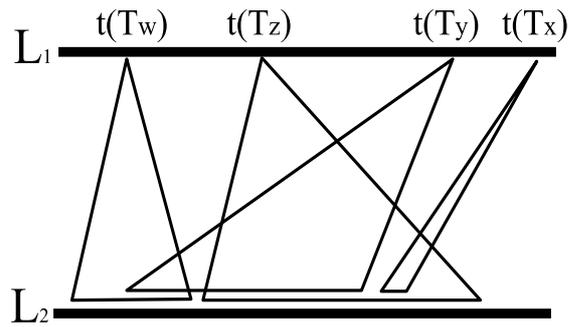


Figura 5.2: Caso $t(T_w) \ll t(T_z) \ll t(T_y)$.

teorema 5.4 pode ser enunciado da seguinte forma: P é uma ordem PI se e somente se existir uma clique acíclica em G^P de tamanho m . Na figura 5.3, o conjunto de vértices marcados é uma clique acíclica de G^P de tamanho m (note que não existe nenhuma não-aresta ligando dois de tais vértices). Por outro lado, qualquer clique que contiver os vértices 32, 24 e 43 não será acíclica.

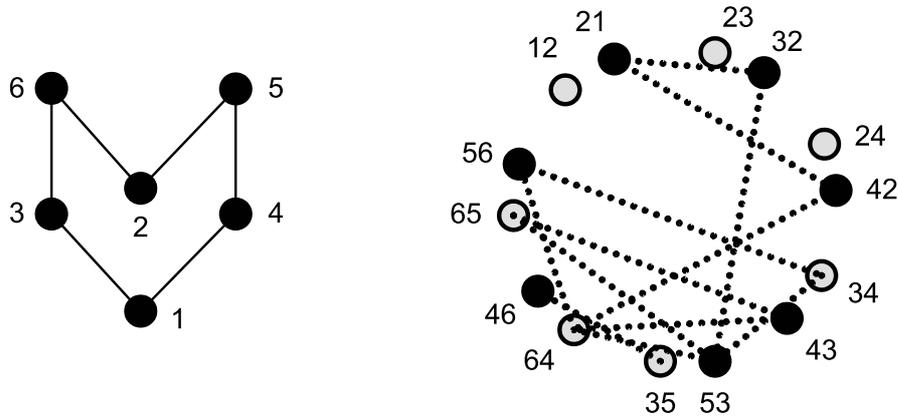


Figura 5.3: Exemplo de uma clique acíclica em G^P .

5.3 Problema da maior clique de um subgrafo de octaedro generalizado

Um grafo G é dito ser um *octaedro generalizado* se existir uma nova rotulação v_1, \dots, v_{2k} de seus vértices tal que $(v_i, v_j) \notin E(G) \iff$ existe $1 \leq p \leq k$ tal que $i = 2p - 1$ e $j = 2p$. Os vértices v_{2p-1} e v_{2p} são chamados de *vértices irmãos*, $1 \leq p \leq k$. Se G' é um subgrafo gerador de um octaedro generalizado, diremos simplesmente que G' é um *subgrafo de octaedro generalizado (SOG)*. Portanto, G' é um *SOG* se existir uma rotulação v_1, \dots, v_{2k} de seus vértices tal que para todo $1 \leq p \leq k$, $(v_{2p-1}, v_{2p}) \notin E(G')$.

Seja G um *SOG*. Note que qualquer clique de G possui no máximo um vértice de cada dupla (v_{2p-1}, v_{2p}) , $1 \leq p \leq k$, pois, por definição, não existe a aresta que une vértices irmãos. Conseqüentemente, k é um limite superior para o tamanho de uma clique máxima em G . A questão de determinar se de fato existe uma clique de tamanho k em G é o que chamaremos de *problema da maior clique de um subgrafo de octaedro generalizado* e é do que trataremos a seguir.

A busca exaustiva por uma clique de tamanho k não nos leva a um procedimento eficiente. Basta notar que existem 2^k possibilidades de cliques a serem analisadas, um número exponencial de possibilidades no tamanho do grafo. No entanto, podemos responder a esta questão de maneira eficiente. Iremos mostrar uma redução deste problema ao problema 2-SAT, o qual admite solução polinomial [1].

O problema 2-SAT é assim formulado. Dado um conjunto U de n variáveis lógicas (que admitem a valoração ou *verdadeiro* (V) ou *falso* (F)), e um conjunto S de m cláusulas *OU* binárias ($(u \vee v)$ é uma cláusula *OU* binária, onde $u, v \in U$), responder se existe uma valoração das n variáveis tal que todas as m cláusulas sejam satisfeitas, ou seja, se a conjunção das m cláusulas é satisfatível. Abusando da notação, denotaremos por $u = V$ ou $u = F$ que à variável $u \in U$ é atribuído o valor verdadeiro ou falso, respectivamente.

Seja G um *SOG*. Vamos construir uma instância I_G de 2-SAT da seguinte maneira:

- $U = \{u_i \mid 1 \leq i \leq k\}$
- $S = \{(\neg u_i \vee \neg u_j) \mid 1 \leq i < j \leq k \text{ e } (v_{2i-1}, v_{2j-1}) \notin E(G)\} \cup$
 $\cup \{(u_i \vee \neg u_j) \mid 1 \leq i < j \leq k \text{ e } (v_{2i}, v_{2j-1}) \notin E(G)\} \cup$
 $\cup \{(\neg u_i \vee u_j) \mid 1 \leq i < j \leq k \text{ e } (v_{2i-1}, v_{2j}) \notin E(G)\} \cup$
 $\cup \{(u_i \vee u_j) \mid 1 \leq i < j \leq k \text{ e } (v_{2i}, v_{2j}) \notin E(G)\}$

Teorema 5.5. G possui uma clique de tamanho k se e somente se I_G for satisfatível.

Demonstração. Seja C uma clique de tamanho k de G . Crie uma valoração para as variáveis tal que $u_i = V \iff v_{2i-1} \in C, 1 \leq i \leq k$.

Suponha, por absurdo, que exista uma cláusula $M \in S$ que não seja satisfeita por esta atribuição.

Como $(v_{2i-1}, v_{2i}) \notin E(G)$, então v_{2i-1} e v_{2i} não podem ambos pertencer a C , $1 \leq i \leq k$. Por outro lado, como $|C| = k$, então ou v_{2i-1} ou v_{2i} pertence a C , $1 \leq i \leq k$. Analisemos as possibilidades.

- (i) $M = (\neg u_i \vee \neg u_j)$: Logo, por construção, $(v_{2i-1}, v_{2j-1}) \notin E(G)$, e portanto v_{2i-1} e v_{2j-1} não pertencem ambos a C . Pela observação acima, v_{2i} ou v_{2j} pertencem a C . Conseqüentemente, pela atribuição de verdade, $u_i = F$ ou $u_j = F$, implicando que M é satisfeita. Contradição.
- (ii) $M = (u_i \vee \neg u_j)$: Logo, por construção, $(v_{2i}, v_{2j-1}) \notin E(G)$, e portanto v_{2i} e v_{2j-1} não pertencem ambos a C . Pela observação acima, v_{2i-1} ou v_{2j} pertencem a C . Conseqüentemente, pela atribuição de verdade, $u_i = V$ ou $u_j = F$, implicando que M é satisfeita. Contradição.
- (iii) $M = (\neg u_i \vee u_j)$: Logo, por construção, $(v_{2i-1}, v_{2j}) \notin E(G)$, e portanto v_{2i-1} e v_{2j} não pertencem ambos a C . Pela observação acima, v_{2i} ou v_{2j-1}

pertencem a C . Conseqüentemente, pela atribuição de verdade, $u_i = F$ ou $u_j = V$, implicando que M é satisfeita. Contradição.

- (iv) $M = (u_i \vee u_j)$: Logo, por construção, $(v_{2i}, v_{2j}) \notin E(G)$, e portanto v_{2i} e v_{2j} não pertencem ambos a C . Pela observação acima, v_{2i-1} ou v_{2j-1} pertencem a C . Conseqüentemente, pela atribuição de verdade, $u_i = V$ ou $u_j = V$, implicando que M é satisfeita. Contradição.

Logo, I_G é satisfatível.

Seja, agora, uma valoração para as variáveis que satisfaz I_G . Seja C um conjunto de vértices tal que $v_{2i-1} \in C \iff u_i = V$ e $v_{2i} \in C \iff u_i = F$. Logo, $v_{2i-1} \in C$ ou $v_{2i} \in C$ e, conseqüentemente, $|C| = k$. Basta mostrar que C é uma clique de G . Suponha, por absurdo, que C não seja uma clique. Logo, existem $u, w \in C$ tais que $(u, w) \notin E(G)$. Analisemos as possibilidades:

- (i) $u = v_{2i-1}$, $w = v_{2j-1}$: Logo, a cláusula $M = (\neg u_i \vee \neg u_j) \in S$. Como a valoração das variáveis satisfaz em particular M , então $u_i = F$ ou $u_j = F$. Logo, pela escolha dos vértices pertencentes a C , $v_{2i} \in C$ ou $v_{2j} \in C$. Conseqüentemente, $v_{2i-1}, v_{2i} \in C$ ou $v_{2j-1}, v_{2j} \in C$. Absurdo.
- (ii) $u = v_{2i-1}$, $w = v_{2j}$: Logo, a cláusula $M = (\neg u_i \vee u_j) \in C$. Como a valoração das variáveis satisfaz em particular M , então $u_i = F$ ou $u_j = V$. Logo, pela escolha dos vértices pertencentes a C , $v_{2i} \in C$ ou $v_{2j-1} \in C$. Conseqüentemente, $v_{2i-1}, v_{2i} \in C$ ou $v_{2j-1}, v_{2j} \in C$. Absurdo.
- (iii) $u = v_{2i}$, $w = v_{2j-1}$: Logo, a cláusula $M = (u_i \vee \neg u_j) \in C$. Como a valoração das variáveis satisfaz em particular M , então $u_i = V$ ou $u_j = F$. Logo, pela escolha dos vértices pertencentes a C , $v_{2i-1} \in C$ ou $v_{2j} \in C$. Conseqüentemente, $v_{2i-1}, v_{2i} \in C$ ou $v_{2j-1}, v_{2j} \in C$. Absurdo.
- (iv) $u = v_{2i}$, $w = v_{2j}$: Logo, a cláusula $M = (u_i \vee u_j) \in C$. Como a valoração das variáveis satisfaz em particular M , então $u_i = V$ ou $u_j = V$. Logo, pela escolha dos vértices pertencentes a C , $v_{2i-1} \in C$ ou $v_{2j-1} \in C$. Conseqüentemente, $v_{2i-1}, v_{2i} \in C$ ou $v_{2j-1}, v_{2j} \in C$. Absurdo.

Portanto, C é uma clique de G de tamanho k . □

Corolário 5.6. *Seja G um grafo SOG. Então, o problema de encontrar uma clique de G de tamanho k é resolvido em tempo polinomial.*

Demonstração. Como a transformação envolvida na redução mostrada no teorema 5.5 claramente leva tempo polinomial e pelo fato de que 2-SAT é um problema resolvido em tempo polinomial, segue o resultado. □

5.4 Reconhecimento

Na seção 5.2 apresentamos uma caracterização dos grafos PI que reduz o problema de determinar se a ordem P é uma ordem PI ao problema de encontrar uma clique acíclica de determinado tamanho no grafo G^P . Note que, se não fosse pelo fato de que a clique a ser encontrada deve ser acíclica, o problema seria exatamente o problema da maior clique de um subgrafo de octaedro generalizado, apresentado na seção 5.3, cuja solução foi mostrada ser eficiente.

Tendo esta motivação, introduziremos uma conjectura que se for verdadeira implicará que o problema de reconhecer uma ordem PI (e, conseqüentemente, um grafo PI) é eficiente, resultado estabelecido pela corolário 5.8.

Conjectura 5.7. *Seja G^P o grafo com $2m$ vértices obtido da ordem P , conforme descrito anteriormente. Então, G^P tem uma clique acíclica de tamanho m se e somente se G^P tiver uma clique de tamanho m .*

Corolário 5.8. *Admitindo que a conjectura 5.7 seja verdadeira, então o problema de reconhecer grafos PI é resolvido em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja G um grafo. Se \overline{G} não puder ser orientado transitivamente, então G não é grafo de cocomparabilidade e, portanto, não é um grafo PI. Caso contrário, seja P a ordem induzida por uma orientação transitiva qualquer de \overline{G} . Pelo corolário 4.10, G é um grafo PI \iff P é uma ordem PI. Seja G^P o SOG construído a partir de P . Pelo teorema 5.4 e a conjectura 5.7, temos que P é uma

ordem PI $\iff G^P$ possui uma clique de tamanho m ($|V(G^P)| = 2m$), problema que pode ser resolvido eficientemente, conforme estabelece o corolário 5.6. \square

5.5 Análise da conjectura

Na seção anterior, apresentamos uma conjectura que, se verdadeira, acarreta que o problema de reconhecer grafos PI pode ser resolvido eficientemente. Apesar de não termos uma prova deste resultado, podemos nos perguntar: quais são as evidências de sua verdade? E, em não se tratando de uma verdade, aproveitando-se dos resultados deste capítulo, que outros caminhos poderíamos investigar? O objetivo desta seção é fazer algumas considerações sobre estas questões.

Primeiramente, faremos uma análise do ponto de vista prático. Como experiência, fizemos um programa para procurar por um contra-exemplo, i.e., um programa que gere ordens sistematicamente, ordens sobre conjuntos de cardinalidade crescente, e teste a conjectura. Mais especificamente, o programa deve enumerar ordens de tamanho n , onde n é um parâmetro de entrada, e para cada ordem P enumerada deve construir o grafo G^P associado e testar se, de todas as cliques de tamanho $|V(G^P)|/2$, nenhuma é acíclica. Para implementar a busca por tais cliques, usamos o algoritmo que busca uma clique qualquer de tamanho $|V(G^P)|/2$, adaptado para enumerar todas as soluções. Se não existem cliques deste tamanho, então a conjectura é verdadeira para esta instância. Caso contrário, geramos cliques até que se encontre uma que é acíclica, situação em que a conjectura é verdadeira para esta instância. Se para todas as cliques geradas existe o subconjunto de vértices $\{xy, yz, zx\}$, para x, y, z distintos, então esta instância constitui um contra-exemplo para a conjectura.

Note que o número $N(n)$ de ordens de tamanho n é considerável para que o programa tenha um bom desempenho na prática, exceto para valores pequenos de n . Basta notar que todas as permutações dos n elementos, cada uma formando uma ordem linear, constitui um subconjunto das ordens a serem geradas, i.e., $N(n) = \Omega(n!)$. E este limite inferior é bem pouco apertado; em [33, 32], mostra-

se que $N(10) = 6.611.065.248.783$, enquanto $10! = 3.628.800$. Gerando-se 1000 ordens por segundo, levaria-se mais de 200 anos para completar o trabalho.

Entretanto, não precisaremos gerar todas as ordens de tamanho n . Todas as ordens intervalares e ordens de permutação geradas no processo de enumeração podem ser descartadas, justificado pelo lema 5.9.

Lema 5.9. *Se P for ordem intervalar ou ordem de permutação, então a conjectura 5.7 é verdadeira.*

Demonstração. Seja P uma ordem intervalar ou ordem de permutação. Logo, P é uma ordem PI. Pelo teorema 5.4, existe uma clique acíclica de tamanho $|V(G^P)|/2$ em G^P . Logo, vale a conjectura para P . \square

Corrêa e Szwarcfiter em 2005 [10] mostram como gerar todas as ordens de n elementos acrescentando-se elementos a uma dada ordem de k elementos, $k \leq n$. Em [28], encontramos uma caracterização dos grafos de comparabilidade por subgrafos proibidos. É sabido que uma ordem é intervalar se e somente se não possuir $2 + 2$ como subordem induzida e que uma ordem é de permutação se e somente se o seu grafo de incomparabilidade for de comparabilidade [21]. Usando estes ingredientes e o lema 5.9, nossa estratégia para diminuir o número de ordens de tamanho n a serem geradas será a seguinte. Tome todos os subgrafos proibidos para grafos de comparabilidade com n ou menos vértices. Para cada subgrafo S com $k \leq n$ vértices, encontre a ordem P' induzida por uma orientação transitiva de \bar{S} . Se não existir uma, então S é descartado pois não pode ser o grafo de incomparabilidade de nenhuma ordem. Descarte P' caso não exista um $2 + 2$ como subordem induzida. Caso exista, usando [10] e P' como ordem de entrada, obtenha o conjunto \mathcal{S} de todas as ordens de tamanho n que contém como subordem a ordem P' . Logo, qualquer ordem pertencente a \mathcal{S} não é intervalar por conter $2 + 2$ como subordem induzida e não é de permutação pois o grafo de incomparabilidade de P' (o grafo S) é proibido para comparabilidade por construção. Conseqüentemente, P' é uma ordem desejada para o teste da conjectura. Para a geração de ideais

(*upsets* e *downsets*), necessária em um dos passos do algoritmo de [10], usamos a implementação de Barbosa e Szwarcfiter de 1999 [2].

Assim, com um número menor de ordens a analisar, o programa conseguiu analisar todas as ordens de tamanho 10 e mais de 1.500.000.000 de ordens de tamanho 11 *que não são nem ordens de intervalo nem de permutação*, utilizando 9 máquinas trabalhando em paralelo por aproximadamente dois meses. Nenhum contra-exemplo foi encontrado.

Do ponto de vista teórico, também existe uma justificativa para se acreditar que a conjectura seja verdadeira, conforme veremos a seguir.

Tome o grafo $G = G^P$, um grafo *SOG*, e sejam a, a', b, b' vértices tais que $a-a'$ e $b-b'$ formam dois pares de vértices irmãos do *SOG* G tais que entre eles faltem no mínimo duas arestas das quatro possíveis. Mais precisamente, sejam $a = v_{2i-1}$, $a' = v_{2i}$, $b = v_{2j-1}$, $b' = v_{2j}$, para algum $1 \leq i < j \leq |V(G)|/2$, tais que no mínimo duas arestas do conjunto $\{(a, b), (a', b), (a, b'), (a', b')\}$ não pertençam a $E(G)$. Se existirem tais pares com esta propriedade, faça:

- Se não existir nenhuma aresta entre eles, então G não tem clique de tamanho $|V(G)|/2$.
- Se existir somente a aresta (a, b) , então há uma clique de tamanho $|V(G)|/2$ somente se ela contém a e b . Portanto, contraia a com b e a' com b' , criando respectivamente os vértices irmãos $a-b$ e $a'-b'$, tal que $(u, a-b)$ é aresta do grafo resultante se e somente se (u, a) e (u, b) forem arestas do grafo original. Deixe o vértice $a'-b'$ isolado.
- Se existir somente as arestas (a, b) e (a', b') , então há uma clique de tamanho $|V(G)|/2$ somente se ela contém ou a e b ou a' e b' . Portanto, contraia a com b e a' com b' , criando respectivamente os vértices irmãos $a-b$ e $a'-b'$, tal que $(u, a-b)$ é aresta do grafo resultante se e somente se (u, a) e (u, b) forem arestas do grafo original. Analogamente, $(u, a'-b')$ é aresta do grafo resultante se e somente se (u, a') e (u, b') forem arestas do grafo original.

Se houve contração do grafo G , note que G tem uma clique de tamanho $|V(G)|/2$ se e somente se o novo grafo G' , resultante da contração, que também é SOG , tiver uma clique de tamanho $|V(G')|/2$. Chame G' de G e volte ao início do processo de contração, escolhendo uma nova dupla de vértices irmãos. Continue iterativamente este processo até que ou se descubra que não existem cliques de tamanho m em G^P ou que se chegue a um grafo G tal que entre quaisquer duas duplas de vértices irmãos falte no máximo uma aresta das quatro possíveis.

Em outras palavras, podemos reduzir a procura por uma clique de tamanho m em G^P à procura por uma clique de tamanho $|V(G)|/2$ em G , grafo que é “denso” em arestas. Esta “densidade” pode ser interpretada da seguinte forma: uma vez encontrada uma clique de tamanho $|V(G)|/2$, se ela não é acíclica, então provavelmente há outras cliques, dado que o grafo é “denso”, das quais uma será acíclica.

Caso haja um contra-exemplo para a conjectura, então será necessário encontrar um algoritmo eficiente para achar uma clique acíclica de tamanho m em G^P . Um caminho seria o de tentar o exercício de trocar um vértice na clique pelo seu irmão, tentando se livrar dos “vértices cíclicos”. A mudança poderá trazer conflitos com os demais vértices (ou porque a clique se desfez, ou porque novos ciclos foram criados), e novamente uma troca entre vértices irmãos deverá acontecer, até que se encontre a tal clique procurada. Como G é um grafo “denso” como vimos, isto facilitaria consertar os conflitos durante as trocas. Uma prova de que este processo converge em tempo polinomial teria então que ser dada.

Capítulo 6

Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi abordar o problema de caracterização e reconhecimento da classe de grafos PI. O reconhecimento eficiente desta classe de grafos é um problema em aberto [6, 5, 34] e algum trabalho já foi produzido na tentativa de resolvê-lo [9, 26, 8, 12].

Vimos que Marczewski em 1945 [31] mostrou que todo grafo é um grafo de interseção de alguma família de conjuntos. Portanto, uma pergunta natural que surge é que tipo de classe de grafos obtemos impondo restrições à família de conjuntos. Golumbic, Rotem e Urrutia em 1983 mostraram que a classe dos grafos de cocomparabilidade é precisamente a classe dos grafos de interseção de: (i) uma família de funções com extremidades em duas retas paralelas; (ii) uma família de fitas entre duas retas paralelas. Através desta caracterização, ao impor restrições a que tipos de funções e a que tipos de fitas são permitidas no modelo, geramos classes distintas interessantes de grafos (grafos de permutação, grafos de intervalos, grafos PI, grafos PI*, grafos de trapézios simples, grafos de paralelogramos e grafos de trapézios), algumas com várias aplicações práticas e profundamente estudadas, como é o caso dos grafos de permutação e grafos de intervalos.

Enquanto as classes de grafos de permutação, grafos de intervalos, grafos de trapézios e grafos de cocomparabilidade possuem algoritmos eficientes de reconheci-

mento [18, 4, 27], para as classes de grafos PI, grafos PI^* , grafos de trapézios simples e grafos de paralelogramos tais algoritmos não são conhecidos [5, 9, 26, 34, 7, 12].

Primeiramente, apresentamos todas estas subclasses da classe dos grafos de cocomparabilidade utilizando uma noção unificada de representação. Esta abordagem forneceu uma hierarquização das classes, na qual os grafos PI estão inseridos e estreitamente relacionados. Como resultado desta parte do trabalho, mostramos que as classes de grafos PI^* e grafos de trapézios simples são incomparáveis.

Em seguida, apresentamos um método de reconhecimento eficiente para grafos de trapézios devido a Felsner, Habib e Möhring em 1994 [15] e Langley em 1995 [25], por se tratar de uma abordagem pela teoria de ordens, a qual nos inspirou a construir uma das principais caracterizações desta dissertação.

Como resultados, obtivemos quatro diferentes caracterizações de grafos PI. As duas primeiras, relacionam um grafo PI com grafos de outras classes desta família de subclasse de grafos. Assim, mostramos que um grafo é PI se e somente se: (i) sob certa operação, resultar em um grafo de permutação com uma determinada propriedade; (ii) for a união de um grafo de permutação e um grafo de intervalos tal que a ordem inicial do grafo de intervalos seja factível para o grafo de permutação. A terceira caracterização mostrou que reconhecer grafos PI e reconhecer ordens PI são problemas equivalentes e prova que uma ordem é PI se e somente se sua dimensão linear-intervalar é no máximo $(1, 1)$. Por fim, a quarta caracterização afirma que uma ordem é PI se e somente se um grafo associado tem uma clique acíclica de determinado tamanho. Além disto, conjecturamos que tal propriedade é na verdade irrelevante, o que acarreta que grafos PI podem ser reconhecidos eficientemente. Fazemos também uma análise sobre algumas evidências para que acreditemos na conjectura.

Apesar de não termos resolvido o problema proposto, acreditamos que tenha havido progresso no assunto. As duas caracterizações iniciais serviram para investigar a relação dos grafos PI com classes relacionadas, e poderiam vir a ser utilizadas em outros problemas nesta classe, com o suporte de outras idéias, como o próprio

problema de reconhecimento ou problemas de otimização. Estas caracterizações ajudam a entender melhor a estrutura do problema.

A terceira caracterização trouxe resultados interessantes sob o ponto de vista da teoria de ordens. Primeiramente, mostramos que ser ordem PI é uma invariante de comparabilidade. Depois, definimos uma dimensão de ordem, a qual chamamos de linear-intervalar, e mostramos que ser ordem PI está intimamente ligado com a dimensão linear-intervalar desta ordem. Este resultado se assemelha ao resultado sobre reconhecimento de grafos de trapézios, o qual estabelece que ser ordem de trapézios depende de sua dimensão intervalar, fato que mais tarde acarretou no descobrimento de algoritmos eficientes de reconhecimento de grafos de trapézios, como foi discutido no capítulo 3. Além disso, a própria definição de dimensão linear-intervalar pode vir a ser útil em outros contextos dentro da teoria de ordens.

Por último, a quarta caracterização associou o reconhecimento de grafos PI a reconhecimento de cliques em subgrafos de octaedros de generalizados. Com o suporte de uma conjectura, mostramos como reconhecer eficientemente tais cliques nestes grafos associados. A conjectura então foi analisada dos pontos de vista prático e teórico, com alguns indícios de que é verdadeira. Como subproduto desta análise da conjectura, foi produzido um programa para busca de um contra-exemplo com as seguintes características: (i) geração de ordens, baseados nos trabalhos de Corrêa e Szwarcfiter de 2005 [10] e Barbosa e Szwarcfiter de 1999 [2]; (ii) geração de modelos PI para ordens PI dadas como entrada; (iii) utilização de uma técnica especial para se gerar ordens que não são nem de permutação nem de intervalos, que poderia ser aplicada a outros trabalhos onde esta geração for desejável.

Este estudo abre alguns caminhos para novas pesquisas. Entre os mais imediatos, podemos citar:

- reconhecer eficientemente alguma das condições de caracterização apresentadas dos grafos PI;
- provar a conjectura (ou construir um contra-exemplo para);

- desenvolver técnicas para que o programa de busca de um contra-exemplo possa diminuir o número de ordens a analisar, e aumentar de maneira mais significativa a confiabilidade na conjectura;
- no caso de ser provado que a conjectura é falsa, encontrar eficientemente cliques acíclicas;
- utilizar uma idéia semelhante às *representações básicas* para outros problemas de reconhecimento de outras classes relacionadas que também estão em aberto: grafos PI^* , grafos de paralelogramos e grafos de trapézios simples.
- considerar o problema de isomorfismo destas classes de grafos.

Referências Bibliográficas

- [1] ASPVALL, B., PLASS, M. F., TARJAN, R. E., “A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified Boolean formulas.”, *Information Processing Letters*, v. 8, n. 3, pp. 121–123, 1979.
- [2] BARBOSA, V. C., SZWARCFITER, J. L., “Generating all the acyclic orientations of an undirected graph”, *Information Processing Letters*, v. 72, n. 1-2, pp. 71–74, 1999.
- [3] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph Theory with Applications*. New York, North-Holland, 1976.
- [4] BOOTH, K. S., LUEKER, G. S., “Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms”, *Journal Comput. System Sci.*, pp. 335–379, 1976.
- [5] BRANDSTÄDT, A., LE, V. B., SPINRAD, J. P., *Graph classes: a survey*. Philadelphia, SIAM, 1999.
- [6] BRANDSTÄDT, A., LE, V. B., SPINRAD, J. P., *Information System on Graph Class Inclusions v.2.0*. Universität Rostock, Institut für Informatik, 2006-01-09. <http://www.teo.informatik.uni-rostock.de/isgci/>.
- [7] CHEAH, F., CORNEIL, D. G., “On the structure of trapezoid graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 66, n. 2, pp. 109–133, 1996.
- [8] CHEAH, F. H. K., *A Recognition Algorithm for II-graphs*. Tese de Doutorado, University of Toronto, Canada, 1991.

- [9] CORNEIL, D. G., KAMULA, P. K., “Extensions of permutation and interval graphs”, In: *18th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 1987.
- [10] CORRÊA, R. C., SZWARCFITER, J. L., “On extensions, linear extensions, upsets and downsets of ordered sets.”, *Discrete Mathematics*, v. 295, n. 1-3, pp. 13–30, 2005.
- [11] DAGAN, I., GOLUMBIC, M. C., PINTER, R. Y., “Trapezoid graphs and their coloring”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 21, n. 1, pp. 35–46, 1988.
- [12] DE ALMEIDA, S. M., *Grafos PI*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2005.
- [13] DUSHNIK, B., MILLER, E. W., “Partially ordered sets”, *Amer. J. Mathematics*, v. 63, pp. 600–610, 1941.
- [14] FELSNER, S., “Tolerance graphs and orders”, In: *18th International Workshop Graph-Theoretical Concepts in Computer Science. WG92, Lecture Notes in Computer Science*, v. 657, pp. 17–26, Springer-Verlag, 1992.
- [15] FELSNER, S., HABIB, M., MÖHRING, R., “On the interplay between interval dimension and ordinary dimension.”, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, v. 7, pp. 32–40, 1994.
- [16] FELSNER, S., MÜLLER, R., WERNISCH, L., “Trapezoid graphs and generalizations, geometry and algorithms.”, *Lecture Notes in Computer Science*, v. 824, pp. 143–154, 1994.
- [17] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. A Series of Books in the Mathematical Sciences. Freeman And Company, 1979.
- [18] GOLUMBIC, M. C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. San Diego, Academic Press, 1980.

- [19] GOLUMBIC, M. C., ROTEM, D., URRUTIA, J., “Comparability graphs and intersection graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 43, pp. 37–46, 1983.
- [20] GOLUMBIC, M. C., LEWENSTEIN, M., “New results on induced matchings.”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 101, n. 1-3, pp. 157–165, 2000.
- [21] GOLUMBIC, M., TRENK, A., *Tolerance Graphs*. Cambridge University Press, 2003.
- [22] HABIB, M., KELLY, D., MÖHRING, R., “Interval dimension is a comparability invariant.”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 88, pp. 211–229, 1992.
- [23] KNUTH, D., *The Art of Computer Programming*, v. 1. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1968.
- [24] KNUTH, D. E., SZWARCFITER, J. L., “A structured program to generate all topological sorting arrangements”, *Information Processing Letters*, v. 2, n. 6, pp. 153–157, 1974.
- [25] LANGLEY, L., “Recognition of orders of interval dimension 2.”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 60, pp. 257–266, 1995.
- [26] LIN, Y.-L., “Triangle Graphs and Simple Trapezoid Graphs.”, *J. Inf. Sci. Eng.*, v. 18, n. 3, pp. 467–473, 2002.
- [27] MA, T.-H., SPINRAD, J. P., “On the 2-chain subgraph cover and related problems”, *Journal of Algorithms*, v. 17, n. 2, pp. 251–268, 1994.
- [28] MAFFRAY, F., PREISSMANN, M., “A Translation of Gallai’s Paper: ’Transitiv Orientierbare Graphen’”, In: *Perfect Graphs* (ALFONSIN, J. L. R., REED, B. A., eds.), Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, ch. 3, John Wiley & Sons, 2001.
- [29] McCONNELL, R. M., SPINRAD, J. P., “Linear-time transitive orientation”, In: *SODA ’97: Proceedings of the eighth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, (Philadelphia), pp. 19–25, SIAM, 1997.

- [30] McCONNELL, R. M., SPINRAD, J. P., “Modular decomposition and transitive orientation”, *Discrete Mathematics*, v. 201, n. 1-3, pp. 189–241, 1999.
- [31] McKEE, T. A., McMORRIS, F. R., *Topics in intersection graph theory*. Philadelphia, SIAM, 1999.
- [32] PFEIFFER, G., “Counting Transitive Relations”, 2004. <http://citeseer.ist.psu.edu/pfeiffer04counting.html>.
- [33] SLOANE, N. J. A., “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”, 2006. Partially ordered sets (posets) with n labeled elements (or labeled acyclic transitive digraphs). <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A001035>.
- [34] SPINRAD, J. P., *Efficient Graph Representations*, v. 19 of *Fields Institute Monographs*. AMS, 2003.
- [35] TROTTER, W. T., *Combinatorics and Partially Ordered Sets*. Baltimore and London, The Johns Hopkins University Press, 1992.
- [36] YANNAKAKIS, M., “The complexity of the partial order dimension problem.”, *SIAM J. Alg. Discrete Mathematics*, v. 3, pp. 351–381, 1982.