



Alexandre Street de Aguiar

**Equivalente Certo e Medidas de Risco em Decisões
de Comercialização de Energia Elétrica**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Dr. Álvaro de Lima Veiga Filho

Co-orientador: Dr. Sérgio Granville

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2008



Alexandre Street de Aguiar

**Equivalente Certo e Medidas de Risco em Decisões
de Comercialização de Energia Elétrica**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Dr. Álvaro de Lima Veiga Filho
Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Dr. Sérgio Granville
Co-Orientador

Psr Consultoria Ltda

Dr. Pedro A. Moretz-Sohn David
EPE – Empresa de Pesquisa Energética

Dr. José Heleno Faro
IMPA

Dr. Oscar Porto
Gapso

Dr. Silvio Hamacher
Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 07 de fevereiro de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alexandre Street de Aguiar

Alexandre Street é formado em Engenharia Telecomunicações e Métodos de Apoio à Decisão (Pesquisa Operacional) pela PUC-Rio (2002) e obteve seu título de MSc em Métodos de Apoio à Decisão também pela PUC-Rio (2004). Atualmente, finaliza o seu doutorado (2008) na mesma instituição. Durante o período de 2006/2007, realizou um estágio no exterior (doutorado sanduíche), onde atuou como pesquisador visitante na universidade UCLM, Espanha. Dentre os temas de sua linha de pesquisa destacam-se: medidas de risco para modelos de decisão sob incerteza, modelagem de estratégias de contratação para os leilões de contratos de suprimento de energia (energia existente e nova), análise de risco de portfólios de contratos de longo e médio prazo, análise de impactos de medidas regulatórias, estudos econômico-financeiros de investimento em centrais de geração de energia (fontes convencionais e alternativas) e estudos de integração gás-eletricidade.

Ficha Catalográfica

Aguiar, Alexandre Street de

Equivalente certo e medidas de risco em decisões de comercialização de energia elétrica / Alexandre Street de Aguiar ; orientador: Álvaro de Lima Veiga Filho; co-orientador: Sérgio Granville. – 2008.

174 f. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Equivalente certo. 3. Função utilidade. 4. Otimização estocástica. 5. Programação linear inteira. 6. Medidas de risco. 7. Conditional Value at Risk (CVaR). I. Veiga Filho, Álvaro de Lima. II. Granville, Sérgio. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

A minha esposa Cristiane Lopes Street pelo apoio e amor incondicional.

A meus pais e irmão, Evelyn Reis Friede de Aguiar, Cláudio Street de Aguiar, e André Street de Aguiar, pelo carinho, dedicação e presença em toda minha vida.

A Deus, por me conceder esta família, sem eles seria impossível dar este passo, e por todas as oportunidades concedidas durante minha vida, nas quais incluo este trabalho.

Agradecimentos

Ao grande amigo e Mestre Sergio Granville, pela excelente orientação e pelos ensinamentos e aprimoramentos acadêmicos. Agradeço ainda por todas as oportunidades concedidas e pela grande amizade.

Ao orientador Álvaro Veiga Filho, pela amizade, motivação, ensinamentos e oportunidades concedidas durante toda minha vida acadêmica.

Ao orientador Mario Veiga Ferraz Pereira, pela oportunidade concedida, confiança nas responsabilidades envolvidas e por toda a minha formação acadêmica durante o Mestrado e Doutorado, a qual sem dúvidas, é em sua essência devida a ele.

Aos grandes amigos, Bruno da Costa Flach e Eduardo Thomaz Faria, por estarem sempre presentes nos momentos bons e difíceis, compartilhando os mesmos sonhos acadêmicos desde a graduação, passando pelo mestrado até o doutorado.

Aos amigos de infância, com os quais Deus me presenteou, Robinson Friede, Cauã Reymond, Guilherme Carneiro e Leandro Passos pela amizade incondicional e apoio em todos os momentos.

A todos os amigos da PSR. Um especial agradecimento ao Gustavo Ayala e ao Bernardo Bezerra, pelas discussões diárias sobre os mais diversos temas relacionados a esta tese.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos e pelo ótimo ambiente de estudo.

Agradezco a Javier Contreras por todas las oportunidades y excelente ambiente laboral. Y a todos los amigos de UCLM por la ayuda y amistad.

Por último, mas não menos importante, um especial agradecimento ao grande amigo Luiz Augusto Barroso. Pela grande amizade e pelo tempo dedicado à minha orientação. Agradeço também pela constante preocupação em estar sempre abrindo portas e me incentivando academicamente.

Créditos

Como fruto dos esforços não só de uma pessoa, mas de diversos amigos que ao longo dos últimos anos pesquisam na linha desta tese, reservo esta sessão para identificá-los e apontar suas devidas contribuições. É importante evidenciar que este trabalho foi moldado ao longo de muitas discussões e reflexões não só da minha parte, mas de todo um grupo de pessoas.

Primeiramente o modelo proposto no Capítulo 3 nasceu de uma extensão e de muitas discussões da aplicabilidade do modelo utilizado em [2] e [3], na minha tese de Mestrado. Neste sentido devo muito às contribuições do Dr. Luiz Augusto Barroso (D.LA), por me introduzir ao meio acadêmico, me guiar na contextualização da literatura e ajudar em quase todas as partes do texto, ao Dr. Sérgio Granville (D.SG) por toda a ajuda na formulação dos modelos matemáticos e ao Dr. Mario Veiga (D.MV) por sua excelente orientação e brilhantes idéias que conduziram à formulação do problema proposto nestes trabalhos. Além disso, é importante salientar a crucial contribuição na formulação matemática do modelo de programação linear inteira mista, apresentado nesta tese para o funcional proposto (Capítulo 3) pelo D.MV., pois inicialmente o caminho escolhido levava a um modelo desnecessariamente mais complexo que o aqui apresentado.

No que diz respeito às interpretações da função utilidade linear por partes apresentadas no item 2.4.1 em sua maioria nasceram de discussões com o Dr. Pedro David (D.PD), que teve um papel fundamental em diversas correções e interpretações. Neste sentido, importantes sugestões e minuciosas correções em toda a parte de teoria da utilidade e medidas de risco são devidas ao DSc. José Heleno Faro, que agregou bastante valor a este trabalho.

Com relação à utilidade implícita ao CVaR, o D.MV contribuiu com muitas idéias e discussões. Basicamente a idéia da utilidade por trás do CVaR nasceu do paralelo entre as curvas de déficit (penalizações do déficit de geração dadas por uma função linear por partes) em modelos de operação e planejamento do sistema elétrico e restrições de risco percebidas pelo D.MV. Em paralelo, ao estudar a formulação do CVaR em [48] percebi a presença de uma função linear por partes que poderia ser comparada a uma utilidade. Após algumas iterações as duas idéias convergiram para a relação entre funções utilidades e problemas de maximização de renda com restrições de CVaR mínimo, apresentada neste trabalho no item 4.3.

Com relação ao desenvolvimento do capítulo 4, o D.SG contribui bastante no desenvolvimento da prova de existência do limite inferior para a penalização λ que garantisse que a métrica Φ , proposta em 4.4, proporcionasse a mesma solução ótima que o problema de maximização da renda esperada sujeito a uma restrição de CVaR mínimo. Além disso, os exemplos da violação do axioma da Independência e do Paradoxo de Allais, deste mesmo capítulo, foram baseados no texto dos exemplos dados em [16] e tiveram grandes contribuições do D.MV e do MSc. Gustavo Ayala. Agradeço aos dois pelas idéias de como mostrar os

resultados e transmitir a idéia da não linearidade do funcional Φ com relação às probabilidades.

Por fim, peço desculpas aos demais amigos que contribuíram com este trabalho e não foram mencionados nesta seção, porém deixo aqui a minha mais profunda gratidão a todos estes.

Resumo

Aguiar, Alexandre Street de; Veiga Filho, Álvaro de Lima (Orientador). **Equivalente Certo e Medidas de Risco em decisões de Comercialização de Energia Elétrica**. Rio de Janeiro. 2008. 174p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em problemas de decisão sob incerteza que dependam da preferência entre fluxos multi-período, como é o caso dos problemas de comercialização de contratos de energia elétrica no Brasil, o agente deve saber expressar sua preferência por diferentes distribuições em cada período e, além disso, deve também especificar uma preferência entre períodos. Classicamente a abordagem utilizada é definir um funcional de preferência de von Neumann e Morgenstern separável entre os períodos, composto pela soma da esperança de utilidades que modelam a preferência em cada período. Então, para expressar a preferência entre períodos, esta soma é ponderada por um fator de desconto que visa expressar a impaciência do agente no consumo entre os períodos. Nesta abordagem, a especificação do fator de desconto torna-se uma tarefa bastante subjetiva, uma vez que estamos ponderando utilidades esperadas e não valores monetários. Devido a essa subjetividade e da dificuldade de se especificar a própria função utilidade de cada período, os grupos de finanças divergiram para uma abordagem mais pragmática, baseada na análise e controle dos riscos assumidos em suas decisões. Neste sentido, a empresa que busca maximizar a expectativa de lucro, especifica em valores monetários, um conjunto de restrições sobre as perdas que esta está disposta a incorrer, baseando-se para isso em suas probabilidades de ocorrência. Assim, durante as últimas quatro décadas, muitas pesquisas e desenvolvimentos foram realizados nesta área, no sentido de se estabelecer medidas de risco que proporcionassem propriedades desejáveis para essa classe de problemas. Desta forma, criou-se um “*gap*” entre as duas abordagens, financeira e econômica, as quais possuem raízes em comum: modelar o comportamento de agentes frente ao risco. Assim sendo, esta tese tem três objetivos: (i) propor uma abordagem alternativa para o uso de funções utilidades em problemas de comercialização de energia elétrica multi-período, baseada no valor presente dos equivalentes certos de cada período; (ii) mostrar como tal abordagem pode ser modelada matematicamente e formulada através de um problema de programação linear inteira mista (PLIM) ao considerarmos uma função utilidade linear por partes, e (iii) mostrar a conexão entre a teoria de utilidade e problemas de maximização da renda esperada sujeito a restrições de risco do tipo α -CVaR.

Palavras-chave

Engenharia Elétrica, Equivalente Certo, Função Utilidade, Conditional Value at Risk (CVaR), Otimização Estocástica, Programação Linear Inteira, Medidas de Risco, Comercialização de Energia Elétrica.

Abstract

Aguiar, Alexandre Street de; Veiga Filho, Álvaro de Lima (Advisor). **Certainty Equivalent and Risk Measures in electrical energy trade decisions.** Rio de Janeiro, 2008. 174p. PhD. Thesis – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

In decision under uncertainty problems that depend on multi-period preferences, as the case of trading electricity contracts in Brazil, agents should express their inter and intratemporal preferences. The classical economical approach is to define a time separable von Neumann and Morgenstern utility functional. This functional is composed by the sum of the expected utility of each period times an impatience factor that should express the agent's intertemporal preference. This approach demands the specification of a subjective impatience factor, which should weight utilities units. Due to this subjectiveness and its estimation difficulties, the applied financial groups started to develop more pragmatic approaches based on risk control. In this sense, companies that maximize expected profit will impose constraints on acceptable losses using estimated occurrence probabilities of different outcomes. In this sense, the economical and applied financial approaches have been diverging in the last four decades and, during this time, many studies and developments have been done in the risk metrics field to generate and prove stability and coherence properties for the proposed metrics. This thesis has three main objectives: (i) propose an alternative approach for multi-period decisions problems based on the present value of the certainty equivalent of each period; (ii) show how this approach can be modeled as a mixed integer linear programming problem (MILP) when adopting a piecewise linear utility function; and (iii) provide connections between utility theory and expected maximization problems constrained to α -CVaR risk metrics.

Keywords

Electrical Engineering, Certainty Equivalent, Utility Function, Stochastic Optimization, Integer Linear Programming, Risk Measures, Energy Trade.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Comercialização de energia	17
1.2	Perfil de Risco e decisões de contratação	18
1.3	Teoria de Utilidade e Equivalente Certo em problemas de decisão sob incerteza	19
1.4	Estratégias de decisão com conseqüências multi-período	20
1.5	Medidas de Risco e Teoria da Utilidade	21
1.6	Objetivo	21
1.7	Visão Geral da Metodologia	22
1.8	Organização da Tese	25
2	DECISÃO SOB INCERTEZA	28
2.1	Modelagem das incertezas	31
2.2	Teoria de Utilidade	32
2.3	O coeficiente de aversão a risco (CAR)	35
2.4	Função Utilidade Linear por Partes (FULP)	36
3	EQUIVALENTE CERTO (EC)	41
3.1	Propriedades do Equivalente Certo	43
3.2	Modelo de Programação Linear Inteira para o problema de maximização do Equivalente Certo	45
3.3	Generalização para o problema multi-período	51
3.4	Exemplo de Aplicação – Contratação de Longo Prazo	53
4	RELAÇÃO ENTRE UTILIDADE, EQUIVALENTE CERTO E MEDIDAS DE RISCO	62
4.1	Medidas de Risco como perfil de aversão a risco	62
4.2	Conditional Value at Risk (CVaR)	63
4.3	Relação entre problemas de maximização de renda com restrições de Conditional Value-at-Risk (CVaR) e problemas de maximização da Utilidade Esperada	68
4.4	O Equivalente Certo em problemas de maximização de renda com restrições de CVaR mínimo	76
5	ESTUDO DE CASO: Estratégia de comercialização de energia de fontes alternativas complementares (BIOMASSA E PCH)	94
5.1	O Portfólio Biomassa e PCH	95
5.2	Modelo de comercialização	97
5.3	Resultados	105
6	CONCLUSÕES	120

7	TRABALHOS FUTUROS	122
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125
9	ANEXO A: FORMAÇÃO DE PREÇOS NO MERCADO DE CURTO PRAZO	131
9.1	Sistemas Puramente Térmicos	131
9.2	Sistemas Hidrotérmicos	134
9.3	Cálculo da Função de Custo Futuro	141
9.4	Mecanismo de Realocação de Energia (MRE)	144
9.5	MRE: Motivação	144
9.6	O Mecanismo de Realocação de Energia	146
9.7	Exemplo de Aplicação do MRE	147
9.8	Vantagens e Limitações do MRE	153
10	ANEXO B: CONTRATOS DE COMPRA E VENDA DE ENERGIA	154
10.1	Volatilidade dos preços spot	154
10.2	Riscos de preço e quantidade	157
11	ANEXO C: FORMAS DE FUNÇÕES UTILIDADE	160
11.1	Função Utilidade Quadrática	160
11.2	Função Utilidade Exponencial (EXP)	161
11.3	Função Utilidade Logarítmica (LN)	163
11.4	Utilidade Generalizada de Machina	164
12	ANEXO D: RELAÇÕES ENTRE AS SOLUÇÕES DA UTILIDADE ESPERADA E DO EQUIVALENTE CERTO NO CASO MULTI-PERÍODO	167
13	ANEXO E: A UTILIDADE POR TRÁS DO FUNCIONAL CVAR	170
13.1	O CVaR e o Equivalente Certo de Ben Tal	173

Lista de Figuras

Figura 2-1 – Decisões de primeiro estágio em problemas de decisão sob incerteza...	30
Figura 2-2 – Diagrama de decisões (primeiro vs segundo estágio) em problemas de decisão sob incerteza.	30
Figura 2-3 – Função de Utilidade e perfil de risco.....	33
Figura 2-4 – Características do perfil de aversão a risco.....	33
Figura 2-5 – Características do perfil de neutralidade a risco.	34
Figura 2-6 – Características do perfil de propensão ao risco.	35
Figura 2-7 – Função de utilidade linear por partes com 4 segmentos.	37
Figura 3-1 – Cálculo do Equivalente Certo.....	43
Figura 3-2 – Possível Função Utilidade.....	44
Figura 3-3 – Função Utilidade Linear por Partes (FULP).....	47
Figura 3-4 – Inversa da Função Utilidade Linear por Partes (InvFULP).....	47
Figura 3-5 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil neutro a risco.	55
Figura 3-6 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida, ou resultado operacional do contrato, de cada período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil neutro a risco.	55
Figura 3-7 – Função Utilidade Linear por Partes com três segmentos (dois pontos de quebra).....	56
Figura 3-8 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida, ou resultado operacional do contrato, de cada período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil de aversão a risco.....	58
Figura 3-9 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação. Comparação entre as soluções obtidas para os perfis de aversão e neutralidade a risco.....	59
Figura 3-10 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação. Comparação entre as soluções obtidas para os perfis de aversão e neutralidade a risco.....	60

Figura 4-1 – Comparação de $CVaR_\alpha$ para duas distribuições com o mesmo valor de VaR_α , porém com diferentes curtoses.	64
Figura 4-2 – Componentes da Função Utilidade Linear por Partes implícita ao problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de restrições do tipo $CVaR$	71
Figura 4-3 – Função Utilidade Linear por Partes implícita ao problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de restrições do tipo $CVaR$	72
Figura 4-4 – Distribuição da Renda para um perfil neutro a risco – 100% do Lastro contratado – Preço de contrato igual a 120R\$/MWh – início em 2010 – duração de um ano.	74
Figura 4-5 – Distribuição da Renda para um perfil avesso a risco ($CVaR_{95\%}(R_{2010}) \geq 85 \text{ MMR\$}$) – 95.1% do Lastro contratado – Preço de contrato igual a 120R\$/MWh – início em 2010 – duração de um ano.	75
Figura 4-6 – Função Utilidade de dois segmentos (M+1) implícita para o caso de uma (M) restrição de $CVaR$	76
Figura 4-7 – Forma que o funcional de preferência $\Phi_{\alpha,\lambda}(\cdot)$ assume ao avaliar um valor determinístico $\mu \in \mathfrak{R}$ - caso particular com duas restrições de $CVaR$ mínimo.....	81
Figura 4-8 – Mistura das variáveis aleatórias R^A e R^B com uma terceira variável R . ..	89
Figura 4-9 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias R^A e R^B	90
Figura 4-10 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias R^C e R^D	91
Figura 5-1 – Esquema de compra de lastro e capacidade de geração de fontes alternativas complementares por parte de uma comercializadora.	97
Figura 5-2 – Esquema de contratação de fontes alternativas complementares por parte de uma comercializadora para venda no ACL.....	98
Figura 5-3 – Geração física <i>versus</i> crédito de energia alocado pelo MRE à usina Paraibuna ao longo de 10 anos.	103
Figura 5-4 – Disponibilidade futura de energia ao longo do período (PCH e Biomassa) em % do lastro físico de cada usina.....	104

Figura 5-5 – Valor esperado dos preços spot e créditos de energia ao longo período de estudo. Estimativa de coeficiente de correlação = -0.51.	106
Figura 5-6 – Custo líquido de compras menos vendas no curto prazo. Valor esperado e intervalo de confiança de 90%.....	108
Figura 5-7 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida dos períodos 2010 e 2011. Estratégia neutra a risco (maximizar o VPL(10%) esperado da renda). .	109
Figura 5-8 – Distribuição de Probabilidade do VPL(10% a.a.) para a estratégia neutra a risco.....	109
Figura 5-9 – Utilidade Linear por Partes com 6 segmentos.	110
Figura 5-10 – Distribuição de Probabilidade do VPL(10% a.a.) para a estratégia avessa a risco, baseadas na maximização do VPL dos equivalentes certos de cada período e para estratégia neutra a risco, baseada na maximização do valor esperado do VPL.	113
Figura 5-11 – Curva de Disposição a Contratar no ACL (valore em % da demanda máxima requisitada, 15 MW médios).	115
Figura 5-12 – Sensibilidade do mix de contratação ótimo entre as fontes (PCH e Biomassa) com relação ao preço de venda no ACL (valore em % da compra total).....	116
Figura 9-1 – Processo Decisório em Sistemas Hidrotérmicos	135
Figura 9-2 – Custos Imediatos e Futuros contra Armazenamento Final	135
Figura 9-3 – Cálculo da FCF	136
Figura 9-4 – Programação Hidrelétrica Ótima.	137
Figura 9-5 – Balanço hídrico do reservatório	138
Figura 9-6 – Função de Custo Futuro.....	140
Figura 9-7 – Definição dos Estados do Sistema.	141
Figura 9-8 – Cálculo da Decisão Ótima por Cenário - Último Estágio.....	142
Figura 9-9 – Cálculo do primeiro segmento da FCF	142
Figura 9-10 – FCF Linear por partes para o Estágio T-1	143
Figura 9-11 – Cálculo do custo operativo para o estágio T-1 e FCF para T-2.....	143
Figura 10-1 – Sistema Brasileiro – Custo marginal de curto prazo.	154
Figura 10-2 – Cenários simulados do Preço “spot”– Janeiro de 2002	155
Figura 10-3 – Uso de Contratos para Redução de Volatilidade	157
Figura 10-4 – Preços “spot” x Nível de Armazenamento (II) – situação seca	158
Figura 10-5 – Preços “spot” x Nível de Armazenamento (III) – situação úmida.....	159

Figura 11-1 – Função de utilidade quadrática	160
Figura 11-2 – Função de utilidade exponencial negativa	162
Figura 11-3 – Função de utilidade logarítmica.....	163
Figura 13-1 – Função de utilidades implícita no CVaR – (a) Análise da função U no domínio da família, fixado o ponto de renda $r = r_0$; e (b) análise da função U no domínio da renda, fixado a utilidade $z = z_0$	171

Lista de Tabela

Tabela 3-1 – Comparação da solução obtida pelos perfis de aversão e neutralidade a risco (resultados para todo o período – 2010 a 2014).....	57
Tabela 3-2 – Comparação da solução obtida pelos perfis de aversão a risco proposto (MaxEC) e clássico (MaxEU). Resultados para todo o período – 2010 a 2014.	60
Tabela 4-1 – Coeficientes da Função Utilidade Linear por Partes	76
Tabela 5-1 – Preços de compra e venda para a quantidade demandada pelo consumidor livre.....	107
Tabela 5-2 – Comparação da contratação realizada pelos perfis de aversão e neutralidade a risco.....	111
Tabela 5-3 – Resultado de equivalente certo e valor esperado dos fluxos obtidos pelos perfis de aversão e neutralidade a risco.....	112
Tabela 5-3 – Dados da instância do problema de maximização do EC (aversão a risco).....	113
Tabela 5-4 – Resultado de equivalente certo e valor esperado dos fluxos obtidos pelos perfis de aversão e neutralidade a risco.....	114
Tabela 9-1 – Características das Termelétricas	133
Tabela 9-2 – Características da Hidrelétrica.....	140
Tabela 9-3 – Despacho Ótimo – Sistema Hidrotérmico.....	140
Tabela 9-4 – Geradores	148
Tabela 9-5 – Demandas	148
Tabela 9-6 – Despacho Ótimo	149
Tabela 9-7 – Balanço no mercado “spot” - Geração - sem MRE.....	150
Tabela 9-8 – Balanço no mercado “spot” – Demanda.....	150
Tabela 9-9 – CEAs e Cotas da “Empresa” MRE	151
Tabela 9-10 – Créditos de Geração das Hidrelétricas	151
Tabela 9-11 – Balanço no mercado “spot” - Geradores Hidrelétricos - com MRE	152

1

Introdução

1.1

Comercialização de energia

Desde 2002, o leilão de contratos de suprimento vem sendo o principal instrumento para compra e venda de energia elétrica no Brasil. Inicialmente, a lei 10.438/2002 determinou que no mínimo 50% da energia das geradoras sob controle federal (grande parte da capacidade do Brasil) fosse comercializada através de leilões públicos. Em seguida, o Decreto 4.562/2002 determinou que todas as distribuidoras deveriam contratar suas necessidades de energia através deste mesmo mecanismo licitatório.

Desde 2004, quando o primeiro de tais leilões (ver “Leilões” em [38]) marcou o início do novo marco regulatório, os leilões de energia proveniente de empreendimentos novos e existentes vêm sendo realizados sistematicamente a cada ano para suprir o mercado do ambiente de contratação regulado (ACR), ao qual as distribuidoras estão submetidas.

Além do ambiente regulado, a comercialização de energia pode se dar diretamente com consumidores livres no ambiente de comercialização livre (ACL), desde que estes atendam aos pré-requisitos para se enquadrar nesta categoria.

Em ambas as situações, um gerador ou uma comercializadora oferta ou negocia contratos de longo e médio prazo nos quais diversas incertezas estão presentes. Tais incertezas proporcionam riscos que devem ser corretamente precificados e inseridos na decisão de comercialização. Por exemplo, pode-se citar como exemplo as seguintes questões:

“Qual quantidade um gerador deve ofertar em uma dada rodada de um leilão de energia existente que negocia contratos de cinco anos?”

“Qual o *mix* (composição do portfólio) de fontes que uma comercializadora deve contratar por disponibilidade para negociar um contrato de venda no ACL por quantidade durante dois anos?”

Desta maneira, a adoção de critérios de gerenciamento de risco dentro do processo decisório torna-se indispensável. Este procedimento, que freqüentemente pode ser representado através de modelos matemáticos de otimização, deve considerar o perfil de risco e o portfolio existente de ativos físicos e financeiros do agente, de forma a capturar as sinergias deste com os novos negócios candidatos.

1.2

Perfil de Risco e decisões de contratação

Como caracterizado no Anexo B: Contratos de compra e venda de energia, o preço spot no sistema brasileiro é extremamente volátil e não oferece estabilidade para o fluxo de caixa dos vendedores e compradores (ver referência [42][1]). Desta maneira, a gerência de risco com instrumentos financeiros como contratos de longo, médio e curto prazo constituem a base de remuneração de geradores e comercializadoras [50].

Entretanto, estes instrumentos proporcionam uma série de novos desafios. Ao assinar um contrato, o agente se compromete em entregar uma certa quantidade de energia a um dado preço, pré-acordados, durante um período de tempo que pode variar de poucos meses a vários anos. Neste contexto, diversos riscos podem ser enumerados: (1) risco de preço e quantidade de produção hidrelétrica, (2) risco de falhas, (3) risco de crédito, (4) riscos regulatórios, e muitos outros. Dessa maneira, toda decisão de contratação envolve uma renda futura incerta que depende dos fatores de risco envolvidos e da quantidade negociada ou nível de contratação (para mais detalhes ver [41][42][2][3][14]).

Para precificar tais riscos e decidir, sob incerteza, os montantes de contratação a serem firmados dentro de um conjunto de oportunidades, o vendedor deve modelar o seu perfil de risco de modo a poder selecionar a melhor alternativa segundo esse critério. Neste sentido, diversas abordagens são utilizadas para expressar preferência entre fluxos estocásticos, como por exemplo:

- Maximizar a utilidade esperada
- Maximizar o valor esperado, com restrição de risco (CVaR, VaR, etc.)
- Maximizar medidas de risco multi-período.

1.3

Teoria de Utilidade e Equivalente Certo em problemas de decisão sob incerteza

A teoria de utilidade de von Neumann-Morgenstern (1947) [56] apresenta uma forma analítica de comparação e de representação de preferências entre variáveis aleatórias (v.a.). Neste trabalho, as v.a. são representadas por um conjunto de resultados de uma “loteria”, ou jogo, e comparados segundo o valor esperado da utilidade. Desta maneira, se um agente tomador de decisão diz que uma determinada v.a. é preferível à outra, então a utilidade esperada desta primeira deverá ser maior que o da segunda.

O equivalente certo de um resultado financeiro é o menor montante (determinístico) pelo qual o agente trocaria este fluxo estocástico. Pela definição de preferência definido na teoria de utilidade, estes dois resultados, certo e incerto, devem ser comparados em termos de utilidade esperada e o equivalente certo encontrado de forma a igualar as utilidades de ambos os casos. Neste sentido, se R é a renda estocástica que se deseja avaliar, em termos de equivalente certo, e $U: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ é a função utilidade do agente tomador de decisão, pode-se encontrar EC conforme descrito e isolando o termo determinístico, como explicitado abaixo.

$$E[U(EC)] = E[U(R)] \rightarrow EC = U^{-1}\{E[U(R)]\} \quad (1-1)$$

Em problemas de decisão sob incerteza de dois estágios, onde o agente deve tomar uma única decisão fixa (primeiro estágio) antes de conhecer a realização das incertezas que irão caracterizar a sua renda futura (segundo estágio), busca-se a solução de primeiro estágio que maximize a utilidade esperada da renda, ou resultado, do segundo estágio. O argumento para tal função objetivo é simples: se a utilidade esperada é a métrica de preferência entre fluxos aleatórios, qualquer agente racional buscaria a solução do primeiro estágio que proporcionasse o resultado futuro de maior preferência. Evidentemente que este argumento não pode ser utilizado quando existirem custos associados às decisões do primeiro estágio, pois neste caso, o *trade-off* entre preferências sobre a renda futura e os custos presentes incorridos deverão ser levados em consideração.

Para o caso em que se deseja comparar fluxos estocásticos de renda de um único período, o equivalente certo, por se tratar de uma transformação biunívoca e

crescente com relação à utilidade esperada (inversa da função utilidade), proporciona a mesma escolha do primeiro estágio que a utilidade esperada e, por conseguinte, o mesmo resultado do segundo estágio. Entretanto, o equivalente certo proporciona ao tomador de decisão uma maior intuição sobre o valor do segundo estágio. Sobre a ótica deste, o agente busca maximizar o valor que sua preferência atribui como “certo” para o segundo estágio.

1.4

Estratégias de decisão com conseqüências multi-período

Podemos estender o conceito de um período para um horizonte finito, onde existem mais de um período de resultados aleatórios decorrentes de decisões passadas, tomadas sob incerteza. Neste caso, o objetivo do agente é tomar tais decisões de forma a maximizar o valor presente das utilidades esperadas de cada período, atribuindo pesos (equivalentes a uma taxa de desconto de capital) que reflitam a sua impaciência [53].

Neste âmbito, a definição de uma taxa de desconto que expresse a ansiedade do agente torna-se algo pouco tangível do ponto de vista prático. Visto que a função utilidade não tem unidade monetária, esta taxa de desconto assume um papel delicado na justificativa da função objetivo do problema de decisão sob incerteza com mais de um período. Ela deve expressar a substituição temporal de preferência entre os valores de utilidade esperada ao longo dos períodos. Fazendo um paralelo com a primeira justificativa utilizada no caso de apenas um período, tomar decisões de forma a maximizar o valor presente esperado das utilidades ao longo do horizonte, pressupõe que a nova métrica de preferência do agente seja o valor presente das utilidades esperadas, que por sua vez, depende de uma taxa de desconto para as utilidades.

Uma abordagem alternativa, que será proposta nesta tese, é olhar para este problema do ponto de vista do equivalente certo de cada período, os quais possuem unidades monetárias e podem ser intuitivamente descontados a uma taxa que expresse o custo de capital livre de risco do agente. Para isso, vamos abordar o problema de uma forma alternativa onde a função utilidade não tenta capturar a preferência entre períodos e restringe-se, somente, ao papel de “precificar” o valor de cada resultado através dos respectivos equivalentes certos. Neste contexto, a

comparação entre períodos recebe um caráter determinístico equivalente e torna-se direta a aplicação de um custo de capital livre de risco.

1.5

Medidas de Risco e Teoria da Utilidade

Nas últimas décadas, 1980 a 2000, grandes esforços foram realizados em duas vertentes na área de medidas de risco: (i) criar medidas de risco com propriedades desejáveis para problemas de decisões multi-período, e (ii) encontrar formulações mais eficientes para essas medidas de forma a proporcionar uma maior eficiência neste tipo de problema, que por natureza já são demasiadamente complexos de serem resolvidos. Como exemplo de maior impacto, pode-se citar o trabalho de Rockafellar e Uryasev [48], onde o Conditional Value-at-Risk (CVaR) é formulado como um problema de maximização de valor esperado com restrições lineares.

Entretanto, poucos trabalhos foram realizados no sentido de estabelecer a conexão entre a teoria de utilidade e essas atuais medidas de risco. Alguns trabalhos importantes nesta área são relacionados a construção de problemas de otimização não-linear e equivalentes certos [7][8]. Em [9] a idéia é rapidamente mencionada, porém pouco explorada. A ausência de resultados práticos decorre do fato de que a teoria de utilidade tornou-se um instrumento muito utilizado pelos economistas e teóricos na análise de propriedades decorrentes de decisões de agentes sob incerteza, enquanto a utilização de medidas tornou-se a abordagem preferida pelos grupos de finanças que estão preocupados em medir, controlar e precificar suas exposições financeiras decorrentes de suas decisões do dia-a-dia [15].

1.6

Objetivo

Esta tese tem três objetivos: (i) propor uma abordagem alternativa para o uso de funções utilidades em problemas de comercialização de energia elétrica multi-período, baseada no valor presente dos equivalentes certos de cada período; (ii) mostrar como tal abordagem pode ser modelada matematicamente e formulada

através de um problema de programação linear inteira mista (PLIM) ao considerarmos uma função utilidade linear por partes, e (iii) mostrar a conexão entre a teoria de utilidade e problemas de maximização da renda esperada sujeito a restrições de risco do tipo α -CVaR.

1.7

Visão Geral da Metodologia

Nos tópicos a seguir serão introduzidos os principais conceitos da metodologia que será abordada neste trabalho.

1.7.1

Função Utilidade Linear por Partes

A função utilidade para a renda é a função que atribui para cada ponto de renda uma “satisfação”. Em decisões sob incerteza, “sob condições apropriadas” a preferência de um agente pode ser expressa por um funcional que, baseado na esperança da variável aleatória mapeada pela função utilidade, avalia a distribuição de cada opção e atribui a estes os respectivos valores de utilidade esperada (ver capítulo de utilidade esperada em [16]).

A função utilidade linear por partes pode aproximar qualquer função côncava ou convexa o quanto se queira (nosso caso de interesse – aversão a risco) através de um conjunto de retas tangentes a esta função¹. Além disso, a utilidade linear por partes pode ser formulada como um PL de maximização e devido a isto, pode ser facilmente acoplada em problemas de otimização que tenham como objetivo maximizar o valor esperado desta função avaliada nos diversos cenários de renda.

No que diz respeito às suas interpretações, a função utilidade linear por partes também oferece vantagens: (i) pode-se argumentar que empresas são

¹ Um conjunto de retas tangentes não é a única forma de se aproximar funções côncavas ou convexas através de segmentos lineares. Pode-se utilizar um conjunto de retas que minimize a distância quadrática, ou outra norma, entre as funções, de forma que os segmentos resultantes poderão, em algum caso específico, “cortar” a função aproximada. O critério de aproximação é subjetivo de cada indivíduo e deve ser selecionado com o intuito de atender os principais requisitos deste.

localmente neutras a risco, porém globalmente avessas, ou seja, uma empresa em geral é “neutra a risco” para pequenas variações em torno de uma dada riqueza que não façam, por exemplo, o resultado sair de uma faixa onde o *breakeven* operacional é obtido para uma faixa onde é necessário obter capital externo, e (ii) este tipo de função oferece um grau de flexibilidade para o agente de especificar as “penalidades” ou “benefícios” de um determinado segmento ou faixa de renda, sem exigir que este defina uma função analítica, implicando na especificação do grau de aversão a risco para um conjunto infinito de pontos do domínio como é necessário no caso contínuo.

1.7.2

O Modelo para calcular o Equivalente Certo Linear por Partes

O problema que se encontra ao introduzir o equivalente certo de um agente avesso a risco como métrica de preferência e, por conseguinte de otimização, decorre do fato de que estaremos lidando com uma função objetivo convexa (inversa da utilidade). É evidente que para o caso de apenas um período, o resultado desta seleção (otimização) será o mesmo que no caso da utilidade esperada, entretanto para o caso multi-período nem sempre isso ocorrerá, conforme será explorado no Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período. Entretanto, a formulação do problema baseado no equivalente certo será primeiramente introduzida para o caso de um período, com a intenção de apresentar, de maneira simplificada, a idéia do modelo e a sua operacionalidade. Uma vez tratado o caso de um período, o modelo será estendido para o caso multi-período de forma direta e reapresentado em sua forma geral.

No âmbito de sua modelagem, o equivalente certo proveniente de uma função utilidade linear por partes, será modelado através de um problema de programação inteira mista (*mixed integer programming* – MIP), onde uma variável binária $\{0,1\}$ será associada a cada segmento da inversa da utilidade de forma a impor a ordem em que os segmentos deverão ser utilizados ao se avaliar um ponto nesta função. Isto se faz necessário devido à natureza do problema (maximização) que, para um dado ponto no domínio, naturalmente selecionaria o

segmento de maior inclinação (o último, por se tratar de uma função convexa crescente) para avaliá-lo.

Este comportamento não ocorre no caso de uma função côncava (caso clássico de utilidade esperada), pois a ordem em que os segmentos devem ser utilizados é a ordem natural de seleção, do segmento de maior inclinação até o de menor. Contudo, como será argumentado, este modelo inteiro não será dependente do número de cenários utilizados para caracterizar a distribuição das incertezas, mas somente do número de segmentos da função utilidade que na prática, para a maioria das aplicações em que a especificação da utilidade linear por partes é dada pela interpretação dos pontos de interesse da empresa, geralmente é superior a cinco. Neste sentido, acredita-se que o modelo proposto ofereça uma boa modelagem para o problema tornando-o factível de ser utilizado em aplicações cotidianas do setor elétrico brasileiro.

1.7.3

O Equivalente Certo Multi-período

Conforme já introduzido, esta tese propõe como abordagem alternativa para comparar fluxos multi-período. A forma clássica faz uso de um funcional baseado no valor presente das utilidades esperadas de cada período, ao passo que a abordagem proposta, será baseada no valor presente dos equivalentes certos dos mesmos períodos. Neste sentido, o modelo de otimização de um período, que considera o equivalente certo como função objetivo, será estendido para o caso geral multi-período. Neste caso, o problema de se definir o custo de oportunidade do capital² a ser utilizado para se descontar o fluxo equivalente não necessitará incorporar a aversão a risco. Além disso, neste novo modelo, as decisões tomadas no primeiro estágio poderão diferir do modelo clássico de utilidade esperada uma vez que a utilidade esperada de cada período será avaliada na inversa da utilidade e, portanto, ponderados por pesos diferentes do caso clássico.

² O custo de oportunidade é um termo usado na economia para indicar o custo de algo em termos de uma oportunidade renunciada. Em um contexto de oportunidades de investimento, o custo de oportunidade do capital de um investidor está associado ao retorno que este agente tenha acesso para uma dada quantia de capital a ser investida. Desta forma, o retorno mínimo exigido por este investidor para um novo projeto está relacionado com o custo de oportunidade do capital necessário para tal investimento.

1.7.4

Relação entre a teoria de utilidade e o α -CVaR

A conexão entre a teoria de utilidade e o uso de restrições de risco será feita através da formulação de que um conjunto de restrições de risco, do tipo $\text{CVaR}_\alpha(\text{Renda}) \geq R^{\min}$, considerando diferentes níveis de confiança $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,N}$ e diferentes limites inferiores $\{R^{\min}_i\}_{i=1,\dots,N}$. Como será visto no capítulo 4, o CVaR é uma medida de risco coerente que expressa o valor esperado da v.a. avaliada condicionado a valores inferiores ao quantil $1-\alpha$. Com isso, pretende-se mostrar que existe uma função utilidade linear por partes implícita em um conjunto de restrições desse tipo. Neste sentido, os resultados obtidos por restrições de risco podem ser emulados por funções utilidades que serão obtidas diretamente da formulação dos problemas que utilizam tais restrições. Além disso, o equivalente certo para funcionais baseados em medidas de risco do tipo CVaR será desenvolvido e interpretado. Por fim, algumas características interessantes apresentadas pelos funcionais baseados em medidas de risco serão ilustradas através de dois exemplos: (i) onde o axioma da independência é violado pelo funcional implícito ao problema de maximização de renda esperada sujeito a uma restrição de CVaR mínimo, e (ii) onde a ordenação do Paradoxo de Allais (ver em [16] a definição formal deste paradoxo) é capturada pelo funcional dual ao anterior.

1.8

Organização da Tese

Esta tese terá como foco principal a aplicação da abordagem proposta no mercado elétrico brasileiro. Mas especificamente, em problemas de comercialização de energia elétrica através de contratos de médio e longo prazo (duração de meses ou anos). Assim, antes de abordar os objetivos propostos, serão introduzidos os conceitos necessários para se contextualizar o ambiente de incerteza ao qual o agente tomador de decisão estará exposto. A contextualização dos riscos será feita em duas etapas: no capítulo 2, onde será apresentada a formação de preços no setor elétrico brasileiro e como este está relacionado com a decisão de despacho das usinas, e no capítulo 3, onde os riscos relacionados aos

contratos de compra e venda de energia serão abordados e relacionados com os riscos introduzidos no capítulo anterior.

Uma vez contextualizado o ambiente de incerteza, no capítulo 4 será feita uma breve revisão da teoria de utilidade e mostradas algumas virtudes em se especificar uma utilidade linear por partes. No capítulo 5, será apresentado o conceito clássico de equivalente certo, ou equivalente à certeza, e mostrado como este pode ser utilizado para se alcançar o primeiro objetivo desta tese, comparando fluxos multi-período através do valor presente dos equivalentes certos de cada período. E assim sendo, para o caso de uma função utilidade linear por partes, será proposto um modelo de programação inteira para se resolver o problema de programação estocástica de dois estágios³, que deverá modelar a preferência multi-período de um agente avesso a risco. Para finalizar os objetivos propostos desta tese, no capítulo 6 será abordado o terceiro objetivo. De acordo com este, a conexão e compatibilidade entre a teoria de utilidade e a forma adotada pelos grupos de risco, que buscam maximizar o valor esperado dos resultados restringindo suas perdas através de restrições de risco do tipo CVaR, será realizada evidenciando-se a função utilidade implícita a este problema.

No capítulo 7 será mostrado como os modelos gerados nesta tese poderiam ser aplicados em um caso realista de comercialização de energia elétrica. Neste sentido, vamos utilizar como exemplo o caso de uma comercializadora que buscará otimizar o seu portfólio de compra e venda, tendo como opções de compra um *mix* de duas fontes alternativas complementares de geração de energia elétrica (uma termelétrica a biomassa e uma pequena central hidroelétrica) e como opção de venda, grandes consumidores inseridos no ambiente de livre contratação (ACL). Desta forma, este trabalho será concluído no capítulo 8, onde serão resumidas as contribuições geradas nesta tese e na seqüência propostos

³ Decisões de primeiro estágio, sob incerteza, seguidas de múltiplos períodos (segundo estágio) de conseqüências estocásticas. Este é o caso de problemas de comercialização de contratos de energia elétrica, onde o agente decide em o montante a se contratar, sujeitando-se a um fluxo estocástico de recebimentos futuros durante toda a vida útil deste ativo.

desenvolvimentos futuros decorrentes das pesquisas realizadas para a concepção desta.

2

Decisão sob incerteza

Problema de decisão sob incerteza, como o próprio nome sugere, são problemas que contemplam variáveis aleatórias em algum dos dados de sua instância, de forma a caracterizar a incerteza para a qual o agente tomador de decisão está sujeito. Além disso, deve existir um subconjunto de suas variáveis de decisão (denominadas decisões de primeiro estágio) que deverão ser selecionadas ex ante sem a informação prévia da realização das incertezas (que se realizarão no segundo estágio, ex post), mas somente com base na distribuição de probabilidade destas.

Durante todo este trabalho, o termo incerteza e risco terão significados iguais. Em um contexto mais geral, a incerteza se caracteriza por uma ambigüidade na definição da própria distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias, onde as distribuições são desconhecidas e desta maneira, subjetivas e individuais de cada agente. Contudo, o termo incerteza utilizado em todo o escopo desta tese deverá ser compreendido como o risco devido a uma distribuição de probabilidade objetiva, que assumiremos que possa ser estimada pelos agentes. Esta simplificação pode ser justificada pela existência de modelos probabilísticos que modelam de forma bastante razoável as distribuições das v.a.s que serão tratadas.

Recomenda-se a leitura completa da Parte II de [16] para uma excelente descrição de incerteza, subjetividade e outros aspectos relacionados a este trabalho.

Grande parte dos problemas de decisão da vida real são problemas de decisão sob incerteza, contudo, é bastante usual substituir os parâmetros incertos por suas previsões (por exemplo, o valor esperado). Em alguns casos tal procedimento simplifica bastante a solução e torna os modelos muito mais amigáveis e intuitivos, entretanto em casos onde as decisões sejam bastante sensíveis às variáveis de incerteza e que estas apresentem um considerável grau de variabilidade, torna-se importante que o modelo considere em suas decisões de

primeiro estágio a “dispersão” ou o risco das possíveis realizações das incertezas e os seus respectivos impactos.

A palavra dispersão foi utilizada entre aspas por não “expressar” todas as possíveis preocupações que se possa eventualmente exigir nestes modelos, mas já introduz o conceito de que, de alguma forma, as decisões de primeiro estágio deverão considerar toda uma gama de possíveis cenários que as incertezas podem proporcionar (ver [27]). Além disso, a importância que cada agente atribui aos possíveis resultados caracteriza o seu perfil de preferências. Este perfil também deve ser levado em consideração na seleção das variáveis de segundo estágio (este tema é justamente o foco desta tese e será amplamente discutido e referenciado ao longo dos próximos tópicos).

É importante ressaltar de que as decisões de primeiro e segundo estágios não estão necessariamente associadas às decisões do primeiro e segundo período, no sentido de unidade temporal. O primeiro e o segundo estágios se distinguem exclusivamente pela posse da informação das realizações dos parâmetros de incerteza.

Por exemplo, se um “dado produtor industrial” deve contratar hoje os montantes de suprimento firme de matéria prima para a sua produção para os próximos três meses a preços pré-fixados, essas podem ser encaradas como decisões de primeiro estágio. Desta maneira, se no decorrer destes três meses subsequentes de produção a demanda pelos seus produtos superar a quantidade respaldada pelos montantes de matéria prima já contratados, o industrial deverá buscar tais insumos no mercado de curto prazo ou à vista (*spot*), caso haja disponibilidade para os montantes requeridos e o preço seja interessante. Assim, as compras no mercado à vista são decisões do segundo estágio que dependem de três fatores de incerteza: (i) demanda pelos produtos em cada período, (ii) preço dos insumos no mercado à vista e (iii) disponibilidade da quantidade requisitada no mercado à vista. Como estas decisões são tomadas após a verificação da realização das incertezas de cada período, tais decisões são funções das incertezas e das decisões de primeiro estágio.

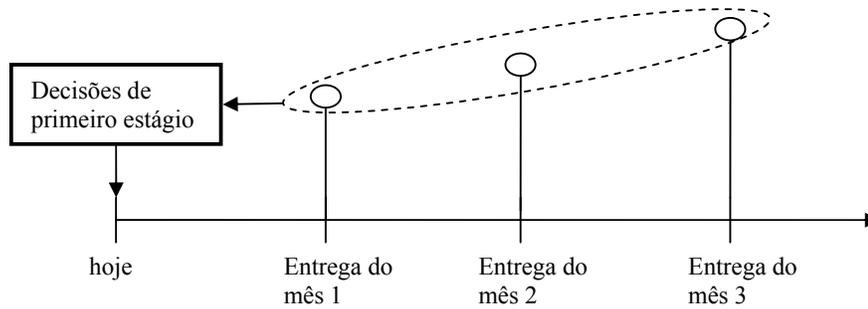


Figura 2-1 – Decisões de primeiro estágio em problemas de decisão sob incerteza.

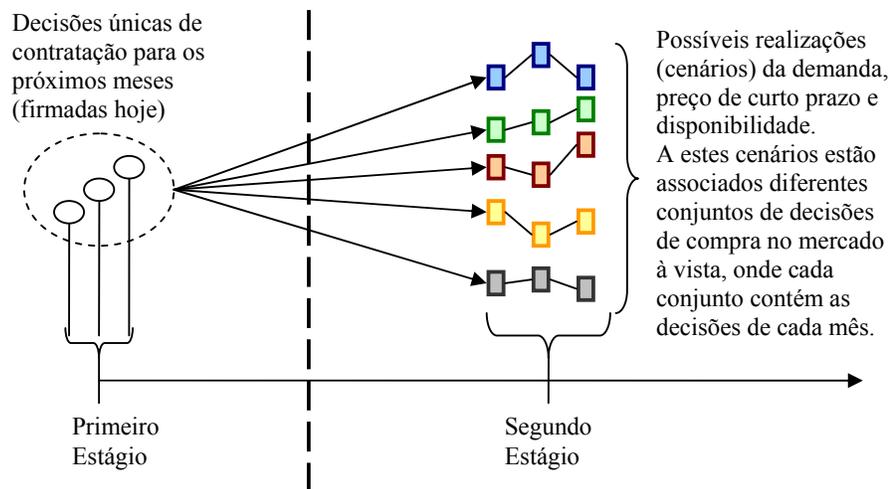


Figura 2-2 – Diagrama de decisões (primeiro vs segundo estágio) em problemas de decisão sob incerteza.

É importante notar que existe um contexto mais geral que o descrito anteriormente, onde as decisões sob incerteza são tomadas ao longo do tempo, ou seja, à medida que as informações parciais das incertezas são reveladas. Este caso é denominado multi-estágio e pode ser visto como uma sucessão de problemas de dois estágios acoplados entre si (ver referência [4] para exemplos na indústria onde as técnicas de opções reais são bastante ilustradas). Tais problemas sofrem do “mau da dimensionalidade” por serem constituídos de uma árvore de decisão que cresce exponencialmente com o número de períodos, porém, em alguns casos estes podem ser decompostos e resolvidos como uma seqüência de problemas menores de dois estágios, aplicando, por exemplo, a técnica de Programação

Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) foi introduzida em [37] para o problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de grande porte. Tal classe de problemas, multi-estágio, não será abordada nesta tese, que se restringirá aos problemas de dois estágios com conseqüências multi-período, ou seja, com mais de um período temporal.

2.1

Modelagem das incertezas

Nos modelos de decisão sob incerteza que serão desenvolvidos em todo este trabalho as incertezas serão caracterizadas através de Simulações de Monte Carlo que produzirão amostras das variáveis aleatórias e processos estocásticos. Tais amostras aproximaram as distribuições de probabilidade reais e proporcionam propriedades desejáveis pelos modelos de otimização e de precificação de ativos (ver [39] para aplicação).

Devido à alta complexidade de se caracterizar a distribuição conjunta de variáveis aleatórias multivariadas, a aproximação por cenários tornou-se bastante comum com o crescimento do poder de processamento dos computadores. Neste sentido, uma descrição completa das incertezas, dada por complexas funções de probabilidade de natureza não linear, é trocada por um conjunto de dados (amostras de dados) suficientemente grande para caracterizar as dependências e momentos das variáveis aleatórias de forma aproximada. Desta forma, uma vez que a aproximação dada pelos cenários de ocorrência e suas respectivas probabilidades seja aceita, a variável aleatória pode ser tratada como uma variável de distribuição discreta e, portanto, incorporada de forma eficiente em modelos de programação linear para se resolver os problemas de decisão sob incerteza.

Além disso, existem processos estocásticos para os quais não se tem acesso às distribuições analíticas, pois são originários de procedimentos computacionais complexos envolvendo, inclusive, processos de otimização dentro da formação de suas realizações. Assim sendo, estes só podem ser caracterizados através dos seus cenários simulados.

No Setor Elétrico Brasileiro os processos que regem os preços de curto prazo e geração das usinas são formados por procedimentos de otimização que visão minimizar o custo de atendimento à demanda (para mais detalhes ver

Anexo A: Formação de preços no mercado de curto prazo). Desta maneira, as incertezas presentes nos fluxos financeiros que serão analisados nesta tese, serão todas oriundas de simulações do despacho do sistema Brasileiro e das respectivas aplicações das regras comerciais, conforme tratado no mesmo anexo. Um detalhamento completo das regras de comercialização de energia pode ser obtido no site da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE – [38]).

Como notação, todas as vezes que estivermos mencionando uma variável aleatória ou um processo estocástico, este aparecerá em itálico. Por exemplo, um fluxo estocástico de renda aparecerá na seguinte forma: $\{R_t\}_t$ (em itálico). Entretanto, ao fazermos menção ao conjunto de cenários deste processo, a seguinte notação será adotada: $\{R_{ts}\}_{ts}$ (em formato normal acompanhado dos respectivos sub-índices de cada cenários).

2.2

Teoria de Utilidade

A teoria de utilidade de von Neumann-Morgenstern (1944) [56] apresenta uma forma analítica de comparação e de representação de preferências entre variáveis aleatórias (v.a.). Neste trabalho, as v.a.'s são representadas por um conjunto de resultados de uma “loteria”, ou jogo, e comparados segundo o valor esperado da utilidade. Desta maneira, se um agente tomador de decisão diz que uma determinada v.a. é preferível frente a outra, então, o valor esperado da utilidade desta primeira deverá ser maior que o da segunda.

A função de utilidade (FU) leva em consideração toda a gama de cenários, atribuindo uma utilidade ao consumo de cada cenário de receita financeira. Neste caso, o agente tomador de decisão buscará tomar suas decisões de forma a maximizar a utilidade esperada das rendas futuras, onde a função utilidade do agente descreve sua atitude frente ao risco (seu “perfil de risco”), que pode ser de aversão, neutralidade ou propensão a risco.

Por exemplo, um investidor avesso a risco apresentaria uma FU côncava, como se vê na Figura 2-3a. Neste caso, a perda devida a um “mau” resultado não é “compensada” pelo ganho advindo de um “bom” resultado de mesma magnitude. Já um investidor indiferente a riscos apresentaria uma FU linear, como

na Figura 2-3b. Isto significa que um aumento de receita tem o mesmo impacto (em módulo) que uma redução. Finalmente, um investidor que arrisca (propenso a risco) teria uma função de utilidade convexa, conforme se vê na Figura 2-3c.

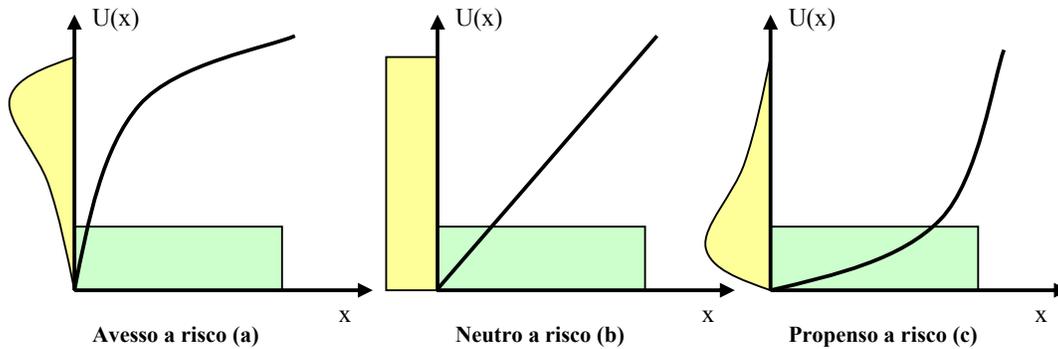


Figura 2-3 – Função de Utilidade e perfil de risco

Na seqüência abaixo (Figura 2-4, Figura 2-5 e Figura 2-6) são ilustrados os conceitos de aversão, neutralidade e propensão a risco apresentados para três indivíduos (indivíduos “k”, “y” e “z” – respectivamente avesso, neutro e propenso a risco) cujas funções utilidades são as mesmas da figura anterior:

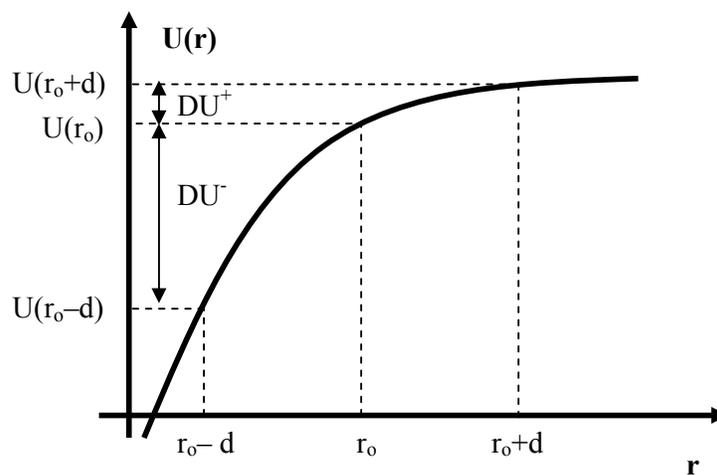


Figura 2-4 – Características do perfil de aversão a risco.

A principal característica do agente “k” (avesso a risco ou dito “conservador”) é que este é muito mais sensível a perdas do que a lucros. Por

exemplo, para uma mesma variação de $+d$ em torno do ponto r_0 (representando um aumento da renda), o “ganho” da utilidade do indivíduo é menor, em módulo, que o decréscimo de utilidade resultante da mesma variação negativa ($-d$) em torno de r_0 , ou seja, $DU^+ \leq DU^-$. Matematicamente isso pode ser explicado através de uma característica de funções côncavas diferenciáveis, na qual a segunda derivada é negativa, ou seja, decresce a primeira derivada ao longo do domínio da função. Assim, à medida que se avança no sentido positivo de r (aumento da renda), o benefício marginal da utilidade (primeira derivada) é decrescida de forma monótona.

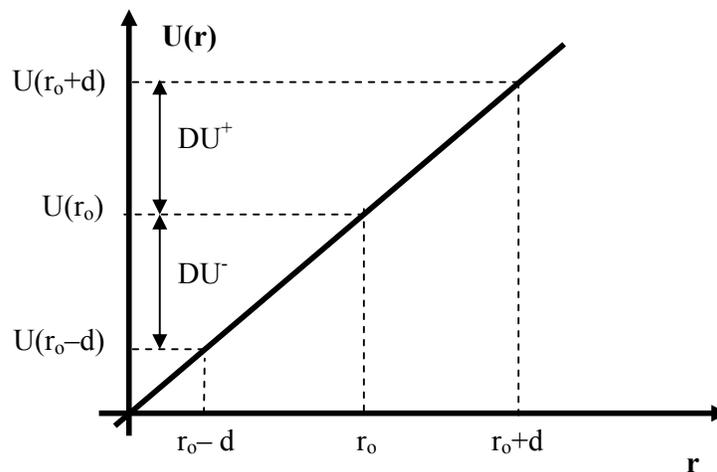


Figura 2-5 – Características do perfil de neutralidade a risco.

Para o perfil do agente “y” (neutro a risco), como a utilidade apresenta primeira derivada constante ao longo de todo o domínio, variações positivas e negativas de mesmo módulo, em torno de um mesmo ponto, proporcionam variações idênticas (em módulo) de utilidade, ou seja, $DU^+ = DU^-$.

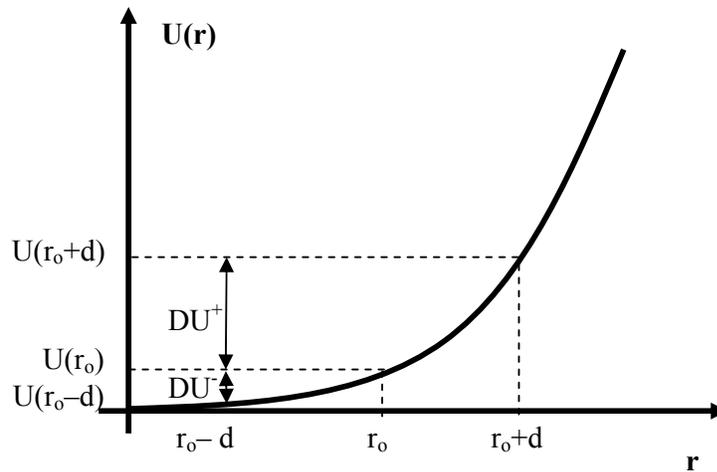


Figura 2-6 – Características do perfil de propensão ao risco.

No perfil do agente “z” (propenso ao risco), ocorre o oposto do caso de aversão. O agente dá muito mais “valor” a variações positivas do que às variações negativas de mesma magnitude, em torno de um mesmo ponto. Por isso a utilidade deste tipo de perfil é convexa, ou seja, a primeira derivada aumenta à medida que a renda cresce.

2.3

O coeficiente de aversão a risco (CAR)

O coeficiente de aversão a risco, ou grau de aversão a risco, tem por objetivo caracterizar o comportamento frente ao risco, que o agente expressa para cada ponto do espaço das possíveis realizações da variável aleatória R . Esse comportamento é modificado à medida que a concavidade da função utilidade varia em seu domínio.

Assim, seja uma v.a. R e uma função utilidade $U(\cdot)$ contínua e diferenciável, o coeficiente de aversão ao risco (CAR), também conhecido como Coeficiente de Arrow-Pratt, pode ser definido por:

$$CAR_U(r) = -U''(r)/U'(r) \quad (2-1)$$

Onde,

$U'(r)$ é a primeira derivada de $U(r)$,

$U''(r)$ é a segunda derivada de $U(r)$.

A primeira derivada aparece no denominador para padronizar o CAR de utilidades equivalentes, ou seja, se $U(r)$ e $V(r)$ são equivalentes, ou seja, $V(r)=aU(r)+b$, para $a > 0$ e $b \geq 0$ terão o mesmo $CAR(r)$.

2.4

Função Utilidade Linear por Partes (FULP)

A partir da função de utilidade o perfil de risco de um agente pode ser caracterizado. Foi visto também, que para expressar um perfil de aversão a risco, é necessário que esta função seja côncava, por tanto não linear. Contudo, a dificuldade de se “levantar” (estimar) a aversão a risco de um agente para todos os pontos de renda faz, com que a utilidade linear por parte torne-se bastante interessante do ponto de vista de sua especificação. Aliado a este fato, a forma linear por partes ainda apresenta a vantagem de permitir o uso de algoritmos de programação linear.

Esse tipo de função apresenta a propriedade do agente ser localmente neutro ao risco, porém, globalmente avesso⁴. A grande virtude desta forma é que se pode escolher os pontos de “quebra” onde os coeficientes angulares mudarão, utilizando como base parâmetros financeiros da empresa. Em outras palavras, o agente tem a “liberdade” de selecionar a taxa de crescimento da sua “satisfação” (utilidade) para alguns intervalos conhecidos de sua renda, e assim não ficar “preso” a uma só forma, definida por um único parâmetro. Além disso, esta forma permite uma interpretação financeira direta dos seus parâmetros com base nos pontos relevantes do balanço da empresa. Esta interpretação será exibida no próximo item.

Desta forma, podemos definir uma Função de Utilidade Linear por Partes (FULP) através de um problema de programação linear (PL) de maximização, para o caso de um agente avesso a risco (função côncava) e um PL de minimização para um agente propenso ao risco (função de utilidade convexa). Assim sendo, para o caso de aversão a risco, a FULP pode ser expressa por:

⁴ Para pequenas variações “locais” da renda que sejam restritas a um único segmento da FULP, o funcional baseado nesta função exibirá um comportamento de neutralidade ao risco por se tratar de uma utilidade “localmente” linear. Contudo, para v.a.s que apresentem cenários em mais de um segmento o funcional resultaria em um comportamento de aversão ao risco, uma vez que mais de um cenário estaria exposto a diferentes incrementos marginais de utilidade.

$$U(r) = \text{Maximizar}_{(u)} u \quad (2-2)$$

Sujeito a:

$$u \leq a_k r + b_k \quad k = 1, \dots, K \quad (2-3)$$

Onde

K Número de segmentos lineares

a_k Coeficiente angular k-ésimo segmento.

b_k Coeficiente linear do k-ésimo segmento.

u Variável que é sempre menor que todos os segmentos.

Como $U(\cdot)$ é crescente, $a_k \geq 0, k=1, \dots, K$

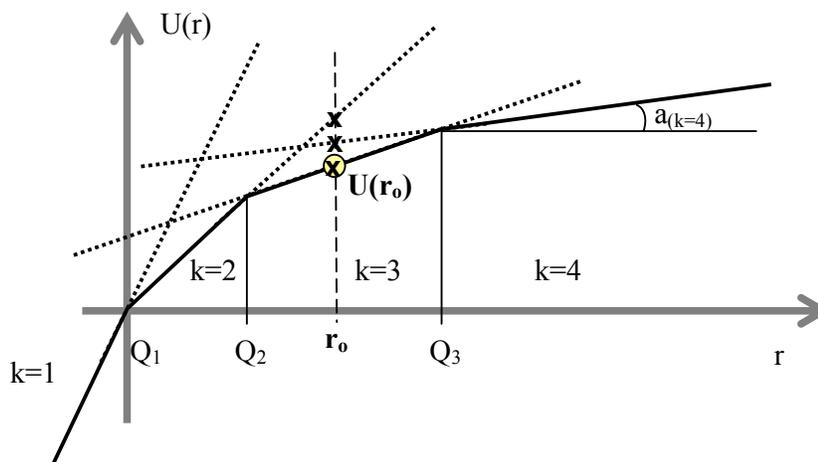


Figura 2-7 – Função de utilidade linear por partes com 4 segmentos.

A figura acima ilustra uma FULP com quatro segmentos, onde cada ponto Q_k representa uma “quebra”, ou seja, uma mudança de inclinação e, portanto, uma mudança na taxa de crescimento de “satisfação” com a renda do agente. Pode-se notar que o PL, que define esta curva, seleciona para um dado ponto r_0 o segmento que proporciona o menor valor no contradomínio. A figura anterior ilustra este fato, para um caso onde o ponto está localizado no terceiro segmento.

Esta formulação resulta na envoltória inferior definida entre todos os segmentos dada por:

$$U(r) = \inf_{(1 \leq k \leq K)} \{ a_k r + b_k \} \quad (2-4)$$

Outro aspecto importante para este tipo de função é que o CAR “convencional” não pode ser definido, pois existem pontos onde a função é não diferenciável e na verdade, o grau de aversão a risco da FULP se dá na mudança de coeficiente angular, assim pode-se definir o coeficiente de aversão a risco por partes (CARP) onde o que se expressa não é a aversão a risco local, mas entre segmentos.

$$CARP_k = -(a_k - a_{k-1})/a_{k-1} \quad (2-5)$$

Este coeficiente, através da razão entre a diferença das primeiras derivadas de dois segmentos adjacentes e a derivada do primeiro deles, expressa uma medida da taxa de variação da primeira derivada, que é a própria definição de segunda derivada, no caso de variações infinitesimais.

Assim, com base neste resultado, pode-se especificar a função utilidade através de um perfil de risco desejado, por exemplo, encontrando os coeficientes a_k que satisfaçam um conjunto de $CARP_{k=2,\dots,K}$, segundo a expressão abaixo.

$$a_k = (1 - CARP_k)a_{k-1} \quad (2-6)$$

Essa será a forma de função de utilidade adotada neste trabalho, onde a maior parte da metodologia será baseada em programação linear.

2.4.1

Interpretação Financeira e Especificação da Função

Conforme mencionado anteriormente, um aspecto bastante relevante no uso de modelos baseados em utilidade esperada para aplicações práticas é a especificação da função utilidade. Alguns experimentos podem ser realizados no sentido de interpolar a função utilidade de um agente. Para isso é realizado um questionário onde diversas perguntas relativas a preferências binárias são impostas ao agente e com base nestas respostas, alguns pontos da utilidade são encontrados [17].

Porém, ao utilizarmos a FULP, uma abordagem de interessante interpretação associando aos pontos de “quebra” da função linear por partes os pontos de interesse do balanço da empresa. Desta forma, as inclinações dos segmentos poderiam traduzir, dentre outros aspectos de interesse para o investidor, o benefício marginal da renda em função da taxa de juros que uma

instituição financeira cobraria por emprestar dinheiro à empresa. Ou seja, os coeficientes angulares da FULP podem ser associados aos benefícios marginais em taxa de juros com o acréscimo da renda.

Neste sentido, a empresa deve definir os seus pontos de interesse no eixo das rendas, onde, por exemplo:

- R₁ Renda a partir da qual a empresa “não sobrevive” um ano.
- R₂ Renda a partir da qual a empresa obtém seu “*breakeven*” anual.
- R₃ Renda anual projetada (meta).

Já os coeficientes angulares (derivadas em cada segmento) podem ser especificados de diversas formas com base nos parâmetros que expressem da melhor forma possível a diferença entre as preferências e benefícios marginais em cada segmento. Um exemplo pode ser dado com base nos *spreads* de juros cobrados para se obter fundos no mercado. Desta forma os coeficientes poderiam ser obtidos conforme as classificações de *ranking* de crédito:

- a₁ 1 + taxa de juros cobrada por empréstimo a uma empresa que oferece um alto risco de inadimplência (15% a.a. por exemplo).
- a₂ 1 + Taxa de cobrada por um empréstimo a uma empresa que oferece um risco médio de inadimplência (por exemplo 10% a.a.).
- a₃ 1 + Taxa de cobrada por uma empresa classificada como boa pagadora (por exemplo 8% a.a.).

Esses pontos devem ser definidos pelo investidor ou tomador de decisão, segundo a sua percepção do mercado e de distinção de taxas que serão cobradas ou obtidas em investimentos.

O intuito desta interpretação e objetivo da metodologia de especificação da utilidade, acima apresentada, é criar um funcional de preferência que possa refletir o comportamento desejado pelo investidor ou tomador de decisão com base em parâmetros financeiros que este tenha acesso e utilize no seu dia-a-dia para verificar a qualidade e direção de suas decisões, tornando este processo mais natural e intuitivo. Neste sentido, o funcional especificado se torna uma ferramenta de tomada de decisão de fácil utilização e alta transparência, podendo ser utilizado por outros agentes dentro da empresa que tomarão decisões com base no perfil estimado do investidor.

A referência [54] discute outros métodos para determinar a função utilidade de um agente. Entretanto, ao passo que funções utilidades contínuas definidas por expressões analíticas proporcionam uma caracterização de aversão a risco para qualquer variação de renda, em termos práticos um investidor pode perfeitamente assumir um comportamento localmente neutro a risco, porém globalmente avesso. Neste sentido, o argumento baseia-se no fato de que um investidor teria dificuldades de especificar o seu perfil de aversão a risco para pequenas variações de renda em torno de um dado resultado, contudo, através dos seus balanços patrimoniais ou de metas traçadas pelo conselho, pode-se mapear os pontos de “quebra” nos resultados financeiros a partir dos quais a preferência entre estar acima ou abaixo do mesmo é notoriamente diferente. Por exemplo, variações que façam o resultado da empresa sair de uma faixa onde o *breakeven* operacional é obtido para uma faixa onde é necessário obter capital externo devem ser diferentemente penalizadas relativamente a variações que proporcionem o cumprimento das metas financeiras estipuladas para um período.

Neste caso, o que se pode perceber é que o caso da função utilidade linear por partes proporciona uma alta flexibilidade para o agente especificar as “penalidades” ou “benefícios” marginais em um determinado segmento ou faixa de renda, sem exigir que este defina um grau de aversão a risco para um conjunto infinito de pontos do domínio, como é necessário no caso contínuo.

Como será visto, o objetivo do modelo de decisão proposto nesta tese é a maximização do VPL dos equivalentes certos de cada período. O capítulo a seguir apresenta a visão geral da metodologia adotada para o caso linear por partes. No capítulo consecutivo será realizada a conexão entre o “mundo” das utilidades e o das medidas de risco para o caso específico do *Conditional Value-at-Risk* (CVaR).

3

Equivalente certo (EC)

A definição de Equivalente Certo (EC) de um resultado financeiro aleatório é o menor montante determinístico que torna o agente indiferente a este fluxo estocástico.

Se pensarmos em termos de preferência, estes dois resultados, certo e incerto, devem ser comparados em termos de utilidade esperada e o equivalente certo encontrado de forma a igualar o valor esperado da utilidade de ambos os casos. Neste sentido, se R é a renda estocástica que se deseja avaliar, precificar em termos de equivalente certo, e $U: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é a função utilidade do agente tomador de decisão, a comparação de preferências pode ser expressa por:

$$E[U(EC)] = E[U(R)] \quad (3-1)$$

A partir da expressão acima pode-se encontrar o valor EC isolando este no lado esquerdo da expressão. Uma vez que $U(EC)$ é um valor determinístico, então $E[U(EC)] = U(EC)$. Assim, aplicando a inversa da utilidade $U^{-1}(\cdot)$ em ambos os lados de (3-1), encontramos a expressão clássica para o equivalente certo:

$$EC = U^{-1}\{E[U(R)]\} \quad (3-2)$$

Neste trabalho, a abordagem proposta baseia-se na utilização deste valor como métrica de preferência para cada período. O argumento para essa abordagem é fruto do caso multi-período, onde a abordagem mais usual utilizada em teoria econômica prevê uma função utilidade (FU) separável no tempo, composta pelas funções utilidades de cada período ponderadas por um fator de impaciência ou uma taxa de desconto que expressa a preferência intertemporal do agente.

$$EU = \sum_t E[U_t(R_t)] \cdot (1+J)^{-t} \quad (3-3)$$

Neste funcional, a definição de um fator de impaciência é algo bastante difícil de ser estimado para ser utilizado pelo agente em situação práticas.

O que se pretende com a abordagem proposta é deixar para a utilidade apenas o papel de precificar, ou valorar, a distribuição do resultado financeiro de cada período, em termos de equivalente certo, e uma vez estabelecido um fluxo equivalente, a comparação intertemporal torna-se direta através do custo de oportunidade livre de risco⁵ (para fluxos determinísticos) que o agente tenha acesso.

$$EC = \sum_t U_t^{-1} \{E[U_t(R_t)]\} \cdot (1+J^{LR})^{-t} \quad (3-4)$$

Onde J^{LR} representa o custo de oportunidade livre de risco do agente.

As virtudes e contribuições vistas nesta proposta podem ser listadas na seguinte ordem de relevância:

1. A preferência intertemporal é direta e dada pelo mercado (fácil definição da taxa de desconto) uma vez que se tenha um fluxo equivalente certo;
2. Este funcional “precifica” cada período em termos de equivalente certo, sendo assim mais intuitivo do ponto de vista de análise financeira e de tomada de decisão. Desta forma, o fluxo estocástico pode ser visto como um fluxo equivalente, obtido através de um desconto ou prêmio de risco sob o valor esperado do mesmo⁶.
3. O funcional proposto utiliza as propriedades de preferência intraperíodo da utilidade e as diferenças na seleção realizada entre ambos residem no âmbito da preferência interperíodo. Para evidenciar tais diferenças, foi criado o Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período.

Através destes pontos, espera-se proporcionar um funcional de fácil especificação, que utilize para isto parâmetros de relevância e do dia-a-dia do investidor ou tomador de decisão, e que carregue consigo as virtudes da teoria de utilidade. Neste sentido, a contribuição se dá através da especificação de um

⁵Livre de risco no sentido de expressar o retorno exigido pelo agente para um fluxo determinístico.

⁶O valor esperado é o indicador mais popular e utilizado como referência em qualquer campo ou aplicação. A transformação do fluxo esperado em um fluxo equivalente é algo direto e intuitivo do ponto de vista financeiro.

funcional com uma forma bastante intuitiva, de fácil interpretação dos seus resultados e que através da sua praticidade e conexão com o mundo prático, através dos parâmetros econômico-financeiros da empresa, o processo de decisão baseado neste funcional torne-se transparente e objetivo.

3.1

Propriedades do Equivalente Certo

Na figura a seguir, podemos visualizar a distribuição da renda de um determinado período (eixo horizontal) sendo mapeada no domínio das utilidades (eixo vertical). O valor esperado desta nova distribuição, $E[U(R_t)]$, é então, levado para o domínio das receitas originando o valor EC. Este valor pode, então, ser comparado com o valor esperado da renda, $E(R_t)$, para os três casos básicos de perfil de risco (neutralidade, aversão, e propensão).

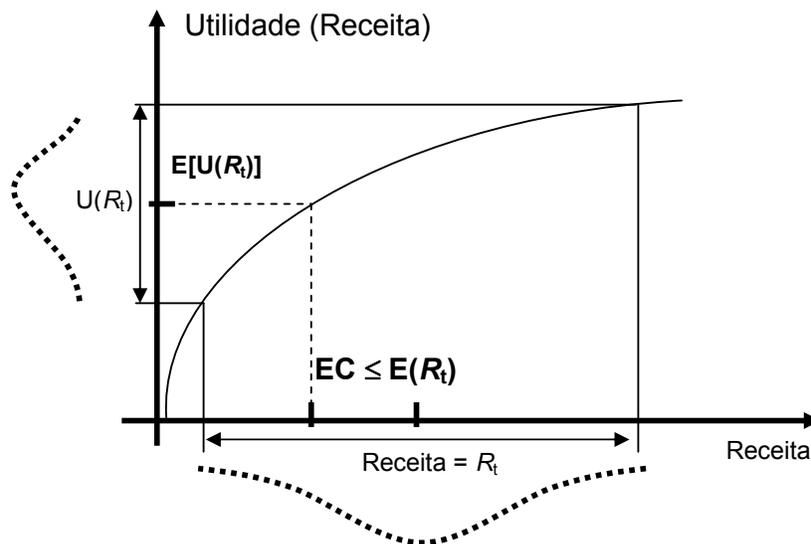


Figura 3-1 – Cálculo do Equivalente Certo

Por exemplo, se o investidor é indiferente a risco, sua função utilidade é linear e então $EU = E[U(R)] = U[E(R)]$ ou $U^{-1}(EU) = E(R)$. Neste caso o equivalente a certeza é igual ao valor esperado das receitas. Se o investidor é avesso a risco, sua função utilidade é côncava e pela desigualdade de Jansen [17], $EU = E[U(R)] \leq U[E(R)]$ ou $U^{-1}(EU) \leq E(R)$. Neste caso o equivalente a certeza é inferior ao valor esperado da renda, o que implicitamente se traduz em um prêmio

de risco. Este prêmio pode ser visto como a menor quantia necessária para igualar o valor atribuído a uma v.a. por um agente avesso a risco ao valor atribuído a esta por um agente neutro a risco.

$$p^{\text{RSK}} = E(R) - EC \quad (3-5)$$

Se o investidor é propenso a risco, sua função utilidade é convexa e pela desigualdade de Jensen, $EU = E[U(R)] \geq U[E(R)]$ ou $U^{-1}(EU) \geq E(R)$. Neste caso o equivalente certo é superior ao valor esperado das receitas.

3.1.1

Exemplo

A Figura 3-2 mostra uma possível função de utilidade (linear por partes, que será apresentada no final deste capítulo) que possui dois segmentos separados pelo ponto P, dado por uma renda de \$ 30.

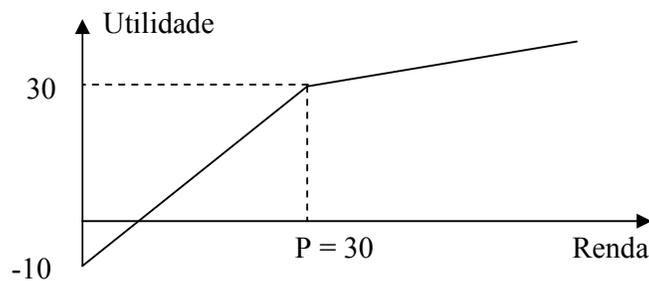


Figura 3-2 – Possível Função Utilidade

Vamos supor que existam quatro cenários para renda com igual probabilidade: $R_1 = \$ 0$, $R_2 = \$ 25$, $R_3 = \$ 30$, $R_4 = \$ 45$. Então, o valor esperado da renda é:

$$E(R) = 0.25 * (0) + 0.25 * (25) + 0.25 * (30) + 0.25 * (45) = \$ 25$$

e da função utilidade:

$$E[U(R)] = 0.25 * (-10) + 0.25 * (22.5) + 0.25 * (30) + 0.25 * (45) = 20.6$$

O equivalente à certeza deste fluxo de renda é igual a $U^{-1}(20.6) = \$ 23.7$ o que corresponde a um desconto de 5 % com relação ao valor esperado da renda.

3.2

Modelo de Programação Linear Inteira para o problema de maximização do Equivalente Certo

O desenvolvimento feito neste tópico mostra como um problema de maximização pode considerar uma função objetivo convexa e linear por partes, e assim, utilizar o equivalente certo como objetivo em problemas de decisão. A forma convexa da função objetivo está relacionada com o fato de estarmos modelando um agente avesso a risco cuja FULP é côncava. Desta maneira, como o objetivo é maximizar o equivalente certo da renda de um dado período, é necessário avaliar o resultado da utilidade esperada na inversa da utilidade (função convexa).

Para atingir este objetivo, primeiramente será apresentado o caso clássico de maximização da utilidade esperada para depois, então, incorporarmos o caso do equivalente certo.

O caso clássico de maximização do valor esperado da função utilidade linear por partes foi aplicado ao problema de contratação ótima de uma empresa de geração de energia em [2][3] e utilizado para precificar o risco de contratação em diferentes submercados em [20].

Considerando uma função de renda linear, $R(\mathbf{x}, \xi)$, que dependa de um vetor de variáveis de decisão de primeiro estágio $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_+^n$ e de um vetor de variáveis aleatórias “ ξ ”, representando os possíveis resultados futuros de algum dado da instância, o problema de maximização da utilidade esperada pode ser escrito como um PL, se as v.a.s puderem ser descritas, ou pelo menos “aproximadas”, pelos seus possíveis cenários de realizações e respectivas probabilidades de ocorrência $\{\xi_s, p_s\}_{s=1, \dots, S}$.

Em sua forma geral, este problema pode ser descrito pela maximização da média aritmética da função utilidade linear por partes aplicada a cada cenário de renda $\{R(\mathbf{x}, \xi_s)\}_{s=1, \dots, S}$, sujeito às restrições que caracterizam os segmentos desta função e às demais restrições sob as variáveis do primeiro estágio (\mathbf{x}).

$$\text{Maximizar}_{(x, u)} \sum_s p_s \cdot u_s \quad (3-6)$$

Sujeito a:

$$u_s \leq a_k \cdot R(x, \xi_s) + b_k \quad \text{para } k=1, \dots, K \text{ e } s=1, \dots, S \quad (3-7)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (3-8)$$

Neste problema, a matriz \mathbf{G} (com m linhas e n colunas) e o vetor \mathbf{d} (com m linhas) representam um conjunto de m possíveis restrições lineares aplicáveis à variável do primeiro estágio (vetor \mathbf{x}). Por exemplo, em [2][3][31] a variável de decisão \mathbf{x} corresponde aos montantes de contratação de um gerador que vende sua energia através de diferentes contratos de longo prazo em um leilão de energia. Nestes trabalhos, o modelo de maximização da utilidade esperada foi utilizado para decidir o *mix* de energia oferecida para três produtos diferentes (contratos com diferentes datas iniciais e duração), a cada rodada (iteração) do leilão de transição, ocorrido em dezembro de 2004.

Com o intuito de considerar o equivalente certo como função objetivo, precisamos modelar a inversa da função utilidade linear por partes. Assim, será necessário recorrer a uma formulação com variáveis inteiras binárias, por se tratar de uma função convexa.

Problemas de maximização são funções côncavas com respeito ao lado direito de suas restrições. Sob este fato, a utilidade esperada (caso de aversão ao risco – função côncava) é perfeitamente compatível com problemas de maximização (ver sessão 2.4). Entretanto, ao considerarmos uma função objetivo convexa, composta pelos diversos segmentos da inversa da utilidade, temos que impor qual segmento estará ativo em cada possível solução do problema. Neste novo problema, a utilidade esperada continua sendo calculada da mesma forma que em (3-6) a (3-8), entretanto, a diferença é que gostaríamos de avaliar a utilidade esperada obtida em (3-6) na inversa da utilidade para então, obtermos o equivalente certo.

A figura a seguir, ilustra a função utilidade descrita pelos seus coeficientes angulares $\{a_k\}_{k=1, \dots, K}$ e os pontos de quebra $\{Q_k\}_{k=0, \dots, K}$, onde $Q_0 = -\infty$ e $Q_K = +\infty$. Além disso, será importante para a modelagem da inversa, considerarmos que $U(Q_1) = 0$. Entretanto, isso não implicará em nenhuma perda de generalidade, pois

uma vez que a FU não assume o valor zero para nenhuma de suas quebras originais, basta identificar a raiz desta função e acrescentá-la como um ponto de quebra adicional, repetindo o coeficiente angular do segmento que cruze o eixo horizontal (da renda) para este novo segmento. Por simplicidade, o modelo será desenvolvido para o caso onde $Q_1 = 0$ (ver Figura 3-3) e posteriormente essa condição será relaxada para o caso onde Q_1 pode ser qualquer.

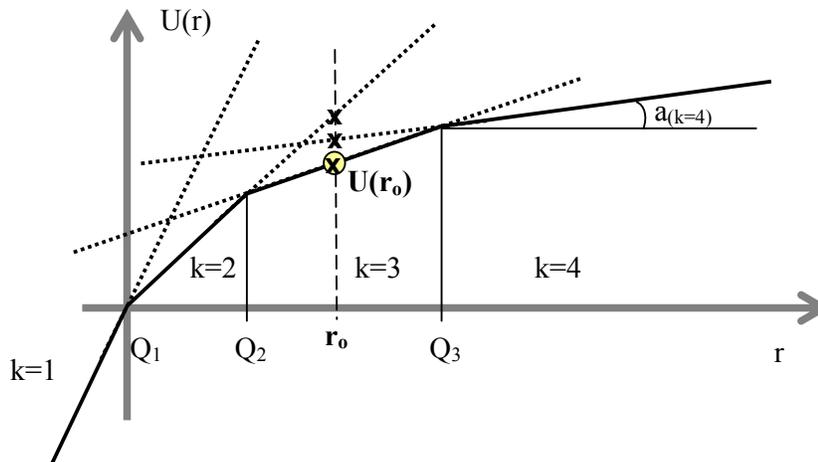


Figura 3-3 – Função Utilidade Linear por Partes (FULP)

Para a função utilidade descrita acima, pode-se visualizar a sua inversa transpondo os eixos “r” e “U(R)”. A figura a seguir expressa a inversa da função Figura 3-3.

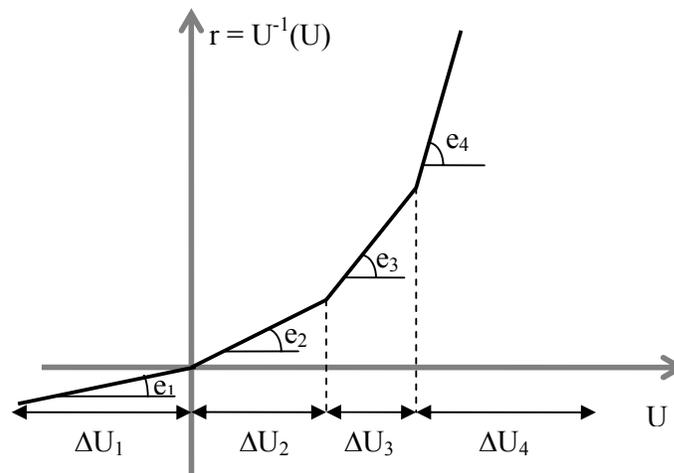


Figura 3-4 – Inversa da Função Utilidade Linear por Partes (InvFULP)

Na figura acima, os coeficientes angulares $\{e_k\}_{k=1,\dots,K}$ da inversa da utilidade podem ser diretamente obtidos através dos coeficientes $\{a_k\}_{k=1,\dots,K}$.

$$e_k = 1/a_k \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (3-9)$$

E por sua vez, os limites $\{\Delta U_k\}_{k=1,\dots,K}$ podem ser obtidos através das quebras $\{Q_k\}_{k=0,\dots,K}$.

$$\Delta U_k = a_k(Q_k - Q_{k-1}) \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (3-10)$$

Desta forma, para avaliarmos um valor U qualquer nesta função, temos que avaliar sob a envoltória superior dentro de todos os segmentos, conforme:

$$r(U) = \sup_{(1 \leq k \leq K)} \{ e_k U + w_k \} \quad (3-11)$$

Onde $\{w_k\}_{k=1,\dots,K}$ são os coeficientes lineares da inversa da utilidade.

Entretanto, para realizarmos tal avaliação podemos somar cada segmento que antecede o montante U (se este for maior que zero) ponderado por suas respectivas inclinações. Por exemplo, para calcularmos o valor que a função exibida na Figura 3-4 assume, para um ponto em seu domínio, dentro da região do terceiro segmento ($U \in \Theta_3$), devemos somar integralmente o segundo segmento ponderado por sua inclinação, com o montante correspondente do terceiro segmento, necessário para atingir o valor U avaliado. Isso acarreta em: $R(U \in \Theta_3) = \Delta U_2 \cdot e_2 + \delta_3 \cdot e_3$. Onde δ_3 é tal que $\Delta U_2 \cdot e_2 + \delta_3 \cdot e_3 = U$. É importante notar que, em função da hipótese feita, de que $U(Q_1)=0$, o primeiro segmento da inversa expressa os valores negativos de U (eixo horizontal da Figura 3-4). Assim, o primeiro segmento só será incluído nesta soma quando o valor de U for menor que zero. E neste caso, o primeiro segmento será o único necessário para compor o valor avaliado.

Utilizando essa estratégia, podemos criar uma variável para cada segmento $\{\delta_k\}_{k=1,\dots,K}$ que indicará o montante de cada segmento que deverá ser utilizado para compor o valor U . Nesse sentido, a função inversa da utilidade $U^{-1}(U)$, que expressa o equivalente certo (EC) ao ser avaliada no montante $U=EU$ (valor esperado da utilidade), pode ser escrita da seguinte forma:

$$EC(EU) = \sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k \cdot e_k - \delta_1 \cdot e_1 \quad (3-12)$$

$$0 \leq \delta_k \leq \Delta U_k \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K \quad (3-13)$$

$$\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k - \delta_1 = EU \quad (3-14)$$

Entretanto, supondo um valor fixo para a utilidade esperada EU, o conjunto de restrições acima, (3-13) e (3-14), ainda não é suficiente para reproduzir o comportamento esperado para as variáveis $\{\delta_k\}_{k=1,\dots,K}$ ao maximizarmos a expressão (3-12). Somente com essas restrições, ao otimizarmos (3-12), o valor EU será atendido somente com a variável δ_K , a qual proporciona o maior acréscimo da função objetivo por unidade de “orçamento” disponível (EU). O problema definido por maximizar (3-12), sujeito a (3-13) e (3-14) pode ser visto como o problema da mochila (*Knapsack*) linear (contínuo). Neste, a solução ótima se dá atendendo ao orçamento (representado por EU), com os recursos mais rentáveis. Como neste caso, $\Delta U_K = +\infty$, o orçamento será integralmente atendido pelo último segmento.

Assim, necessitamos incorporar um conjunto de variáveis binárias $\{y_k\}_{k=1,\dots,K}$ que definirão a ordem que os segmentos deverão ser utilizados. Neste sentido, estas variáveis deverão impor uma ordem crescente em k na seleção dos segmentos a serem somados, valendo um para todo k até a região onde esteja EU. A partir desta região, todas as demais variáveis y_k à frente deverão apresentar o valor zero. Este comportamento pode ser modelado pela restrição (3-15). Adicionalmente, (3-16) dita como os limites das variáveis $\{\delta_k\}_{k=1,\dots,K}$ devem ser controlados pelas variáveis $\{y_k\}_{k=1,\dots,K}$. Esta restrição impõe um limite zero para segmentos a frente do valor EU. Entretanto, somente com as duas primeiras restrições, de ordem e limite, o modelo, ainda sim, poderia selecionar todas as variáveis $\{y_k\}_{k=1,\dots,K} = 1$ e novamente atender EU somente com δ_K . Pois mesmo se $\{y_i\}_{i \leq k^*} = 1$, as variáveis $\{\delta_i\}_{i \leq k^*}$ podem valer zero. Assim, precisamos impor, através de mais duas restrições, (3-17) e (3-18), o seguinte comportamento: se um dado segmento k+1 apresenta $y_{k+1} = 1$, então a variável (δ_k), do segmento imediatamente anterior – excluindo o primeiro, deverá estar em seu limite superior (ΔU_k). Para o caso δ_1 , esta lógica ocorre exatamente de maneira oposta, devido ao fato deste segmento representar o lado negativo da função.

$$\text{Logo, } y_2=1 \rightarrow \delta_1=0 \text{ e } y_2=0 \rightarrow \delta_1 \leq \Delta U_1$$

Ou seja, se um segmento é utilizado, os demais antecessores devem ter sido plenamente “preenchidos” ou utilizados, exceto o primeiro que deve ser zerado.

$$y_k \leq y_{k-1} \quad \text{para } k = 2, \dots, K \quad \text{e} \quad y_1 = 1 \text{ (sempre)} \quad (3-15)$$

$$\delta_k \leq y_k \cdot \Delta U_k \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K \quad (3-16)$$

$$\delta_k \geq y_{k+1} \cdot \Delta U_k \quad \text{para todo } k = 2, \dots, K-1 \quad (3-17)$$

$$\delta_1 \leq (1 - y_2) \cdot \Delta U_1 \quad (3-18)$$

Finalmente, se juntarmos as restrições (3-7) e (3-8) do problema de maximização da utilidade esperada com as restrições (3-13) a (3-18), substituindo o valor EU, em (3-14), pela função objetivo (3-6), obteremos o conjunto de restrições necessárias para o modelo de maximização do equivalente certo da renda, onde (3-12), será a nova função objetivo proposta por esta abordagem. Contudo, nesta é importante notar que, conforme a Figura 3-4, além de $U(Q_1)=0$, hipótese necessária para nossa modelagem, foi considerado o caso particular onde $Q_1 = 0$ (rever Figura 3-3). Assim, a função objetivo que expressa o equivalente certo para o caso geral, onde Q_1 pode ser qualquer, deve conter este termo somado. Evidentemente, este fato é irrelevante para a solução ótima (\mathbf{x}^*) que será gerada pelo modelo, pois representa apenas uma translação vertical da função objetivo, porém será de extrema importante ao compararmos o valor da função objetivo com os demais resultados como, por exemplo, o valor esperado da renda. Desta maneira, acrescentando Q_1 à expressão (3-12), o modelo de otimização baseado no equivalente certo assume a seguinte forma para o caso de um período:

$$EC^* = \text{Maximizar}_{(x, u, \delta, y)} \sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k \cdot e_k - \delta_1 \cdot e_1 + Q_1 \quad (3-19)$$

Sujeito a:

$$u_s \leq a_k \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) + b_k \quad \forall k=1, \dots, K \text{ e } s=1, \dots, S \quad (3-20)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (3-21)$$

$$\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k - \delta_1 = \sum_s p_s \cdot u_s \quad (3-22)$$

$$y_k \leq y_{k-1} \quad \forall k = 2, \dots, K \quad (3-23)$$

$$\delta_k \leq y_k \cdot \Delta U_k \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3-24)$$

$$\delta_k \geq y_{k+1} \cdot \Delta U_k \quad \forall k = 2, \dots, K-1 \quad (3-25)$$

$$y_k \in \{0,1\} \text{ e } y_1 = 1 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3-26)$$

$$\delta_k \in \mathfrak{R}_+ \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3-27)$$

$$u_s \in \mathfrak{R} \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (3-28)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^n \quad (3-29)$$

É importante ressaltar que no modelo proposto (acima) as variáveis inteiras (binárias) não dependem do número de cenários considerados para se caracterizar as incertezas. Para os casos onde as incertezas sejam caracterizadas por cenários simulados (Simulação de Monte Carlo), torna-se importante que o modelo seja robusto e capaz de ser executado em um tempo razoável para um elevado número de cenários, de forma a garantir a estabilidade amostral dos resultados.

Como os algoritmos do tipo *branch and bound*, utilizados para resolver o modelo proposto, apresentam uma complexidade exponencial com relação ao número de variáveis inteiras, a propriedade ressaltada acima torna-se bastante relevante para a aplicabilidade deste modelo.

3.3

Generalização para o problema multi-período

O modelo descrito anteriormente, para um só período, proporciona sempre a mesma solução ótima (x^*) que o modelo (3-6) de maximização da utilidade esperada. Conforme já mencionado, este resultado decorre do fato da inversa da utilidade ser uma função biunívoca e estritamente crescente.

Entretanto, essa afirmação não pode ser feita no caso multi-período de interesse, pois ao avaliar as utilidades esperadas dos diversos períodos em uma função convexa crescente (função inversa da utilidade - Figura 3-4) tem-se um novo gradiente, se comparado ao caso da utilidade esperada. Desta maneira, ambas as abordagens até admitem soluções idênticas, porém sob certas circunstâncias envolvendo as taxas de desconto utilizadas em cada abordagem e as derivadas da inversa da utilidade nos pontos de utilidade esperada em cada

período. Essas relações são abordadas e analisadas no Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período.

A extensão do modelo proposto (3-19) a (3-29) para o caso multi-período, onde, por exemplo, pretende-se analisar uma oportunidade de contratação para os próximos T períodos, torna-se direta. À medida que a metodologia descrita em 3.2 permite precificar o fluxo estocástico e encontrar o seu equivalente certo para cada período, a taxa de desconto que deverá ser aplicada a esse fluxo equivalente é o custo de capital que o agente tomador de decisão requer na ausência de risco.

Neste contexto, se considerarmos (J^{LR}) o custo de capital livre de risco do agente, o modelo para um período, anteriormente apresentado, pode ser estendido para o caso de T períodos da seguinte forma:

$$EC^* = \text{Maximizar}_{(x, u, \delta, y)} \sum_{t \leq T} (\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_{t,k} \cdot e_{t,k} - \delta_{t,1} \cdot e_{t,1} + Q_{t,1}) \cdot (1 + J^{LR})^{-t} \quad (3-30)$$

Sujeito a:

$$u_{t,s} \leq a_{t,k} \cdot R_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_{t,s}) + b_{t,k} \quad \forall k=1, \dots, K; s=1, \dots, S \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-31)$$

$$\mathbf{G}_{(T)} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(T)} \quad (3-32)$$

$$\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_{t,k} - \delta_{t,1} = \sum_s p_s \cdot u_{t,s} \quad \forall t=1, \dots, T \quad (3-33)$$

$$y_{t,k} \leq y_{t,k-1} \quad \forall k = 2, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-34)$$

$$\delta_{t,k} \leq y_{t,k} \cdot \Delta U_{t,k} \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-35)$$

$$\delta_{t,k} \geq y_{t,k+1} \cdot \Delta U_{t,k} \quad \forall k = 2, \dots, K-1 \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-36)$$

$$y_{t,k} \in \{0, 1\} \text{ e } y_1 = 1 \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-37)$$

$$\delta_{t,k} \in \mathfrak{R}_+ \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-38)$$

$$u_{t,s} \in \mathfrak{R} \quad \forall s = 1, \dots, S \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-39)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^n \quad (3-40)$$

Neste caso, a restrição (3-32) compreende todas as restrições impostas anteriormente às variáveis de decisão, como as novas que poderão ser inseridas em função das relações entre períodos. Por exemplo, no caso multi-período, o vetor de decisão pode representar os montantes a serem contratados para um conjunto de contratos candidatos com diferentes datas de início e duração. Neste caso, esta restrição deverá expressar todas as restrições intertemporais para os montantes a serem contratados, não permitindo, por exemplo, que o montante total contratado em todo período viole o limite máximo de energia lastreada pelos ativos de geração (garantia física de energia de cada usina).

3.4

Exemplo de Aplicação – Contratação de Longo Prazo

Para ilustrar uma possível aplicação do modelo obtido, vamos considerar o problema de contratação ótima de um gerador hidráulico de energia para os próximos 5 anos. Devido à grande volatilidade dos preços de curto prazo (*spot*) de energia a contratação de longo prazo proporciona aos geradores um fluxo de caixa estável e seguro. Diversos trabalhos foram desenvolvidos no sentido de estudar os impactos da presença de contratos futuros em mercados elétricos hidrelétricos como o Brasil e outros [31][33][34][35][51].

Neste exemplo vamos explorar o impacto na decisão ótima de contratação com relação ao perfil de risco. Para isso, vamos calcular a renda de um gerador hidrelétrico com apenas um contrato e otimizar a quantidade contratada de forma a maximizar o seu equivalente certo conforme proposto neste capítulo. Conforme exibido no capítulo 10 (ANEXO B retirado de [3]), expressão (10-1), a renda de um período de uma empresa geradora relativa à venda de um contrato do tipo quantidade a um preço P (R\$/MWh) e quantidade E (MWh) assume a seguinte forma:

$$R_{t,s}(E) = E \cdot P + (G_{t,s} - E) \cdot \pi_{t,s} \quad (3-41)$$

Onde a primeira parcela corresponde à receita fixa do contrato e a segunda corresponde à liquidação da diferença entre a geração ($G_{t,s}$) e a quantidade contratada (E) ao preço $\pi_{t,s}$ (R\$/MWh) do mercado de curto prazo (ou spot). Esta segunda parcela (variável) se traduz em uma receita de venda do excedente de energia produzida, caso a geração seja superior ao montante contratado, e em uma despesa com a compra no mercado de curto prazo do montante de energia necessário para honrar o montante contratado.

Neste caso, o vetor de variáveis de decisão apresenta somente uma dimensão, o montante contratado ($x = [E]$). Já o vetor de incertezas é bidimensional e pode ser representado pelo seu conjunto de possíveis cenários $\{\xi_{t,s} = [\pi_{t,s}, G_{t,s}]^T\}_{s=1,\dots,S}$.

Neste exemplo, será analisado o caso de um gerador hidrelétrico com 100 MW médios de lastro descontratados, que pretende encontrar o montante de contratação ótimo para uma proposta de contratação com início em janeiro de 2010 e duração de cinco anos (até 2014), ao preço de 125 R\$/MWh.

Para um gerador neutro a risco, a decisão ótima seria contratar toda sua energia, devido ao preço de contrato ser superior ao spot médio neste período (120 R\$/MWh)⁷. Além disso, neste exemplo será considerado um custo de capital de 10%, real ao ano, como a taxa de referência para fluxos certos.

Neste caso, o valor presente líquido da renda esperada de cada período obtido foi de 406 MMR\$. A distribuição de probabilidade do valor presente líquido pode ser visualizada na figura a seguir:

⁷Para gerar os cenários de preço spot e geração, foi executado um modelo de despacho hidrotérmico (SDDP de propriedade da PSR Consultoria) onde a configuração de oferta e demanda do curto e médio prazo (até 2011) foi ajustada conforme o Plano Mensal de Operação (PMO) de maio de 2007. Para o longo prazo foi considerada uma inserção de fontes de acordo com o potencial de cada região, de forma a tornar o balanço oferta e demanda equilibrado e proporcionar um risco de déficit inferior a 5% em todos os anos.

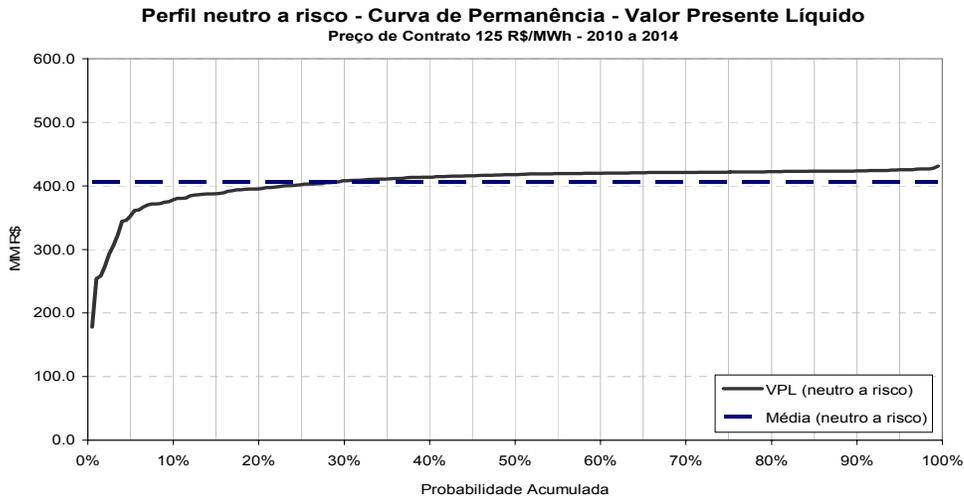


Figura 3-5 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil neutro a risco.

Neste caso, pode-se observar a presença de eventos extremos, onde o valor presente dos resultados futuros assume valores muito abaixo da média. Entretanto, esse fato fica mais evidente ao analisarmos a distribuição da renda de cada período, que, segundo a figura abaixo, indica a possibilidade de resultados negativos, frutos da correlação negativa entre preço spot e geração hidráulica.

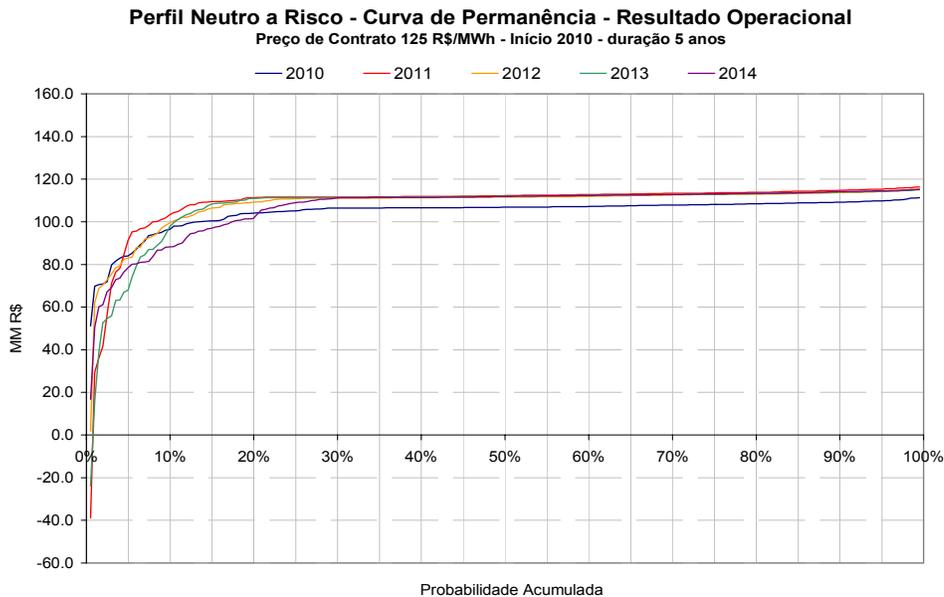


Figura 3-6 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida, ou resultado operacional do contrato, de cada período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil neutro a risco.

Devido ao risco de preço e quantidade, que proporciona a ocorrência de perdas financeiras em alguns cenários, o montante de contratação deverá ser selecionado segundo um perfil de aversão a risco que reflita, por exemplo, a aversão a resultados financeiros piores que a renda esperada no spot, a qual pode servir de referência para um gerador descontratado. No período estudado, a renda média esperada para a venda da geração do gerador no mercado spot apresenta um valor de 100 MMR\$ por ano (média nos períodos e cenários). Assim, uma possível função utilidade linear por partes poderia conter dois pontos de quebra, $Q_1 = 80$ MMR\$ e $Q_2 = 100$ MMR\$, proporcionando assim três segmentos de diferentes inclinações: resultados abaixo de 80% da renda esperada no spot (altamente penalizados – inclinação 20), resultados entre 80% e 100% desta (penalizados – inclinação 2) e resultados acima da renda esperada no spot (inclinação 1).

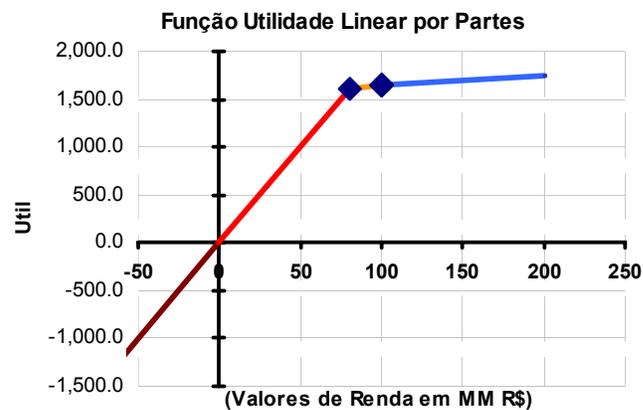


Figura 3-7 – Função Utilidade Linear por Partes com três segmentos (dois pontos de quebra)

Na tabela abaixo é exibido o resumo da solução ótima obtida pelo modelo (3-30) a (3-40) para o perfil de aversão a risco, definido pela função utilidade acima Figura 3-7 (primeira linha da tabela). Além deste resultado, uma segunda linha foi inserida à tabela de forma a contrastar esta solução com a solução neutra a risco. Desse modo, o equivalente certo baseado no perfil de aversão a risco (referente à FU da Figura 3-7) foi calculado para ambas as soluções.

Tabela 3-1 – Comparação da solução obtida pelos perfis de aversão e neutralidade a risco (resultados para todo o período – 2010 a 2014)

Solução	Contratação (% E^{\max})	VPL(10%,5 anos) de $E(R_t)$	VPL(10%,5 anos) de EC(R_t)	Prêmio de Risco
Perfil de Aversão	82%	402 MMR\$	387 MMR\$	3.8%
Perfil de neutralidade	100%	406 MMR\$	354 MMR\$	12.8%

Na Tabela 3-1 pode-se ver que o perfil de aversão a risco, selecionou uma contratação de 82%, de forma a se proteger dos cenários onde a geração é baixa e o preço alto. Assim, os cenários de renda inferiores a 80 MMR\$, exibidos na Figura 3-6 para uma contratação de 100%, foram mitigados conforme mostra a Figura 3-8. Além disso, fica evidente a troca realizada entre as duas soluções. Na solução de neutralidade a risco, onde o valor esperado do VPL é maximizado, a solução apresenta um valor esperado para o VPL igual 406 MMR\$, aproximadamente 1% superior (4 MMR\$) ao obtido na solução com perfil de aversão a risco. Entretanto, para este perfil, onde o equivalente certo é maximizado, o valor presente dos equivalentes certos de cada período resultou em 387 MMR\$, 33 MMR\$ (9%) acima da mesma medida (EC) aplicada aos fluxos resultantes da solução obtida pelo perfil neutro a risco. Isso nos indica que para um agente com perfil de aversão a risco, contratar 82 MW médios ao invés dos 100 disponíveis implica em uma “troca” onde perde-se 4 MMR\$ em termos de valor esperado, para se obter 33 MMR\$ em termos de equivalente certo.

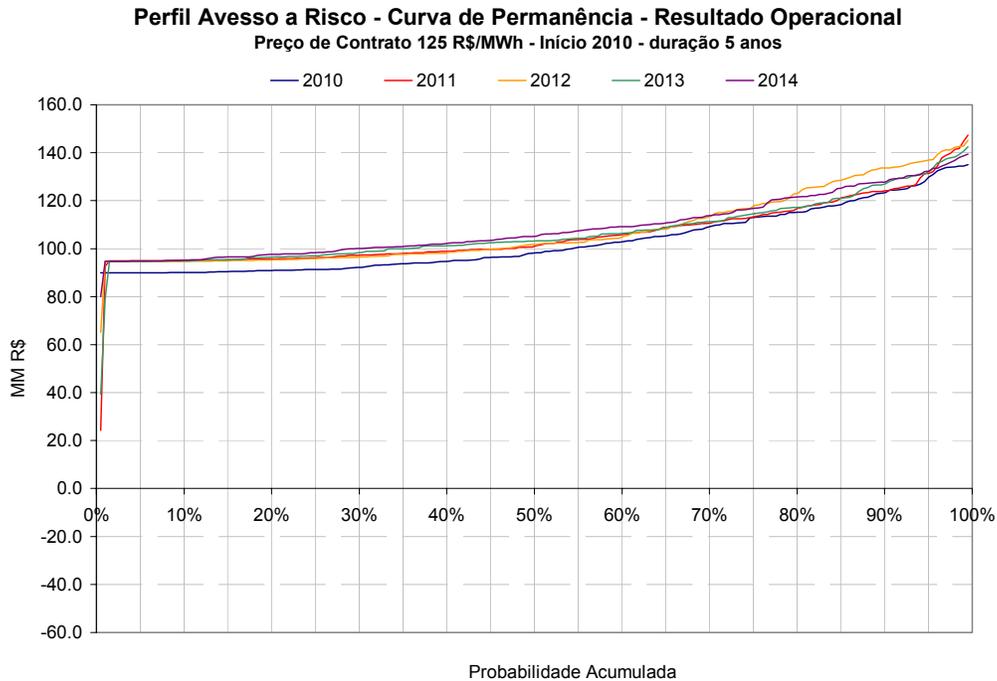


Figura 3-8 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida, ou resultado operacional do contrato, de cada período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil de aversão a risco.

Esta troca pode ser representada graficamente pela “melhoria” (em termos dos 10% piores cenários) da distribuição do valor presente líquido resultante da solução baseada no perfil de aversão a risco com relação ao obtido pelo perfil de neutralidade. Para isto, pode-se comparar diretamente na Figura 3-9 (a seguir) as distribuições dos VPL’s de ambas as soluções.

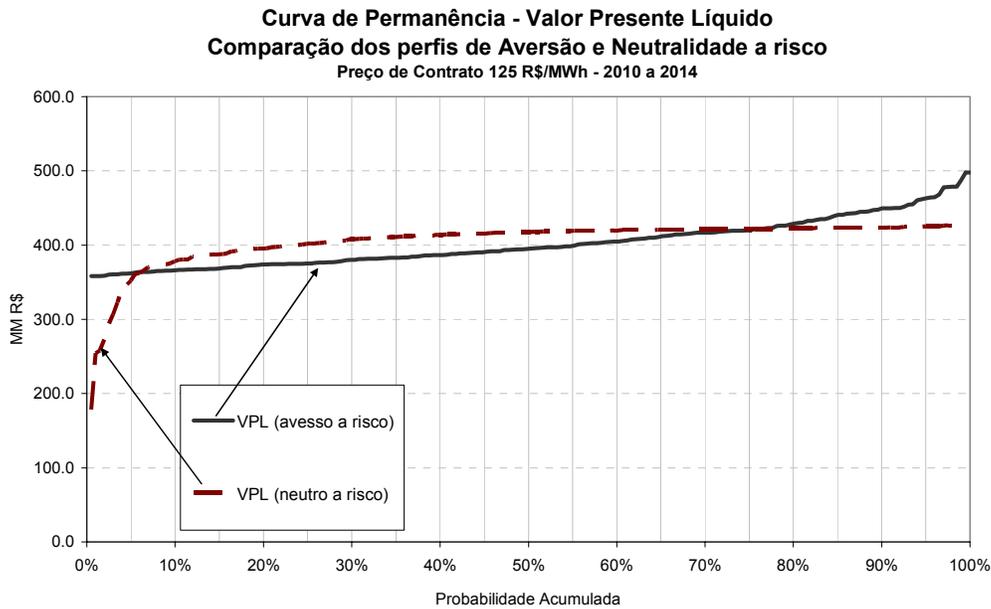


Figura 3-9 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação. Comparação entre as soluções obtidas para os perfis de aversão e neutralidade a risco.

Finalmente, podemos comparar a solução obtida como o funcional proposto neste capítulo, o qual chamaremos de MaxEC, com a solução gerada pelo funcional clássico de maximização de utilidade esperada (MaxEU). Para fins de comparação, utilizaremos como fator de impaciência previsto no modelo MaxEU, o mesmo valor do custo de capital livre de risco exigido pelo agente e utilizado no modelo MaxEC.

Na tabela a seguir, a solução gerada pelo modelo proposto denominada “Perfil de Aversão a Risco” na Tabela 3-1 (acima), foi repetida e referenciada ao seu modelo originário (MaxEC). Em seguida, a solução obtida pelo modelo clássico (MaxEU) foi inserida na linha abaixo e para esta, o valor do funcional proposto foi calculado e exibido na coluna “VPL(10%, 5 anos) de EC(R_t)”.

Tabela 3-2 – Comparação da solução obtida pelos perfis de aversão a risco proposto (MaxEC) e clássico (MaxEU). Resultados para todo o período – 2010 a 2014.

Solução	Contratação (% E^{\max})	VPL(10%,5 anos) de $E(R_t)$	VPL(10%,5 anos) de $EC(R_t)$	Prêmio de Risco
MaxEC	82%	402.5 MMR\$	387.37 MMR\$	3.8%
MaxEU	85%	403.1 MMR\$	387.35 MMR\$	3.9%

Como pode ser constatado na tabela acima, as soluções obtidas por ambas as abordagens apresentam valores muito parecidos, o que pode ser inclusive percebido na distribuição de probabilidade do VPL da renda nas duas situações (Figura 3-10).

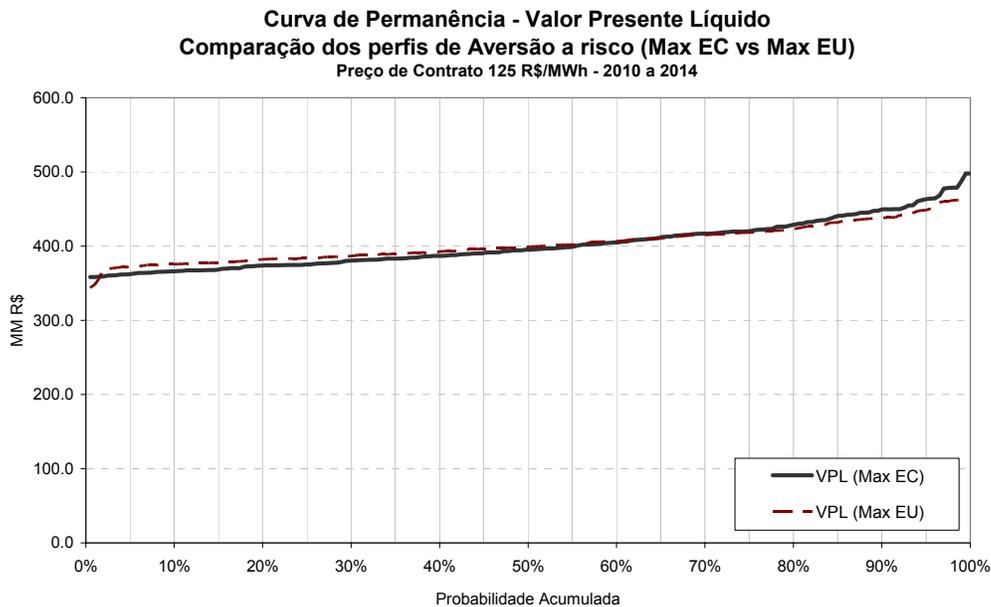


Figura 3-10 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação. Comparação entre as soluções obtidas para os perfis de aversão e neutralidade a risco.

É importante ressaltar que foi realizada uma sensibilidade na função utilidade, deslocando os pontos de quebra para valores nas vizinhanças dos adotados. Para cada nova função utilidade, os dois modelos foram utilizados

gerando soluções mais próximas (em termos de distância entre as distribuições do VPL) que as exibidas, sendo, em sua maioria, iguais entre si (mesma decisão de contratação e, portanto, mesma distribuição). No ponto de vista do autor, esta pequena diferença encontrada entre as soluções não demonstra uma fraqueza para o funcional proposto e sim um ponto alto, pois à medida que os resultados se mantêm bastantes robustos com relação aos obtidos pelos modelos baseados em utilidade esperada, o funcional proposto introduziu todas as virtudes de interpretação e proporcionou uma forma bastante objetiva para a especificação de seus parâmetros.

4

Relação entre utilidade, equivalente certo e medidas de risco

4.1

Medidas de Risco como perfil de aversão a risco

As medidas de risco e suas propriedades têm sido bastante exploradas no contexto de finanças nas últimas duas décadas. Classicamente, o modelo econômico utilizado para capturar o comportamento de aversão a risco em problemas de decisão sob incerteza é o modelo de utilidade esperada. Porém, em função da dificuldade de se encontrar uma utilidade prática, que expresse a aversão a risco do tomador de decisão com base em parâmetros mais práticos do dia-a-dia, de forma mais isenta a uma subjetividade pessoal e que simplesmente expressassem a “aversão ao risco da entidade” como, por exemplo, um banco ou empresa geradora de energia, a busca por medidas de risco que fossem capazes de controlar o risco assumido durante o processo decisório foi bastante impulsionada [19][21][26][28].

Neste sentido, buscou-se atacar o problema “risco” de resultados indesejáveis, de forma mais direta e pragmática, onde a distribuição dos resultados seriam diretamente monitoradas e “controladas” através destas medidas e de valores limites de exposição estipulados pelos comitês de risco. Assim sendo, a atribuição subjetiva de um valor de utilidade ou satisfação para cada resultado, caracterizado pela função utilidade, foi deixado de lado e o objetivo, então, passou a ser maximizar a esperança dos resultados futuros controlados por restrições de risco.

Por exemplo, podemos citar o caso particular do α -Value-at-Risk (VaR_α) [29][40] que propôs controlar a perda financeira associada a um dado quantil $(1-\alpha)$ da distribuição de probabilidade do resultado. Isso proporcionou a segurança necessária para que o agente tomasse suas decisões baseado na maximização do valor esperado dos resultados, pois a probabilidade de se obter uma dada perda

financeira poderia ser tão pequena quanto se quisesse (controlada pelo valor $1-\alpha$ especificado pelo agente).

Contudo, a inserção dessas restrições em problemas de otimização estocástica proporcionavam um grande aumento de sua complexidade e em alguns casos requeriam a inclusão de variáveis inteiras, como o caso do Value-at-Risk. Desta forma, muitos estudos foram realizados nesta área no sentido de se desenvolver formas eficientes de se implementar e acoplar tais restrições em problemas de otimização [48]. Além disso, muitos esforços foram realizados no sentido de se estabelecer as propriedades adequadas e desejáveis para tais medidas de risco [9][10][11][] com relação à coerência das soluções e resultados obtidos. Segundo Artzner et al. (1999) (referência completa em [10]), se \mathcal{X} é um espaço linear de funções mensuráveis que definem as variáveis aleatórias (que representam perdas financeiras) do espaço de probabilidade definido por (Ω, \mathcal{P}, P) e $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma medida de risco coerente, então,

1. ρ deve ser Monótona: $X \leq Y$, então, $\rho(Y) \leq \rho(X)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}$
2. ρ deve ser Relevante: $X \geq 0$, então $\rho(X) \leq 0$, $\forall X \in \mathcal{X}$
3. ρ deve ser Sub-adititiva: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}$
4. ρ deve ser Homogenia Positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\forall X \in \mathcal{X}$ e $\lambda > 0$
5. ρ deve ser Transladável: $\rho(X + a) = \rho(X) - a$, $\forall X \in \mathcal{X}$ e $a \in \mathfrak{R}$

4.2

Conditional Value at Risk (CVaR)

O métrica de risco CVaR tem sido vastamente utilizada em problemas de portfolio e em função da sua capacidade de capturar a presença de eventos de alta profundidade (catastróficos) na distribuição da renda. Esta tem sido uma crítica recorrente feita ao VaR, que não diferencia distribuições com diferentes profundidades de perdas. Geralmente, tanto o VaR quanto o CVaR são definidos para medir perdas, e devido a isso, são definidos para o negativo dos resultados financeiros. Neste contexto, ambos são definidos como limites superiores para as máximas perdas permitidas. Entretanto, neste trabalho vamos assumir, sem perda de generalidade, que ambos são definidos para a renda líquida. Assim, estes passam a ser limites inferiores de resultados mínimos aceitáveis.

Na figura a seguir, é exemplificado o caso de duas distribuições A com menor profundidade em sua cauda inferior e B com possibilidades de eventos de renda bastante negativas. Neste exemplo, ambas as distribuições apresentam o mesmo Value-at-risk de $\alpha\%$, ou seja, com probabilidade de $\alpha\%$ a renda líquida nos dois casos será superior ao valor $VaR_\alpha(A)$ e (B) . Porém, a distribuição B apresenta um maior valor esperado que A. Desta forma, um modelo com o objetivo de maximizar o valor esperado com uma restrição de risco limitando o VaR, apontaria como solução ótima a opção B.

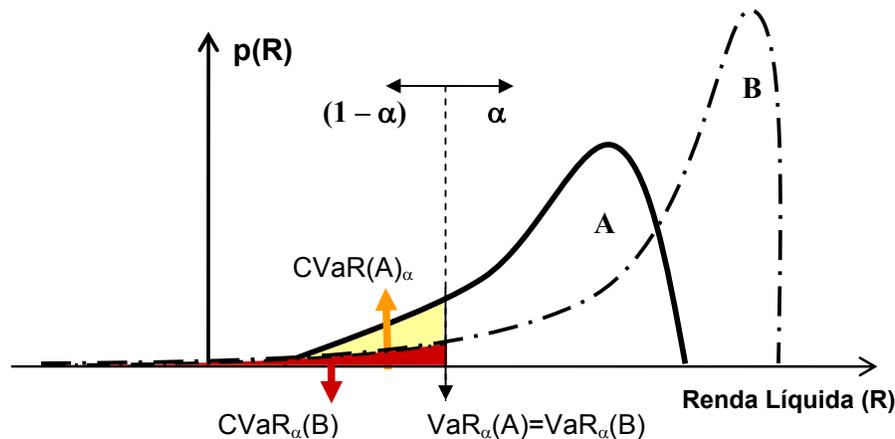


Figura 4-1 – Comparação de $CVaR_\alpha$ para duas distribuições com o mesmo valor de VaR_α , porém com diferentes curtoses.

Entretanto, pode-se argumentar que os eventos extremos da distribuição B poderiam levar a empresa à falência e logo, não deveria ser considerada. Nesta mesma figura, pode-se ver que o $CVaR$ de ambas as distribuições são diferentes, e que o $CVaR_\alpha(B)$ sinalizou a existência de eventos de alta profundidade abaixo do nível do VaR.

Após o trabalho publicado por R.T. Rockafellar and S.P. Uryasev (2000) [48], o $CVaR$ foi impulsionado frente às demais medidas de risco devido às características de sua formulação matemática. Essencialmente, o $CVaR$ que anteriormente era calculado como um valor esperado condicionado ao valor do VaR, conseqüentemente tornando-se dependente da implementação deste último, passou a ser formulado como um problema de otimização de valor esperado irrestrito, sujeito a restrições lineares. Isso possibilitou a sua implementação e

utilização em problemas de otimização linear de forma direta, apenas adicionando um conjunto restrições lineares ao problema.

Diversos trabalhos tem sido realizados no sentido de comparar essas duas medidas (ver [22]), entretanto, o maior crítica feita ao VaR se dá devido ao não atendimento da propriedade de sub-aditividade, para o caso de perdas, ou super-aditividade, para os casos de renda que tratamos nesta tese (uma interessante discussão na linha desta crítica pode ser encontrada em [5] e [6]). Assim sendo, esta medida não atende uma das condições necessárias para se enquadrar na classe de medidas coerentes de risco, podendo levar a decisões errada do ponto de vista de coerência entre risco e retorno [24][25]. Em [5] e [6] também é evidenciada e discutida a não convexidade e a presença de mínimos locais que esta medida proporciona para diferentes portfolios ou diferentes níveis de risco, além de apresentar argumentos no sentido de tornar indispensável o uso de uma medida coerente. Neste contexto, [6] introduz o CVaR como a alternativa natural para o VaR em problemas de portfolio, evidenciando suas propriedades de coerência e convexidade.

A definição clássica para o Conditional Value at Risk ($CVaR_\alpha$) de uma variável aleatória (v.a.) R com função de probabilidade acumulada $F_R(r) = P(R \leq r)$ é:

$$CVaR_\alpha(R) = E[R | \Psi] = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (4-1)$$

onde, $\Psi = \{R: R \leq VaR_\alpha(R)\}$ é o conjunto de valores inferiores a $VaR_\alpha(R)$, que a v.a. R pode assumir, $F_{R|\Psi}$ é função de probabilidade condicionada ao evento Ψ e

$$VaR_\alpha(R) = \inf_{(r)} \{r: F_R(r) \geq 1-\alpha\} \quad (4-2)$$

Neste caso, o $CVaR_\alpha(R)$ é obtido através da esperança condicionada a valores de renda inferiores ao VaR_α , que pode ser visto como um quantil desta mesma variável aleatória. Esta definição, apesar de ser bastante intuitiva, a primeira vista não oferece uma forma eficiente de ser inserida em problemas de programação linear.

Contudo, segundo Rockafellar et al., o Conditional Value at Risk de uma variável aleatória R também pode ser escrito através do seguinte problema de otimização:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Maximizar}_{(z)} \{z + E[(R - z)]^-(1-\alpha)\} \quad (4-3)$$

onde $(.)^-$ é a função truncamento, tal que,

$$(x)^- = x, \text{ se } x \leq 0 \text{ e } (x)^- = 0, \text{ se } x \geq 0 \quad (4-4)$$

Além disso, no ponto ótimo,

$$z^* = \text{argmax}_{(z)} \{z + E[(R-z)]^-(1-\alpha)\} = \text{VaR}_\alpha(R) \quad (4-5)$$

Assim, se considerarmos os cenários e probabilidades $\{R_s, p_s\}_{s=1,\dots,S}$ que caracterizam a distribuição de R , a formulação (4-3) pode ser reescrita pelo seguinte PL:

$$\text{Maximizar}_{(\beta, z)} z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \quad (4-6)$$

Sujeito a:

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-7)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R_s - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-8)$$

Onde a função truncamento negativo $(.)^-$ é representada pelas restrições (4-7) e (4-8) e inserida na função objetivo através do valor esperado $\sum_s p_s \cdot \beta_s$.

O mais interessante desta formulação é que possibilita que esta seja implementada por um PL, como apresentado acima, reside no fato de que ela é definida para todo valor de R , diferentemente da formulação original (4-1), onde a esperança deve ser restrita a valores pertencentes ao conjunto Ψ .

No trabalho original [48], a expressão (4-3) é definida para as perdas de percentil superiores a $\alpha\%$, mas conforme já comentado, esta pode ser convenientemente associada para as piores rendas líquidas de forma a expressar a idéia de limite inferior para a distribuição de probabilidade. Então, devido à relevância deste resultado, tema central dos próximos desenvolvimentos deste trabalho, vamos rerepresentar a demonstração para o resultado (4-3) e (4-5) adaptado ao nosso caso, que trata de rendas e não de perdas.

Demonstração para (4-5):

Conforme a expressão (4-3),

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Maximizar}_{(z)} H(R, z) \quad (4-9)$$

onde

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int (R-z)^- \cdot dF_R \quad (4-10)$$

Como a função truncamento $(.)^-$ retornará zero para valores de $R \geq z$, esta expressão pode ser reescrita manipulada da seguinte forma

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z\}} R - z \cdot dF_R \quad (4-11)$$

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left(\int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - \int_{\{R \leq z\}} z \cdot dF_R \right) \quad (4-12)$$

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left(\int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - z \cdot F_R(z) \right) \quad (4-13)$$

$$H(R,z) = z \cdot \left(1 - \frac{F_R(z)}{1-\alpha} \right) + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left(\int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R \right) \quad (4-14)$$

Esta última então, pode ser facilmente derivada com relação a “z” e igualada a zero, conforme segue.

$$\frac{\partial H(R, z^*)}{\partial z} = 1 - \frac{F_R(z^*)}{1-\alpha} - \frac{z^* \cdot f_R(z^*)}{(1-\alpha)} + \frac{z^* \cdot f_R(z^*)}{(1-\alpha)} = 1 - \frac{F_R(z^*)}{1-\alpha} = 0 \quad (4-15)$$

Resultando em,

$$F_R(z^*) = 1-\alpha \quad (4-16)$$

Assim, conforme definido em (4-2),

$$z^* = \text{VaR}_\alpha(R) \quad (4-17)$$

Desta maneira, chegamos ao final da demonstração de (4-5). Para finalizar este resultado, podemos constatar que z^* é um ponto de máximo analisando a segunda derivada de $H(R,z)$. Como esta será negativa, para todo valor de z , z^* será obrigatoriamente um máximo.

Demonstração de (4-3):

Para demonstrar a igualdade (4-3), basta verificarmos que esta se dá ao avaliarmos $H(R,z)$ em z^* . Para isso, recorreremos à expressão (4-13) já convenientemente manipulada.

$$H(R,z^*) = z^* + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left(\int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R - z^* \cdot F_R(z^*) \right) \quad (4-18)$$

E devido à identidade (4-16), o segundo termo da equação acima se cancelará com o primeiro termo, acarretando em

$$H(R, z^*) = \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R \quad (4-19)$$

Nesta, o termo $(1-\alpha)^{-1}$ representa a probabilidade $P(R \leq \text{VaR}_\alpha(R))^{-1}$, que ao ser convenientemente combinada com F_R , e integrada em $\Psi = \{R \leq z^*\}$, reflete a esperança condicional do CVaR, conforme a definição original dada em (4-1):

$$H(R, z^*) = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (4-20)$$

Assim, finalizamos a demonstração para (4-3).

4.3

Relação entre problemas de maximização de renda com restrições de Conditional Value-at-Risk (CVaR) e problemas de maximização da Utilidade Esperada

Como mencionado, os desenvolvimentos dos grupos de finanças, aplicados a problemas práticos do dia-a-dia das empresas e instituições financeiras, caminhou no sentido de controlar o risco das posições assumidas (decisões tomadas), enquanto que o estudo da preferência entre resultados incertos de consumidores avessos a risco e suas conseqüências na formação e desenvolvimento de economias prosseguiu através da teoria de utilidade pelos economistas.

Assim, rapidamente criou-se um descasamento entre as duas vertentes (finanças e economia – medidas de risco e teoria de utilidade) que visavam modelar o mesmo processo (decisão sob incerteza), porém com abordagens diferentes. Enquanto os grupos de finanças buscavam tomar decisões altamente pragmáticas (quanto capital alocar hoje em um determinado grupo de ativos) com implicações extremamente realistas e arriscadas (resultados financeiros destas operações ao longo de um determinado horizonte de tempo), a teoria econômica visava caracterizar as propriedades decorrentes da atuação dos agentes frente ao risco em diversas economias.

Obviamente, nenhuma das duas finalidades é mais ou menos relevante que a outra, e claramente estão conectadas pelo seu objetivo comum: como caracterizar

o perfil de risco de um agente para que este seja capaz de tomar decisões sob incerteza. Nesse sentido, vamos mostrar como um conjunto de restrições de risco, que visam controlar os valores esperados condicionais de diferentes níveis de significância da distribuição dos resultados financeiros, pode ser interpretado como uma função utilidade linear por partes.

Para demonstrar de maneira simples essa conexão, vamos considerar um processo decisório de dois estágios, onde o agente deve tomar uma decisão no primeiro estágio, selecionando um vetor \mathbf{x} , a qual acarretará em uma renda estocástica no próximo estágio. Assumiremos que a função de renda representada por $R(\mathbf{x}, \xi)$ é linear em \mathbf{x} . Esta hipótese é bastante plausível e engloba a maioria dos problemas de decisão de compra e venda de energia elétrica e de ativos em geral, onde \mathbf{x} representa os montantes de contratação e ξ geralmente compreende os preços de mercado spot, produção de energia e outros fatores de incerteza que podem ser modelados.

Assim, a estratégia será seguinte: vamos escrever o problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de M restrições de risco do tipo, $\{CVaR_{\alpha_i}(R) \geq R_i^{\min}\}_{i=1, \dots, M}$, e mostrar que este pode ser reescrito como um problema de programação linear definido em (3-6) a (3-8) (proveniente da aplicação da formulação (2-2) a (2-3)).

Desta forma, o problema de maximização da renda esperada sujeito a M restrições $\{CVaR_{\alpha_i}(R) \geq R_i^{\min}\}_{i=1, \dots, M}$ pode ser visto a seguir.

$$\text{Maximizar}_{(\mathbf{x}, \beta, z)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) \quad (4-21)$$

Sujeito a:

$$\beta_{i,s} \leq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M \text{ e } s = 1, \dots, S \quad (4-22)$$

$$\beta_{i,s} \leq (1 - \alpha_i)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z_i] \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M \text{ e } s = 1, \dots, S \quad (4-23)$$

$$z_i + \sum_s p_s \cdot \beta_{i,s} \geq R_i^{\min} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M \quad (4-24)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (4-25)$$

Onde $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ e $R_i^{\min} \leq R_{i+1}^{\min}$ para todo $i=1, \dots, M$

Como visto no item anterior 4.2, as duas primeiras restrições deste problema produzem o efeito de truncamento negativo para os cenários da renda com relação

às variáveis $\{z_i\}$. Se dualizarmos o conjunto de restrições (4-24), inserindo na função objetivo uma penalização $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_M]^T$ por unidade de folga, dada pelo módulo do multiplicador simplex (ou variável dual de cada restrição), obtido ao se encontrar o ponto ótimo do problema original, obteremos uma nova função objetivo:

$$F^{\text{obj}} = \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) + \sum_i \lambda_i \cdot (z_i + \sum_s p_s \cdot \beta_{i,s} - R^{\text{min}}_i) \quad (4-26)$$

Devido ao fato da restrição ser do tipo maior ou igual “ \geq ”, a variável dual associada a esta restrição será negativa, indicando que ao aumentar o lado direito desta (R^{min}_i) estamos restringindo o espaço viável e, portanto, decrescendo o valor da função objetivo. Devido a este fato as penalidades $\{\lambda_i\}$ serão igualadas aos valores absolutos das respectivas variáveis duais das restrições de CVaR, garantindo assim, a coerência de (4-26) com o processo de relaxação lagrangeana do problema (4-21) a (4-25).

Esta nova função, nos permitirá alcançar o objetivo de mostrar que existe uma função linear por partes implícita no problema de maximização do valor esperado com restrições de CVaR mínimo que pode ser interpretada ou associada a uma função utilidade. Para isso, vamos rearranjar os termos estocásticos (termos que dependam dos cenários – s) para dentro de um mesmo somatório que represente o valor esperado dos mesmos, e por fim, obter a seguinte expressão:

$$F^{\text{obj}} = \sum_s p_s \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) + \sum_i \lambda_i \cdot \beta_{i,s}] + \sum_i \lambda_i \cdot (z_i - R^{\text{min}}_i) \quad (4-27)$$

Nesta, se olharmos somente para o primeiro termo (contido dentro do somatório de valor esperado, $\sum_s p_s \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) + \sum_i \lambda_i \cdot \beta_{i,s}]$), perceberemos que se trata de uma função linear por partes da função de renda R, com M+1 segmentos. Como visto no item anterior 4.2, para cada cenário s, a variável $\beta_{i,s}$ desempenha o papel da função truncamento $(\cdot)^-$ negativa dentro do problema de otimização (4-21) a (4-25) através das restrições (4-22) e (4-23). Desta forma, a função linear por partes implícita em (4-27) é composta por uma reta de inclinação um que sai da origem, somada a M outras funções lineares por partes, cada uma com dois segmentos dados pelas restrições (4-22) e (4-23). Essas componentes são ilustradas para um caso de duas restrições, para um ponto de renda “r”, qualquer, pertencente ao domínio desta.

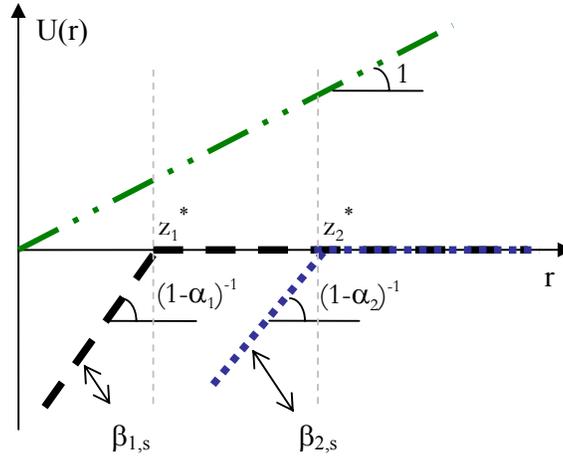


Figura 4-2 – Componentes da Função Utilidade Linear por Partes implícita ao problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de restrições do tipo CVaR.

Como o conjunto de restrições é um conjunto coerente, no sentido de que nenhuma restrição é sempre dominada por outra⁸, a seqüência $\{(1-\alpha_i)^{-1}\}_{i=1,\dots,M}$ é decrescente. Além disso, devido à $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$, a seqüência de valores obtidos (ótimos – solução de (4-3)) para $\{z_i^*\}_{i=1,\dots,M}$ é crescente e igual a $\{z_i^* = \text{VaR}_{\alpha_i}[R(\mathbf{x}, \xi)]\}_{i=1,\dots,M}$.

A composição dessas curvas pode ser generalizada da seguinte forma: para um dado valor de renda $r \in (z_{k-1}^*, z_k^*]$, onde $z_0^* = -\infty$, a curva composta somente receberá contribuição das funções diferentes de zero neste ponto, o que é equivalente a somar todas as “i” funções, tais que $z_i^* \geq r$, ponderadas pelos respectivos multiplicadores λ_i . Isso pode ser expresso por:

$$U(r) = r + \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1-\alpha_i)^{-1} \cdot (r - z_i^*) \quad \text{para } r \in (z_{k-1}^*, z_k^*] \quad (4-28)$$

e reescrito de forma a isolar o termo referente ao ponto de renda avaliado “r” conforme a seguinte expressão:

$$U(r) = r \cdot [1 + \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1-\alpha_i)^{-1}] - \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1-\alpha_i)^{-1} \cdot z_i^* \quad (4-29)$$

⁸ Uma dada restrição $i \in \{1, \dots, M\}$ de CVaR é dita “dominada” se existir alguma outra restrição $j \in (\{1, \dots, M\} \setminus \{i\})$ com $(1 - \alpha_j) \leq (1 - \alpha_i)$ e $R^{\min}_j \geq R^{\min}_i$. Ou seja, se existir uma exigência de renda mínima superior à da restrição i, para uma média condicionada a um quantil inferior ao associado a esta restrição, esta será dita dominada.

válida somente para $r \in (z_{k-1}^*, z_k^*]$

Desta forma, ao associarmos os coeficientes desta função para cada segmento $\{\Theta_k = (z_{k-1}^*, z_k^*)\}_{k=1, \dots, M+1}$ com os coeficientes $\{a_k$ e $b_k\}_{k=1, \dots, K}$ do problema (2-2) e (2-3), encontramos uma função utilidade linear por partes, tal que, ao resolvermos o problema de maximização da utilidade esperada (3-6) a (3-8) com esta, o resultado obtido é exatamente o mesmo que o encontrado pelo problema (4-21) a (4-25). Esta afirmação pode ser constatada através das condições de otimalidade de programação linear. Na solução ótima, quando a variável dual λ_i da i -ésima restrição de CVaR for diferente de zero a folga desta restrição valerá zero e vice-versa. Então, a associação dos coeficientes da utilidade pode ser feita diretamente da equação em (4-29) conforme a seguir:

$$a_k = [1 + \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1 - \alpha_i)^{-1}] \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K = M+1 \quad (4-30)$$

$$b_k = - \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1 - \alpha_i)^{-1} \cdot z_i^* \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K = M+1 \quad (4-31)$$

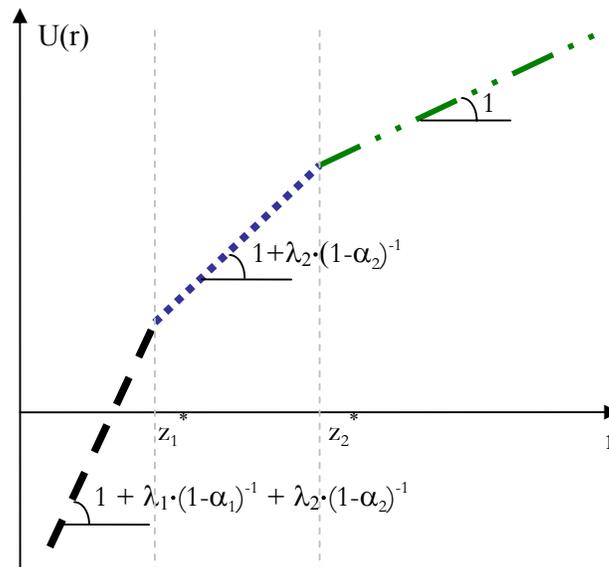


Figura 4-3 – Função Utilidade Linear por Partes implícita ao problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de restrições do tipo CVaR.

É importante notar que esta função utilidade é uma função utilidade clássica de von Neumann-Morgenstern (vN-M) encontrada a partir das condições de otimalidade do problema original. Segundo vN-M [56], a função utilidade não depende da distribuição da variável aleatória avaliada. Contudo, vimos em (4-30)

e (4-31) que a FU implícita ao problema (4-21) a (4-25) depende do valor ótimo $\{z_i^*, \lambda_i\}_{i=1,\dots,M}$ das variáveis primais e duais associadas às restrições de CVaR deste ponto. A presença destas variáveis na expressão da função utilidade identifica a dependência desta com o parâmetro estocástico ξ .

Desta forma, uma vez fixados os parâmetros $\{R_i^{\min}\}_{i=1,\dots,M}$ e $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,M}$, existe uma função utilidade para cada distribuição que o parâmetro de incerteza (instância do problema) possa apresentar. O efeito desta dependência será estudado mais adiante no exemplo ilustrado no item 4.4.1, onde será evidenciada a não linearidade com relação às probabilidades do funcional de preferência implícito ao problema analisado de maximização de renda sujeito à restrição de CVaR mínimo.

Este conceito é ainda mais acentuado ao estudarmos o comportamento do funcional implícito ao problema $\text{Maximizar}_{(x)}\{\text{CVaR}_\alpha[R(x,\xi)]:G \cdot x \leq d\}$, ou seja, quando o funcional é definido pelo próprio $\text{CVaR}_\alpha[R(x,\xi)]$. Para este caso, em que o índice de preferência dado a uma distribuição é o seu próprio CVaR, será evidenciada a presença de uma utilidade linear por partes de dois segmentos cujo ponto de quebra e os segmentos dependerão explicitamente da distribuição de probabilidade da variável aleatória $R(x,\xi)$ avaliada. O caso em que a FU depende da distribuição de probabilidade avaliada foi previsto por Machina em [32] para funcionais diferenciáveis nas probabilidades, que não é exatamente o caso que estamos tratando, porém a idéia desta dependência nos abre uma fonte de discussão bastante interessante para futuros trabalhos. A idéia desta utilidade será explorada e sua expressão final formalizada no Anexo E: A utilidade por trás do funcional CVAR.

4.3.1

Exemplo

Para ilustrar o resultado obtido e visualizarmos a função utilidade relativa a um caso onde será imposta uma restrição de CVaR, vamos considerar o mesmo problema de contratação ótima introduzido no capítulo anterior.

Contudo, neste caso nos restringiremos a apenas um período (ano de 2010), para o qual examinaremos os resultados obtidos. Com o intuito de exemplificar o

relacionamento as duas classes de problemas (maximização de renda esperada sujeito a uma restrição de CVaR e a forma clássica de maximização de utilidade esperada), seguiremos os seguintes passos: (i) analisar a distribuição de renda para o caso neutro a risco (maximizar o valor esperado da renda sem restrição) e identificar a presença de eventos indesejáveis; (ii) utilizar o modelo de maximização de renda com uma restrição de CVaR para a renda mínima; (iii) com base na solução deste problema, encontrar os valores para os dois coeficientes, angulares (4-30) e lineares (4-31), traçando assim, a utilidade implícita ao modelo utilizado em (ii).

Desta maneira, vamos considerar o mesmo gerador hidrelétrico com 100 MW médios de lastro descontratados, e encontrar o montante de contratação ótimo para uma proposta de contratação com início em janeiro de 2010 e duração de um ano, ao preço de 120 R\$/MWh (preço inferior ao preço considerado no exemplo do item 3.4, onde o contrato compreendia um período de 5 anos).

A decisão neutra a risco, sem qualquer restrição ou utilidade, é novamente de contratar 100% do lastro (espaço descontratado), devido ao preço spot médio em 2010 assumir o valor de 114 R\$/MWh, inferior aos 120 do contrato. Assim, a consequente distribuição de renda para o gerador pode ser visualizada na figura abaixo:

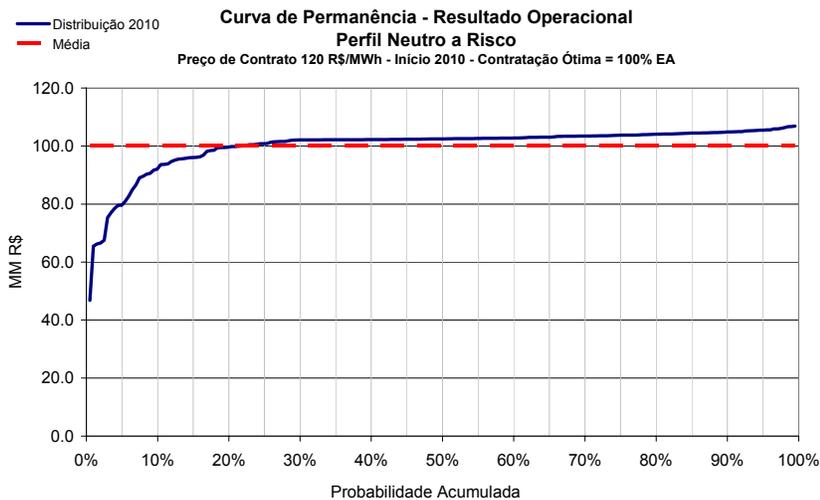


Figura 4-4 – Distribuição da Renda para um perfil neutro a risco – 100% do Lastro contratado – Preço de contrato igual a 120R\$/MWh – início em 2010 – duração de um ano.

O valor esperado do resultado neutro a risco, 100 MMR\$ durante todo o período (2010), pode ser contrastado com valores inferiores a 80 MMR\$ (perda de 20% com relação à média) que podem ocorrer com uma probabilidade de 5%. Assim, de forma a limitar esta perda, vamos impor uma restrição sobre a média dos cenários que apresentam o percentil associado inferior a 5%, para que esta seja assim, superior a 85 MMR\$. Ou seja, impor a restrição $CVaR_{95\%}(R_{2010}) \geq 85$ MMR\$.

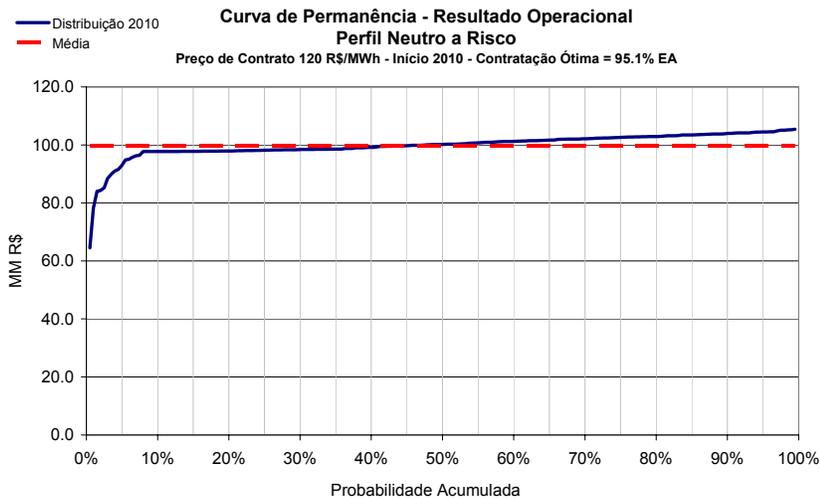


Figura 4-5 – Distribuição da Renda para um perfil avesso a risco ($CVaR_{95\%}(R_{2010}) \geq 85$ MMR\$) – 95.1% do Lastro contratado – Preço de contrato igual a 120R\$/MWh – início em 2010 – duração de um ano.

Na figura acima, já se pode notar a melhoria dos 5% piores cenários com relação ao caso neutro a risco. Para este caso, a variável dual associada à restrição de renda mínima assumiu o valor $\lambda = |-0.0146|$ e o respectivo ponto $z_1^* = 94.79$. Pode-se então apresentar a função utilidade de dois segmentos relativa a este problema que resultou na mesma solução anterior (95.1% de contratação):

Tabela 4-1 – Coeficientes da Função Utilidade Linear por Partes

Segmentos	Coeficientes angulares $\{a_k\}$	Coeficientes lineares $\{b_k\}$
1	1.29	-27.77
2	1	0

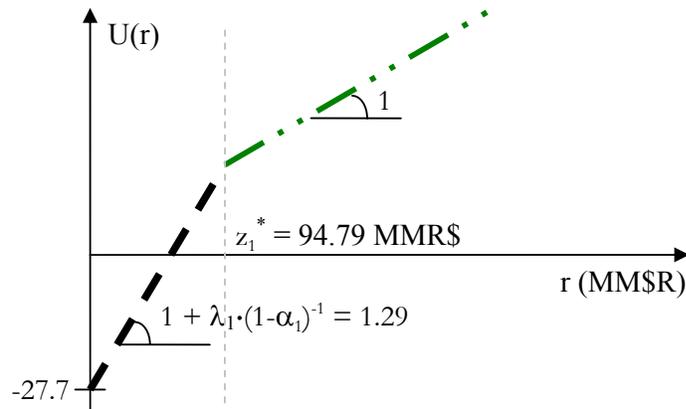


Figura 4-6 – Função Utilidade de dois segmentos (M+1) implícita para o caso de uma (M) restrição de CVaR.

4.4

O Equivalente Certo em problemas de maximização de renda com restrições de CVaR mínimo

Conforme desenvolvido no item anterior, a relação entre as abordagens baseadas em restrições de risco, largamente utilizadas pelos grupos de finanças, foi interpretada e conectada à abordagem baseada na maximização de um funcional local de utilidade esperada. Foi evidenciada a dependência da função utilidade obtida neste caso com a distribuição dos parâmetros de incerteza. Além disso, foi apontado um anexo (Anexo E:) que discute semelhanças entre o funcional baseado na Utilidade Generalizada de Machina e o problema de maximização do CVaR, que é uma abordagem alternativa ao problema de maximização de renda esperada com restrições de CVaR mínimo estudado ao longo deste capítulo.

Contudo, voltando para a primeira abordagem, foco deste capítulo, onde o agente busca maximizar a renda esperada e impõe o seu perfil de risco sob a

forma de restrições de CVaR, torna-se importante formalizar o processo de obtenção do equivalente certo associado a cada distribuição que $R(\mathbf{x}, \xi)$ pode assumir de forma condizente com o funcional de preferência implícito à ordenação imposta por este problema. Desta forma, o problema em questão pode ser visto como um problema de maximização de um funcional de preferência, como será evidenciado logo a seguir, pode-se encontrar o equivalente certo proveniente deste funcional. Contudo, para encontrarmos este equivalente certo, não mais poderemos utilizar a expressão clássica (3-2), pois a “utilidade” implícita a este funcional assume diferentes formas para diferentes distribuições de probabilidade avaliadas. Assim sendo, deveremos recorrer à definição mais elementar, (3-1), e através desta obter o equivalente certo de $R(\mathbf{x}, \xi)$ de forma condizente ao funcional em questão.

A definição de equivalente certo, como sendo o menor valor (EC em \$) certo (determinístico) para o qual o agente fica indiferente entre a renda aleatória $R(\mathbf{x}, \xi)$ e este, nos permite escrever a seguinte definição:

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathcal{R} : \Phi[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi(\mu) \} \quad (4-32)$$

Onde $\Phi(\cdot)$ é o funcional de preferência do agente. Por exemplo, para o caso da função utilidade clássica, esse é igual ao valor esperado da utilidade e a expressão (4-32) é atendida na igualdade, quando $\Phi[R(\mathbf{x}, \xi)] = \Phi(\mu)$. Dessa maneira, como $\Phi(\cdot) = E[U(\cdot)]$, este funcional permite uma expressão analítica para o valor $EC = \mu^*$ que produz essa igualdade através da inversa de $U(\cdot)$ aplicada à utilidade esperada da renda, conforme visto em (3-1) e (3-2).

Então, a estratégia adotada para relacionar o problema de maximização do equivalente certo com o problema de maximização da renda esperada sujeito a uma restrição de CVaR mínimo, o qual chamaremos de problema original a partir de agora, será a seguinte: (i) mostrar que o problema original pode ser visto como um problema de maximização de um funcional de preferências incompleto de variáveis aleatórias, que produz valores de preferência somente para um subconjunto de distribuições factíveis de serem avaliadas, (ii) apresentar uma extensão deste funcional de forma a torná-lo completo sem alterar suas propriedades e resultados dentro do conjunto já considerado, e finalmente, (iii) aplicar a definição de equivalente certo para este funcional e encontrar a expressão do seu equivalente certo.

Se pensarmos em um funcional que produza a ordenação e os valores produzidos pelo problema original (4-21) a (4-25), este deverá ser composto pelo valor esperado da renda aleatória $E[R(\mathbf{x}, \xi)]$, restrito às distribuições que atendam a $CVaR_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq R^{\min}$, indicando que distribuições que proporcionem o $CVaR_\alpha$ abaixo de R^{\min} não são em hipótese alguma admitidas.

Intuitivamente pode-se argumentar que o equivalente certo de $R(\mathbf{x}, \xi)$ deverá ser o seu valor esperado, se a distribuição atender à restrição de $CVaR_\alpha$. Por outro lado, para o caso em que a restrição não é atendida, o equivalente certo não estará definido. Dessa forma, será importante estender este funcional para o caso geral, sem alterar as preferências já dadas para as distribuições que atendem à restrição de risco. Para isso, vamos separar a região poliédrica de decisão $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}_+^n : \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$ em duas: região viável de decisões com relação às restrições de $CVaR$,

$$\mathcal{N}(\xi)^V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{N} : CVaR_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi_s)] \geq R^{\min}\} \quad (4-33)$$

e região inviável de decisões que proporcionam distribuições indesejáveis,

$$\mathcal{N}(\xi)^I = \{\mathbf{x} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}(\xi)^V\} \quad (4-34)$$

Devemos também, explicitar a separação do problema original em dois estágios, onde o primeiro estágio seleciona a decisão $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ e o segundo estágio avalia o valor desta solução através de um funcional $Q[R(\mathbf{x}, \xi)] = \{E[R(\mathbf{x}, \xi)] : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V\}$. Na seqüência são apresentados os problemas do primeiro e segundo estágio que traduzem o processo de decisão descrito.

1º Estágio: Seleciona \mathbf{x} com base no conjunto $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$

$$\text{Maximizar}_{(\mathbf{x})} Q[R(\mathbf{x}, \xi)] \quad (4-35)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (4-36)$$

2º Estágio: Avalia $E[R(\mathbf{x}, \xi)]$ somente se $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$

$$Q[R(\mathbf{x}, \xi)] = \text{Maximizar}_{(\beta, z)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) \quad (4-37)$$

Sujeito a:

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-38)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-39)$$

$$z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \geq R^{\min} \quad (4-40)$$

Neste segundo problema, $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ representa o resultado do segundo estágio do problema original e exerce o papel de receber a decisão \mathbf{x} selecionada no primeiro estágio e retornar o valor esperado da renda conseqüente desta decisão. Entretanto esta atribuição se dará apenas para os casos viáveis de renda, ou seja, casos onde a distribuição de renda atenda ao critério de CVaR mínimo. Contudo, como argumentado anteriormente, $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ não atribui qualquer preferência para distribuições de renda provenientes de $\mathcal{N}(\xi)^I$ e simplesmente rejeita as mesmas. Com o intuito de tornar o funcional completo, ou seja, capaz de atribuir preferência a todo o espaço de soluções \mathcal{N} , vamos definir um funcional mais geral que nos dê alguma informação para os pontos em $\mathcal{N}(\xi)^I$, porém sem alterar as propriedades e soluções do problema original quando este seja viável. Neste sentido, podemos introduzir a seguinte função dual (em \mathbf{x}) de $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$, que dispõe exatamente desta característica.

$$\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min})^- \quad (4-41)$$

Onde $(.)^- = \min(0, .)$ representa a mesma função truncamento negativa utilizada na formulação do CVaR. Assim, como visto antes, esta é uma função linear por partes côncava, e devido a isto podemos escrever $\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)]$ como o resultado do seguinte PL:

$$\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = \text{Maximizar}_{(\beta, z, \tau)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) + \lambda \cdot \tau \quad (4-42)$$

Sujeito a:

$$\tau \leq 0 \quad (4-43)$$

$$\tau \leq z + \sum_s p_s \cdot \beta_s - R^{\min} \quad (4-44)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-45)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-46)$$

Por definição, qualquer função dual do problema $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ deve apresentar as seguintes propriedades: (1) para todo $\lambda \geq 0$, $\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$ e (2) o seu domínio deve ser mais amplo que o domínio de $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$, o que de fato ocorre devido à própria definição de $\mathcal{N}(\xi)^V$. A condição (1), para a função proposta $\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)]$, é atendida pela igualdade, pois quando $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$, $\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min} \geq 0$, acarretando em $\tau = 0$ em (4-42).

Este novo funcional evidencia a intuição inicial sobre o que o equivalente certo deveria ser segundo o funcional de preferência de um problema de maximização da renda esperada restrito condições de CVaR mínimo. No caso onde a condição de viabilidade da distribuição é atendida ($\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$), o equivalente certo, segundo a aplicação direta de (4-32), será igual ao valor esperado da renda, conforme segue o desenvolvimento:

$$\text{EC}[R(\mathbf{x}, \xi)] = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathcal{R} : \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi_{\alpha, \lambda}(\mu), \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \} \quad (4-47)$$

Onde $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) = \mu$ se dá devido a fato de que $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \Rightarrow \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq R^{\min}$ e como por definição $E[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)]$, então $E[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq R^{\min}$, o que acarreta em $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) \geq R^{\min}$. Este resultado é suficiente para garantir que $\mu \geq R^{\min}$ (ver Figura 4-7 para uma visualização gráfica de $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu)$), implicando diretamente em $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) = \mu$. Assim, desenvolvendo a expressão (4-47) temos que:

$$\dots = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathcal{R} : \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) = \mu, \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \} \quad (4-48)$$

$$\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] = \Phi(\mu) = \mu^* = \text{EC}[R(\mathbf{x}, \xi)] \quad (4-49)$$

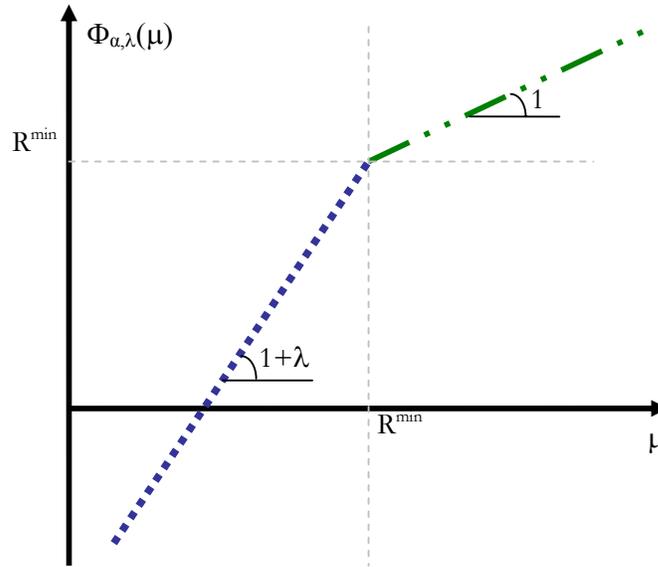


Figura 4-7 – Forma que o funcional de preferência $\Phi_{\alpha,\lambda}(\cdot)$ assume ao avaliar um valor determinístico $\mu \in \mathfrak{R}$ - caso particular com duas restrições de CVaR mínimo.

Entretanto, para o caso onde a condição de viabilidade não é atendida pela distribuição de $R(\mathbf{x}, \xi)$, ou seja,

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathfrak{R} : \Phi_{\alpha,\lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi_{\alpha,\lambda}(\mu), \mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\xi)^I \} \quad (4-50)$$

a seguinte desigualdade é válida para todo μ ⁹:

$$E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq \mu + \lambda \cdot (\mu - R^{\min})^- \quad (4-51)$$

Para o lado esquerdo desta desigualdade, como $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\xi)^I$ a função mantém inalterado o termo da violação do CVaR de $R(\mathbf{x}, \xi)$ com relação a R^{\min} . Para facilitar o entendimento podemos recorrer mais uma vez à Figura 4-7, que nos mostra a possibilidade de duas possíveis desigualdades decorrentes de (4-51) conforme será enumerado a seguir.

1ª possibilidade: $E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \geq R^{\min}$, de onde decorre que

$$E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq \mu, \text{ para } \mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\xi)^I \quad (4-52)$$

⁹ Para o caso onde o valor avaliado é um valor determinístico (μ), $E[\mu] = \mu$ e $\text{CVaR}_\alpha[\mu] = \mu$

2ª possibilidade: $E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq R^{\min}$, de onde decorre que

$$(1+\lambda)^{-1} \cdot E[R(\mathbf{x}, \xi)] + (1+\lambda)^{-1} \cdot \lambda \cdot \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \mu \quad (4-53)$$

para $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I$

Assim, podemos escrever a expressão do equivalente da seguinte forma:

<p>Se $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$, então,</p> $EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)]$ <p>Se $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I$ e $E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \geq R^{\min}$, então,</p> $EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \quad (4-54)$ <p>Se $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I$ e $E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq R^{\min}$, então,</p> $EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = (1+\lambda)^{-1} \cdot E[R(\mathbf{x}, \xi)] + (1+\lambda)^{-1} \cdot \lambda \cdot \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)]$

Essa expressão, então, nos passa a idéia de que quando tomamos uma decisão que não atende à restrição de CVaR mínimo, violando o critério de risco, o valor que atribuído à distribuição desta renda não será mais o valor esperado da mesma, mas sim um valor intermediário entre o $E[R(\mathbf{x}, \xi)]$ e o $\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)]$.

Além disso, no âmbito de medidas de risco, o funcional $\Phi_{\alpha, \lambda}[\cdot]$ proporciona uma avaliação para todas as possíveis distribuições que podem ser geradas pela decisão $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$. Entretanto, é importante notar que este, para valores de λ “pequenos”, poderá selecionar uma decisão que não seria selecionada por $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$. Para comprovarmos isso, basta olharmos o caso onde uma solução inviável do ponto de vista de risco, ou seja, que não atende à solução de CVaR, apresenta um altíssimo valor esperado. Se λ não for suficientemente “grande”, a violação na restrição de CVaR, ponderada pela penalização λ , pode ser que não seja suficiente para anular o ganho obtido no valor esperado com relação à solução ótima do problema original e desta forma, a seleção ótima do problema original não seria obtida.

Este caso está perfeitamente de acordo com a idéia de que quanto maior o retorno, maior deverá ser o risco. Obviamente, pode-se argumentar que dependendo de quão maior seja o ganho obtido com o valor esperado de uma

solução inviável, se comparado com a melhor solução viável, um violação pequena poderia até ser justificável. Contudo, certamente esse comportamento não refletiria o comportamento do problema original que estamos tratando.

De forma a garantir a mesma ordenação do problema original, onde as soluções inviáveis deveriam ser extremamente penalizadas com relação às viáveis (restrição “forte”), bastaria tomarmos o $\lambda \rightarrow +\infty$. Desta maneira,

$$\lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = \lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (CVaR_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \quad (4-55)$$

acarretaria em,

$$\lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)], \text{ para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \quad (4-56)$$

e

$$\lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \rightarrow -\infty, \text{ para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I \quad (4-57)$$

Esse comportamento indicaria uma extrema aversão a soluções que proporcionem distribuições inviáveis, onde de acordo com o problema original, todas estas devem ocupar um lugar inferior, em termos de preferência, que qualquer outra solução viável, ou seja,

$$\sup_{(\mathbf{x})} \{ \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I \} \leq \inf_{(\mathbf{x})} \{ \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \} \quad (4-58)$$

Neste caso, o equivalente certo associado às distribuições viáveis se manteria o mesmo, pois o fato de não haver violação anula o efeito de qualquer penalização. Entretanto, para o caso de decisões que violem o critério de CVaR ($\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I$), as duas possibilidades de equivalente certo tornam-se uma única, “Possibilidade 1” em (4-52) recai para no caso da “Possibilidade 2” (4-53), que por fim converge para o próprio valor do $CVaR_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)]$.

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)], \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \quad (4-59)$$

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = CVaR_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)] \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I \quad (4-60)$$

Este resultado nos revela a seguinte idéia, com respeito ao problema original:

Uma vez que a restrição de risco esteja atendida, o equivalente certo associado à distribuição da renda assumirá exatamente o seu valor esperado. Entretanto, para os casos onde a restrição de risco não tenha sido atendida, o equivalente certo passará a ser o “melhor” que se pode obter da distribuição, valendo assim, o *proxy* adotado para medir o seu pior caso, dado pelo *conditional value at risk*.

Como conseqüência, segundo esta ótica de penalização forte, no caso de violação do critério de risco o agente é totalmente indiferente entre distribuições que apresentam o mesmo CVaR.

Como já argumentado, este fato é factível de ser questionado, pois mesmo que esteja de acordo com o problema original, que trata as inviabilidades de forma indiferente, este comportamento expressa uma “falha” no sentido de que mesmo em uma situação de extrema aversão a risco, um agente racional que se depara com duas distribuições de mesmo CVaR preferiria a distribuição que apresenta o maior valor esperado.

Desta maneira, é possível encontrar um limite inferior para λ de tal forma que, ao utilizarmos a métrica $\Phi_{\alpha,\lambda}[\cdot]$, esta garanta a mesma decisão ótima que o problema original proporcionaria para o caso de $\aleph(\xi)^V$ não vazio. Neste sentido, se λ^{D*} é a variável dual ótima, associada à restrição de CVaR mínimo do problema original, então, para todo $\lambda \geq |\lambda^{D*}|$,

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2^* \text{ e } Q[\mathbf{R}(\mathbf{x}_1^*, \xi)] = \Phi_{\alpha,\lambda}[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2^*, \xi)] \quad (4-61)$$

Onde,

$$\mathbf{x}_1^* = \arg\text{Max}_{(x)} \{Q[\mathbf{R}(x, \xi)] \text{ s.a: } x \in \aleph(\xi)^V\} \quad (4-62)$$

e

$$\mathbf{x}_2^* = \arg\text{Max}_{(x)} \{\Phi_{\alpha,\lambda}[\mathbf{R}(x, \xi)] \text{ s.a: } x \in \aleph\} \quad (4-63)$$

Demonstração:

Seja λ^{D*} a variável dual ótima associada à restrição de risco (4-68) do **problema original Q**, reescrito abaixo:

$$\text{Maximizar}_{(x,\beta,z)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) \quad (4-64)$$

Sujeito a:

$$G\mathbf{x} \leq d \quad (4-65)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-66)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-67)$$

$$z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \geq R^{\min} \quad \rightarrow \text{Variável dual } \lambda^{D*} \quad (4-68)$$

E seja o problema de maximização (em \mathbf{x}) da preferência $\Phi_{\alpha,\lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)]$, conforme (4-63), convenientemente modificado para explicitar o termo negativo referente à penalização de risco, onde $\upsilon = -\tau$.

$$\text{Maximizar}_{(x,\beta,z,\tau)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) - \lambda \cdot \upsilon \quad (4-69)$$

Sujeito a:

$$G\mathbf{x} \leq d \quad (4-70)$$

$$\upsilon \geq 0 \quad (4-71)$$

$$\upsilon \geq R^{\min} - (z + \sum_s p_s \cdot \beta_s) \quad (4-72)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-73)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-74)$$

Se reescrevermos a restrição (4-72) do problema acima, que contabiliza as violações de CVaR de forma tornar esta análoga à restrição (4-68), o problema assumirá a seguinte forma, a qual vamos denominar de **problema penalizado Φ** :

$$\text{Maximizar}_{(x,\beta,z,\tau)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) - \lambda \cdot \upsilon \quad (4-75)$$

Sujeito a:

$$G\mathbf{x} \leq d \quad (4-76)$$

$$\upsilon \geq 0 \quad (4-77)$$

$$z + \sum_s p_s \cdot \beta_s + v \geq R^{\min} \quad (4-78)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-79)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-80)$$

Comparando o problema original com este último (penalizado), é possível perceber que o segundo apresenta a mesma estrutura do problema original, com pequenas diferenças. Nota-se que foi introduzida uma variável a mais na restrição de risco, a qual passa a “permitir” e a contabilizar as violações desta restrição provenientes de soluções que seriam inviáveis no problema original. Contudo, as soluções que passam a ser viáveis no segundo problema são penalizadas por um fator λ na função objetivo.

Neste sentido e de acordo com a definição (4-62), se \mathbf{x}_1^* é solução ótima do problema original (4-64) a (4-68), é fácil de se constatar que a solução $\mathbf{x}^\Phi = [\mathbf{x}_1^*, 0]^T$ é uma solução viável do problema penalizado (4-75) a (4-80), pois a única restrição modificada neste problema, com relação ao problema original, assume o mesmo valor ao ser avaliada neste ponto (\mathbf{x}^Φ).

Agora vamos mostrar que existe uma condição sobre o valor de λ que faz o ponto \mathbf{x}^Φ ser ótimo no problema penalizado, e assim igual a $[\mathbf{x}_2^*, 0]^T$, como queremos demonstrar.

Como os dois problemas são idênticos, exceto com relação a variável v , basta analisar o custo reduzido associado a variável v usando as mesmas variáveis duais associadas à solução ótima \mathbf{x}_1^* do problema original. Isto ocorre, pois construímos a solução \mathbf{x}^Φ de forma a produzir, no problema penalizado, a mesma base que a solução \mathbf{x}_1^* produz no original. Desta forma, os custos reduzidos associados a todas as variáveis não básicas do problema original, no ponto \mathbf{x}_1^* , já atendem às condições de otimalidade no problema penalizado quando avaliado no ponto \mathbf{x}^Φ : $\mathbf{c}_{\text{red}} \leq 0$. Então, para que \mathbf{x}^Φ seja o ótimo do problema penalizado, basta selecionarmos λ de forma que o custo reduzido de v atenda a mesma condição, pois esta variável deverá estar fora da base por hipótese: $\mathbf{x}^\Phi = [\mathbf{x}_1^*, v]^T = [\mathbf{x}_1^*, 0]^T$.

Ao constatarmos que a variável dual associada à restrição (4-78), no ponto \mathbf{x}^Φ , é a mesma da restrição (4-68)¹⁰, no ponto \mathbf{x}_1^* , definida como λ^{D^*} , o custo reduzido de v pode ser escrito da seguinte forma:

$$c_{\text{red}}(v) = -\lambda - \lambda^{D^*} \quad (4-81)$$

Assim, para que $c_{\text{red}}(v) \leq 0$ e por conseguinte, \mathbf{x}^Φ seja ótimo do segundo problema, basta que λ atenda à seguinte condição:

$$\lambda \geq -\lambda^{D^*} \quad (4-82)$$

Como λ é definido como sendo maior que zero, de forma a representar uma penalização, e como sabemos que $\lambda^{D^*} \leq 0$, pois ao aumentarmos o lado direito da restrição (4-68) estaremos restringindo mais o problema, podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\lambda \geq |\lambda^{D^*}| \quad (4-83)$$

E assim, chegamos ao **fim da demonstração**.

4.4.1

Aplicação – Axioma da Independência e Paradoxo de Allais

Neste item vamos mostrar um exemplo para evidenciar a não linearidade, com relação às probabilidades, dos funcionais estudados neste capítulo. Neste sentido, o primeiro passo será mostrar que o funcional $Q(\cdot)$ não atenderá ao axioma da independência de von Neumann-Morgenstern (vN-M). Posteriormente, será mostrado que o funcional $\Phi_{\alpha, \lambda}(\cdot)$, dual a $Q(\cdot)$, captura a ordenação do Paradoxo de Allais, a qual é impossível de ser obtida pelos funcionais baseados em utilidade esperada.

O axioma da independência diz que para qualquer par de variáveis aleatórias A e B , tal que $R^A \succ R^B$, as misturas representadas por $R^{A'} = q \cdot R^A + (1-q) \cdot R$ e $R^{B'} =$

¹⁰A justificativa é que as variáveis duais de ambas as restrições podem ser escrita apenas como o produto entre os coeficientes da função objetivo das variáveis básicas (C_B) e a inversa da matriz (B) contendo as colunas da matriz de restrições associadas às variáveis básicas ($\lambda^D = c_B \cdot B^{-1}$). Como as soluções \mathbf{x}_1^* e \mathbf{x}^Φ foram construídas de forma a gerar a mesma base, as variáveis duais, das referidas restrições, avaliadas nas respectivas soluções serão idênticas.

$q \cdot R^B + (1-q) \cdot R$ realizadas com uma terceira variável R , qualquer, terão necessariamente a ordenação $R^{A'} \succ R^{B'}$, qualquer que seja $q \in [0, 1]$.

O funcional de vN-M atende a este axioma em função da sua linearidade nas probabilidades. Se cada v.a. pode ser representada por um conjunto de valores de seu suporte e probabilidades associadas aos mesmos ($R^{(j)} = \{(R_s^j, p_s^j)\}_{s \in \{1, \dots, S\}}$), então, a preferência $R^{B'} \succ R^{A'}$ para uma função utilidade de vN-M, qualquer, implica em $q \cdot \sum_s U(R_s^B) \cdot p_s^B + (1-q) \cdot \sum_s U(R_s) \cdot p_s > q \cdot \sum_s U(R_s^A) \cdot p_s^A + (1-q) \cdot \sum_s U(R_s) \cdot p_s$. Se, por definição $q \cdot \sum_s U(R_s^B) \cdot p_s^B > q \cdot \sum_s U(R_s^A) \cdot p_s^A$, então a desigualdade anterior estará assegurada e a preferência $R^{B'} \succ R^{A'}$ será sempre verdadeira para qualquer U crescente e $R^{(j)} < \infty$.

Contudo, o funcional $Q(\cdot)$ não atende a este axioma. Para isso vamos definir duas v.a.: (exemplo baseado em [16])

$$R^A = \{(0\$, 1\%); (2400\$, 66\%); (2500\$, 33\%)\}$$

$$R^B = \{(0\$, 0\%); (2400\$, 100\%); (2500\$, 0\%)\}$$

e calcular a preferência segundo o funcional $Q(\cdot)$, considerando $\alpha = 99\%$ e $R^{\min} = 1000\%$:

$$Q(R^A) = \text{inviável! (pois } CVaR_{99\%}(R^A) = 0 < 1000)$$

$$Q(R^B) = 2400 \text{ (pois } CVaR_{99\%}(R^B) = 2400 > 1000)$$

Desta forma, como $Q(R^A)$ é inviável, qualquer solução viável é preferível a esta, acarretando em $R^B \succ_Q R^A$. Porém, ao misturarmos estas duas rendas aleatórias com uma terceira, definida como sendo igual à segunda $R = R^B$, violaremos a ordenação esperada, $R^{B'} \succ_Q R^{A'}$, definida pelo axioma independência de vN-M.

A mistura de variáveis aleatórias pode ser vista como um “sorteio” de uma variável aleatória do tipo Bernoulli, independente das demais variáveis e com probabilidade q associada, que selecionará uma das variáveis misturadas. Desta forma, as misturas $R^{A'}$ e $R^{B'}$ podem ser visualizadas conforme a figura a seguir:

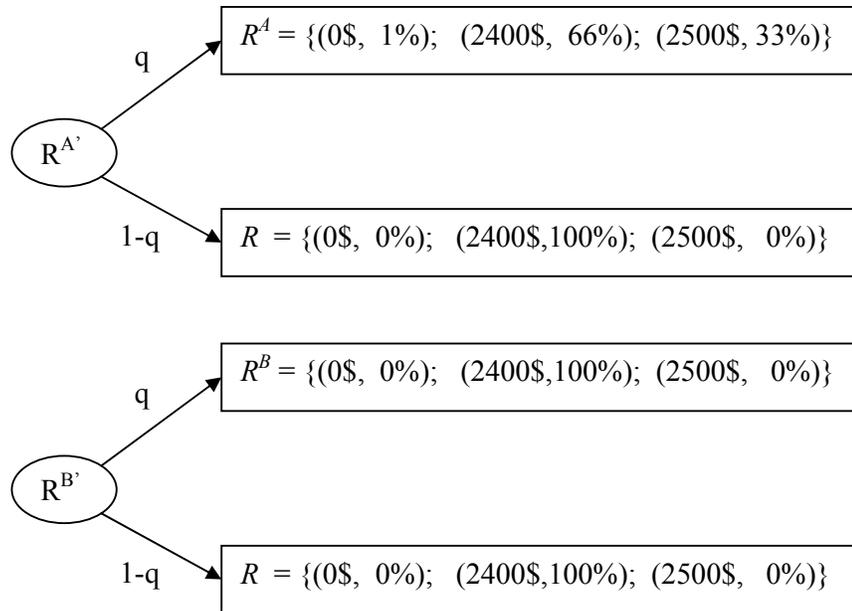


Figura 4-8 – Mistura das variáveis aleatórias R^A e R^B com uma terceira variável R .

Se considerarmos $q = 50\%$, as distribuições destas duas novas variáveis aleatórias, $R^{A'}$ e $R^{B'}$, assumirão as seguintes formas:

$$R^{A'} = \{(0\$, 0.5\%); (2400\$, 83\%); (2500\$, 16.5\%)\}$$

$$R^{B'} = \{(0\$, 0\%); (2400\$, 100\%); (2500\$, 0\%)\}.$$

Para estas duas, o mesmo funcional $Q(\cdot)$ aplicado anteriormente, com $\alpha = 99\%$ e $R^{\min} = 1000\%$, acarretará nos seguintes valores:

$$Q(R^{A'}) = 2404.5 \text{ (pois } CVaR_{99\%}(R^{A'}) = 1200 > 1000)$$

$$Q(R^{B'}) = 2400 \text{ (pois } CVaR_{99\%}(R^{B'}) = 2400 > 1000)$$

Apresentando, portanto, a ordenação $R^{A'} \succ_Q R^{B'}$, que viola o princípio da independência de vN-M.

Com base no resultado obtido acima, podemos utilizar o funcional $\Phi_{\alpha,\lambda}[\cdot]$, que é uma extensão do funcional $Q(\cdot)$ para todo o espaço de distribuições, em um exemplo bastante interessante e conhecido na literatura como o Paradoxo de Allais. Neste exemplo evidenciaremos como este funcional proporciona uma ordenação de variáveis aleatórias impossível de ser capturada por funcionais baseados no valor esperado de funções utilidades clássicas de von Neumann-Morgenstern.

Para isso, definimos quatro variáveis aleatórias (v.a.) representando a renda que um agente pode obter em uma dada operação comercial: R^A , R^B , R^C , R^D .

$$R^A = \{(0\$, 1\%); (2400\$, 66\%); (2500\$, 33\%)\}$$

$$R^B = \{(0\$, 0\%); (2400\$, 100\%); (2500\$, 0\%)\}$$

$$R^C = \{(0\$, 67\%); (2400\$, 0\%); (2500\$, 33\%)\}$$

$$R^D = \{(0\$, 66\%); (2400\$, 34\%); (2500\$, 0\%)\}$$

A seguir, são exibidas as densidades de probabilidade das duas primeiras variáveis, R^A e R^B , para as quais o suporte dos possíveis valores de renda foi convenientemente exibido uma só vez, no eixo horizontal de R^B . As setas, então, indicam a presença de eventos pontuais de probabilidades não nulas e, portanto, discretas.

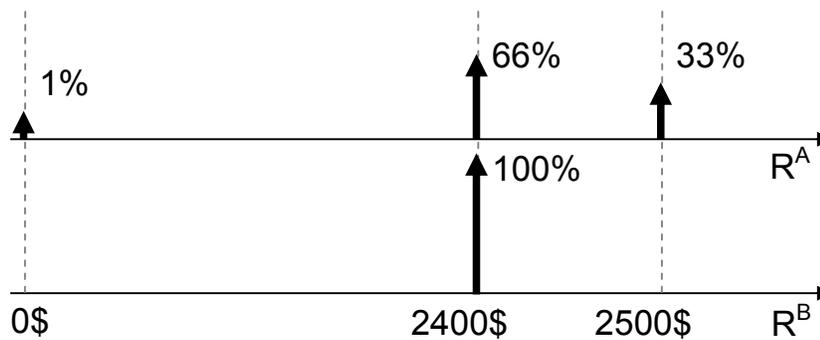


Figura 4-9 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias R^A e R^B .

Ao utilizarmos o funcional de preferência $\Phi_{\alpha,\lambda}[\cdot]$, com parâmetros $\alpha = 99\%$ e $\lambda = 1$, e medirmos a preferência entre as variáveis A e B para um $R^{\min} = 1000\$,$ obteremos os seguintes valores de preferência:

$$\Phi_{99\%,1}[R^A] = E(R^A) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^A) - R^{\min})^- = 2409 + (0 - 1000) = 1409$$

$$\Phi_{99\%,1}[R^B] = E(R^B) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^B) - R^{\min})^- = 2400 + (2400 - 2400) = 2400$$

Desta maneira, podemos dizer que a renda B é preferível à renda A segundo o funcional $\Phi_{99\%,1}[\cdot]$, ou seja, $R^B \succ_{\Phi} R^A$.

Analisando as probabilidades das variáveis A e B na Figura 4-9, notamos que A dominaria B se não fosse pela probabilidade de 1% de ocorrer o valor zero.

Neste caso, uma pequena probabilidade (1%) de não ganhar nada (zero) torna-se muito mais relevante que a probabilidade de 33% de ganhar 100\$ a mais do que seria ganho certamente em B (2400\$). Esse comportamento é intuitivo e pode ser interpretado como o medo do arrependimento de ser “ganancioso”.

Podemos repetir o mesmo exercício para as variáveis R^C e R^D , cujas densidades são exibidas a seguir:

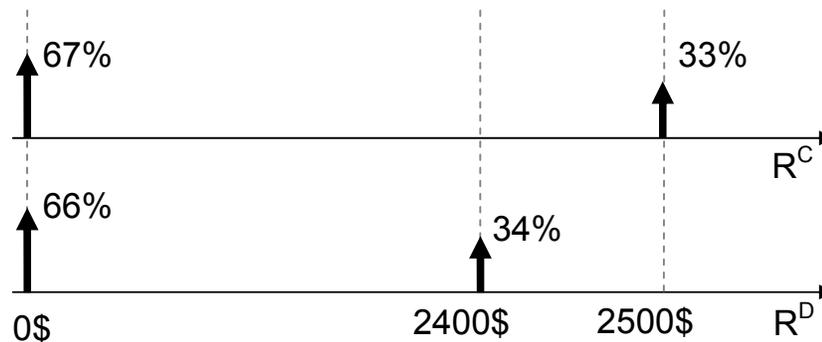


Figura 4-10 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias R^C e R^D .

Para cada uma delas associamos os seus respectivos valores de preferência, atribuídos por $\Phi_{99\%,1}[\cdot]$:

$$\Phi_{99\%,1}[R^C] = E(R^C) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^C) - R^{\min})^- = 825 + (0 - 1000) = -175$$

$$\Phi_{99\%,1}[R^D] = E(R^D) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^D) - R^{\min})^- = 816 + (0 - 1000) = -184$$

Constatamos que o funcional Φ atribui a seguinte ordenação de preferências: $R^C \succ_{\Phi} R^D$. Nesta, o efeito inverso ao anterior ocorreu, ou seja, a presença de 1% a mais de probabilidade no evento zero (não ganhar nada) não foi suficientemente relevante frente à possibilidade de se obter um maior resultado com a opção C, uma vez que a probabilidade do evento zero já era consideravelmente grande.

O interessante é que as duas ordenações, $(R^B \succ_{\Phi} R^A)$ e $(R^C \succ_{\Phi} R^D)$, dadas pelo funcional de preferências $\Phi_{99\%,1}[\cdot]$, são impossíveis de serem obtidas por qualquer funcional baseado no valor esperado de funções utilidades clássicas de von Neumann-Morgenstern, pois os comportamentos que à primeira vista nos pareceram intuitivos, são devidos a uma não linearidade nas probabilidades do funcional Φ . Como este é definido por um problema de maximização, (4-42), onde as probabilidades aparecem como coeficientes da função objetivo, se

analisarmos do ponto de vista das probabilidades das v.a.'s que estamos avaliando, $\Phi(\mathbf{p})$ definido por $\Phi: \wp \rightarrow \mathfrak{R}$ pode ser encarado como uma função convexa em \mathbf{p}^{11} . Onde $\wp = \{\mathbf{p} \in \mathfrak{R}_+^S : \sum_{s \in \{1, \dots, S\}} p_s = 1\}$ é o conjunto de possíveis vetores de probabilidades de uma v.a. contendo S cenários.

Para mostrarmos a impossibilidade de representar as ordenações obtidas pelo funcional Φ através de uma função utilidade clássica, vamos definir $U: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ como uma utilidade clássica de vN-M e mostrar que chegaremos a uma contradição ao tentarmos impor ambas as preferências ao seu funcional $E[U(R^j)] = \sum_{s \in \{1, \dots, S\}} p_s^j \cdot U(R_s^j)$ de preferência, no qual nota-se a linearidade com respeito às probabilidades.

(Condição 1): Para atender a $(R^B)_{\Phi} R^A$:

$$E[U(R^B)] > E[U(R^A)] \Rightarrow 100\% \cdot U(2400) > 33\% \cdot U(2500) + 66\% \cdot U(2400) + 1\% \cdot U(0)$$

$$\Rightarrow \underline{34\% \cdot U(2400)} > 33\% \cdot U(2500) + 1\% \cdot U(0)$$

(Condição 2): Para atender a $(R^C)_{\Phi} R^D$:

$$E[U(R^C)] > E[U(R^D)] \Rightarrow 33\% \cdot U(2500) + 67\% \cdot U(0) > 34\% \cdot U(2400) + 66\% \cdot U(0)$$

$$\Rightarrow \underline{34\% \cdot U(2400)} < 33\% \cdot U(2500) + 1\% \cdot U(0)$$

Chegando assim a uma contradição para a função $U(\cdot)$.

Esta contradição é justamente o “Paradoxo de Allais” apresentado em (1953) por Maurice Allais. Entretanto, neste exemplo a ordenação de preferência foi ditada pela métrica $\Phi_{\alpha, \lambda}[\cdot]$, ao passo que na versão original, esta era empiricamente reconhecida como a ordenação que deveria ser realizada pela maioria das pessoas. Diversos estudos e trabalhos realizados no passado, desde Savage, Machina e outros, mostraram modelos e funcionais capazes de incorporar tal não linearidade nas probabilidades e incorporar as preferências do “Paradoxo de Allais”. Contudo, o funcional Φ baseado na combinação entre o CVaR e o

¹¹A prova para a convexidade do funcional Φ com relação ao domínio definido por \wp decorre de um conhecido resultado de programação linear (PL): A função definida pelo resultado do PL $f(\mathbf{c}) = \text{Max}_{(\mathbf{x})} \{\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ é convexa com relação a \mathbf{c} . Como as probabilidades fazem parte dos coeficientes do PL que constitui Φ , este é convexo com relação a \mathbf{p} .

valor esperado apresentou esta desejável característica através de duas medidas bastante simples, práticas e intuitivas, proporcionando uma excelente ferramenta analítica (modelo baseado em programação linear) para a tomada de decisões pragmáticas e realistas.

5

Estudo de caso: Estratégia de comercialização de energia de fontes alternativas complementares (BIOMASSA e PCH)

Este estudo de caso tem como objetivo traçar uma estratégia que maximize o equivalente certo do resultado líquido obtido na comercialização de energia proveniente de fontes alternativas complementares. As fontes consideradas neste estudo serão duas: termelétricas a biomassa, movidas a bagaço de cana de açúcar (BIO), e pequenas centrais hidroelétricas (PCH).

A justificativa para esta análise concentrar-se em um portfólio de fontes alternativas, baseia-se na lei Nº 9.427 de dezembro de 1996, Art. 26. Nesta, é estabelecido que os consumidores livres que comprarem energia proveniente de fontes alternativas, eólica, biomassa e, ou de pequenas centrais hidroelétricas terão um desconto superior a 50% em suas tarifas de distribuição, desde que a potência de cada usina contratada seja inferior a 30MW.

Neste cenário, o ambiente de contratação livre (ACL) torna-se uma potencial oportunidade de comercialização para tais fontes com preços bastante atraentes, uma vez que o desconto dado aos consumidores livres em suas tarifas de distribuição pode ser repartido entre ambas as partes.

Por outro lado, a migração para o ACL incorpora incertezas ao investimento do gerador, pois este não terá mais a oportunidade de um contrato de longo prazo para viabilizar por completo o seu investimento como ocorre no ACR. Além disso, a biomassa, que no ambiente regulado (ACR) tem a oportunidade de vender uma energia extremamente sazonal¹² como energia firme (recebendo um pagamento fixo através de um contrato de disponibilidade), no ACL ficaria exposta ao PLD nos períodos de indisponibilidade, pois neste ambiente os contratos negociados são, em sua maioria, por quantidade.

Dessa maneira, será analisada a viabilidade de um modelo de negócio onde uma comercializadora adquira um montante de lastro (MW médios), através de

¹²A geração de uma usina a biomassa se dá, em geral, apenas nos meses de safra, aproximadamente sete meses por ano. Uma planta de produção de álcool e açúcar, localizada na região sudeste do Brasil, apresenta um período de safra tipicamente entre os meses de maio e novembro.

contratos de disponibilidade com fontes alternativas complementares (BIO e PCH), e revende parte deste lastro contratual através de um contrato de quantidade para um consumidor livre (no ACL). Neste contexto, a comercializadora estará absorvendo completamente o risco de geração das usinas contratadas e, portanto, deve se proteger tanto na seleção das fontes (*mix* ótimo) a partir das quais obterá o seu lastro, quanto na quantidade de venda, para não se expor em cenários onde a geração das usinas contratadas seja inferior à quantidade revendida (*hedge* hidrológico).

Uma possibilidade para ambas as fontes seria, por exemplo, se contratarem no ACR através de um leilão A-5¹³, terminar as obras de construção em três anos e participar deste negócio através do intermédio de uma comercializadora durante os dois anos antecedentes ao início do contrato no ACR.

Seguindo esta idéia, as soluções de compra e venda no ACL, obtidas pelos modelos de utilidade esperada tradicional, de equivalente certo (proposto no item 3.3) e de maximização de renda esperada com restrições de CVaR serão empregados.

Finalmente, pode-se argumentar que este mesmo modelo pode ser utilizado para avaliar a atratividade da migração direta dos geradores para o ACL, onde um potencial investidor deverá remunerar o seu investimento em um conjunto de usinas formado por biomassas e PCH's, através de um conjunto de contratos de venda por quantidade para consumidores livres ou como autoprodução.

5.1

O Portfolio Biomassa e PCH

Com base na lei N° 9.427 de dezembro de 1996, Art. 26, a expectativa de aumento dos preços de energia praticados pelos geradores de fontes alternativas no ACL, motiva o interesse pela aquisição de energia proveniente dessas fontes pelas comercializadoras que têm a oportunidade de intermediar estas transações. A vantagem que uma comercializadora tem sobre um gerador de fonte alternativa, em vender no ACL é que, devido ao formato dos contratos praticados neste

¹³O Leilão A-5 é realizado anualmente para proporcionar às distribuidoras comparem contratos de suprimento com 5 anos de antecedência para atender o crescimento das suas respectivas cargas.

ambiente, contratos por quantidade de energia, esta pode reduzir a sua exposição ao PLD compondo um portfolio de fontes sazonalmente complementares, como é o caso de uma Biomassa e uma PCH.

Uma usina a biomassa movida a bagaço de cana de açúcar somente tem disponibilidade de combustível em aproximadamente sete meses por ano, durante o período da safra (no Sudeste, de maio a novembro). Desta maneira, este gerador, se contratado por quantidade, deveria comprar no curto prazo (extremamente volátil como visto em [41][42][2][3] e rerepresentado no capítulo 9 – Anexo A) a energia referente ao lastro vendido para receber o preço firmado no contrato. Esta configuração produz um fluxo de caixa muito arriscado para o investidor que precisa remunerar seus custos fixos de operação e financiamento.

Para uma PCH, o risco de quantidade decorre da incerteza nas vazões hidrológicas durante o período de seca. Além disso, a comercializadora por exercer um papel de intermediador, geralmente possui um grande acesso e um maior poder de negociação com grandes consumidores, que pequenos grupos investidores de uma PCH.

Desta forma, ambas as fontes (BIO e PCH) têm incentivos para se contratar por disponibilidade com a comercializadora, a qual passará a ter o direito de venda sobre a geração correspondente aos lastros contratados durante um período pré-acordado (duração do contrato), em troca de um pagamento fixo por sua capacidade.

5.1.1

Energia assegurada e lastro contratual

Para uma usina termelétrica a biomassa, que tem um perfil de geração fixo ao longo do ano, o lastro contratual, que é o limite de contratação de uma usina com potência disponível Pot^{Disp} , em MW, é igual à sua geração média anual. Assim, como esta gera toda sua potência disponível aproximadamente sete meses do ano, o seu lastro contratual será, em MW médios, $7/12 = 58\%$ da potência disponível.

Para uma PCH a sua energia assegurada é calculada através da média de geração da usina operada a fio d'água ao longo do histórico.

A agência nacional de energia elétrica (ANEEL) é o órgão regulador responsável pela habilitação de novos empreendimentos e pela homologação dos valores de energia assegurada das hidrelétricas e lastro físico das usinas termelétricas.

5.2

Modelo de comercialização

Neste item serão discutidos os pontos fundamentais do modelo proposto de comercialização de energia elétrica no ACL, proveniente de fontes alternativas complementares. Desta maneira, buscaremos explicitar a expressão da renda líquida (receita de venda menos despesas de aquisição) decorrente desta operação, em função dos parâmetros de incerteza e das variáveis de decisão, para então, aplicar os modelos de decisão sob incerteza baseados nas medidas desenvolvidas e analisadas nesta tese.

A operação de comercialização tem como variáveis de decisão as quantidades que devem ser compradas de lastro (MW médios) de cada fonte (Biomassa e PCH). Neste sentido, a comercializadora deve formar o *mix* (portfólio) ótimo entre as duas fontes que apresentam perfis complementares de geração, conforme a Figura 5-1 exibe, e preços (em R\$/MWh-lastro) iguais a P^{PCH} e P^{BIO} .

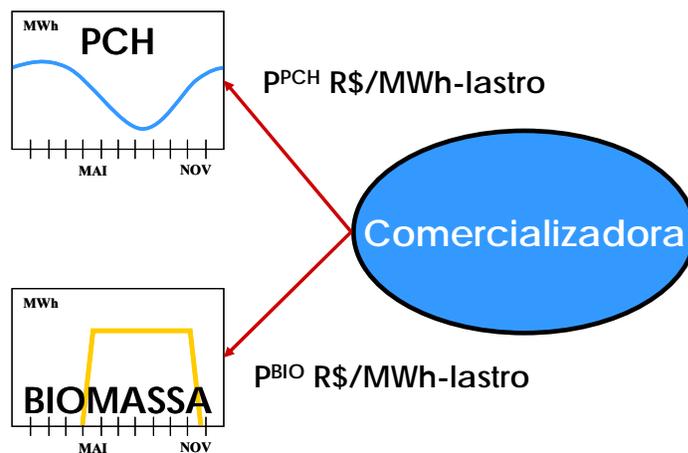


Figura 5-1 – Esquema de compra de lastro e capacidade de geração de fontes alternativas complementares por parte de uma comercializadora.

Conforme o esquema da Figura 5-2 a seguir, um dado consumidor livre deverá pagar a comercializadora um preço P^V (em R\$/MWh) por um montante E^V (igual a sua demanda requisitada, em MWh médios) de energia que será suprida através de um contrato de quantidade. Desta maneira, para cada hipótese de oportunidade de venda, constituída pelo par preço e quantidade (P^V e E^V), a comercializadora deverá encontrar o *mix* ótimo entre ambas as fontes, que deverá totalizar uma quantidade maior ou igual ao montante E^V , dependendo do *hedge* hidrológico necessário para mitigar o risco de disponibilidade de energia em cenários de geração inferior ao lastro contratado.

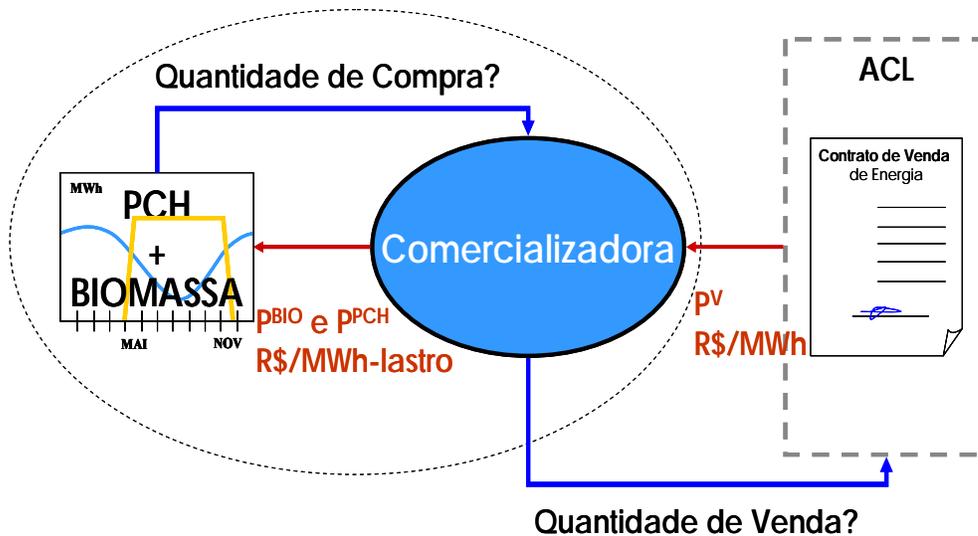


Figura 5-2 – Esquema de contratação de fontes alternativas complementares por parte de uma comercializadora para venda no ACL.

Resumindo, este modelo expressa a decisão de contratação ótima de uma comercializadora, para cada hipótese de preço de compra e venda, as quais deverão ser recalculadas sempre que algum destes preços seja alterado. Em um contexto mais amplo, este mesmo modelo poderia ser utilizado por uma comercializadora para atuar tanto em leilões de compra, como de venda (realizados pelas respectivas partes – geradores e consumidores), e em modelos de equilíbrio [23], envolvendo a interação com outros agentes, conforme estudado em [2][3] por um modelo baseado em utilidade esperada ou em diversas outras modalidades de leilões [18][52][55].

5.2.1

Aquisição de Energia

A expressão referente à despesa de contratação (compra) realizada pela comercializadora assume a seguinte forma:

$$D_t^C = P^{\text{PCH}} \cdot E^{\text{PCH}} \cdot h_t \cdot x^{\text{PCH}} + P^{\text{BIO}} \cdot E^{\text{BIO}} \cdot h_t \cdot x^{\text{BIO}} \quad (5-1)$$

Onde,

$P^{\text{PCH, BIO}}$: são os respectivos preços, em R\$/MWh-lastro, requeridos por cada fonte.

$E^{\text{PCH, BIO}}$: são as respectivas energias de lastro, em MWméd, disponíveis de cada fonte.

h_t : é o número de horas de cada etapa t .

$x^{\text{PCH, BIO}}$: são os respectivos percentuais de energia contratada de cada fonte que serão decididas pelo modelo.

Neste modelo, x^{PCH} e x^{BIO} são variáveis de decisão limitadas ao intervalo $[0,1]$ e formam o vetor de decisão do primeiro estágio $\mathbf{x} = [x^{\text{PCH}}, x^{\text{BIO}}]^T$.

5.2.2

Venda de Energia para o ACL

A venda de energia para o ACL é tipicamente feita através de contratos de quantidade, onde, diferentemente do contrato de disponibilidade, o vendedor tem a obrigação de entregar a quantidade de energia contratada no submercado do comprador durante todo o período de vigência do contrato. Desta maneira, a comercializadora ao comprar energia por disponibilidade e revendê-la por quantidade está absorvendo todo o risco de produção dos geradores e, portanto, deve ser precificado. Para mitigar este risco pode-se atuar em duas frentes: (i) através de um sobre-preço no contrato de venda com relação ao de compra, e (ii) através da composição de um portfolio de compra que minimize o risco de produção. Em ambas as formas de “*hedge*” a comercializadora leva vantagem sobre os geradores, que individualmente não podem tirar proveito da complementaridade entre fontes e que, no caso de pequenos grupos geradores, têm menos acesso e poder de barganha com grandes consumidores.

Nesta configuração, a comercializadora está exercendo o papel de gerenciadora de risco, se beneficiando do “*spread*” de preços entre compra e venda e do efeito sinérgico de complementação entre as fontes.

Desta maneira, a renda líquida proveniente de um contrato de venda de um montante E^V (em MWh médios) a um preço P^V (em R\$/MWh) para entrega no mesmo subsistema dos geradores, apresenta a seguinte forma:

$$R_{ts}^V = P^V \cdot h_t \cdot E^V \cdot x^V + (G_{ts}^{BIO} \cdot x^{BIO} + G_{ts}^{PCH} \cdot x^{PCH} - h_t \cdot E^V \cdot x^V) \cdot \pi_{ts} \quad (5-2)$$

Onde,

E^V : é a energia máxima de venda, em MWh.

$G_{ts}^{PCH, BIO}$: são as respectivas produções por série hidrológica e por período, em MWh, referentes ao lastro ou garantia física de cada usina ($E^{PCH, BIO}$).

π_{ts} : é o preço spot por série hidrológica e por período, em R\$/MWh.

x^V : é percentual de energia vendida do total demandado pelos consumidores livres.

Neste modelo, x^V também é variável de decisão e está limitada ao intervalo $[0,1]$. Esta variável é contemplada no modelo para dar a flexibilidade à comercializadora de não atender completamente a demanda de energia (E^V) do consumidor, caso este negócio não atenda ao perfil de risco da comercializadora na escala total demandada.

Além disso, devemos impor algumas restrições sobre as quantidades contratadas. A primeira restrição é uma restrição de lastro contratual, a qual impõe que a energia total vendida deve ser menor ou igual à energia total comprada. Ou seja, toda energia vendida deve estar lastreada por um certificado de garantia física.

$$E^V \cdot x^V \leq E^{PCH} \cdot x^{PCH} + E^{BIO} \cdot x^{BIO} \quad (5-3)$$

No caso de uma comercializadora que não possui geração própria, este certificado é obtido através dos seus contratos de compra.

Neste trabalho vamos assumir um cenário conjuntural onde existe disponibilidade suficiente de ambas as fontes para atender à demanda E^V .

5.2.3

Expressão final da renda líquida

Em todas as abordagens analisadas neste trabalho os modelos de decisão consideram uma função de renda $R(\mathbf{x}, \xi_{ts})$, com dependência no vetor de variáveis de decisão (\mathbf{x} – denominadas variáveis do primeiro estágio em um problema de otimização estocástica) e no vetor aleatório (ξ_{ts}) que caracteriza as incertezas de cada período através de seus cenários. Além disso, foi previsto um conjunto de restrições lineares do tipo $\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ que permitem delimitar as variáveis de decisão de primeiro estágio a uma região poliédrica.

Neste estudo de caso, modelamos o portfolio de uma comercializadora que lastreia um contrato de venda para um dado consumidor livre (inserido no ACL) através de um portfolio entre dois contratos de compra (por disponibilidade), com usinas do tipo PCH e Biomassa a bagaço de cana.

O vetor de variáveis de decisão $\mathbf{x} = [x^{\text{BIO}}, x^{\text{PCH}}, x^{\text{V}}]^T$ é composto pelas variáveis referentes aos percentuais de compra e venda das respectivas quantidades, assumidas conhecidas, E^{BIO} , E^{PCH} e E^{V} . O conjunto de vetores contendo os cenários multivariados que caracterizam as incertezas em cada período $\xi_{ts} = [\pi_{ts}, G_{ts}^{\text{BIO}}, G_{ts}^{\text{PCH}}]^T$ é formado pelos respectivos cenários de preço spot, geração da PCH e geração da termelétrica a biomassa (que neste estudo será considerada como determinística, mas que em um caso geral pode conter a incerteza da safra). E por fim, a expressão da renda final $R(\mathbf{x}, \xi_{ts})$ é dada pelo valor líquido entre a renda do contrato de venda, expressão (5-2), e a despesa total dos contratos de compra de lastro das duas fontes, expressão (11-1).

$$R(\mathbf{x}, \xi_{ts}) = R_{ts}^{\text{V}} - D_{ts}^{\text{C}} \quad (5-4)$$

$$R(\mathbf{x}, \xi_{ts}) = P^{\text{V}} \cdot h_{\text{t}} \cdot E^{\text{V}} \cdot x^{\text{V}} + (G_{ts}^{\text{BIO}} \cdot x^{\text{BIO}} + G_{ts}^{\text{PCH}} \cdot x^{\text{PCH}} - h_{\text{t}} \cdot E^{\text{V}} \cdot x^{\text{V}}) \cdot \pi_{ts} - P^{\text{PCH}} \cdot E^{\text{PCH}} \cdot h_{\text{t}} \cdot x^{\text{PCH}} + P^{\text{BIO}} \cdot E^{\text{BIO}} \cdot h_{\text{t}} \cdot x^{\text{BIO}} \quad (5-5)$$

5.2.4

Calculo dos cenários de geração (BIO e PCH)

O procedimento utilizado para simular os cenários futuros de geração de ambas as usinas se divide em três partes:

(i) primeiramente é estimado um cenário de evolução da demanda de energia elétrica para os próximos cinco anos, utilizando como base uma hipótese de crescimento do PIB e expansão dos setores industriais;

(ii) posteriormente, um cenário de expansão da rede e da oferta de nova capacidade é ajustado conforme os resultados dos leilões de energia nova programados para cobrir a demanda requisitada pelas distribuidoras até os próximos cinco anos;

(iii) finalmente um modelo de despacho hidrotérmico, baseado na metodologia de programação dinâmica estocástica dual, é executado com o objetivo de calcular a política que minimiza o custo global do uso dos recursos hídricos e térmicos do sistema para atender à demanda ao longo de todo o horizonte de planejamento levando em consideração as restrições do sistema e das usinas como, por exemplo, a rede de transmissão [49][12][13][35][36].

Esta metodologia é empregada semanalmente no Brasil pelo Operador Nacional do Sistema (ONS) e como resultado se obtém os seguintes resultados: a programação dos despachos de cada usina, que é posteriormente ajustada no curto prazo com base nas restrições elétricas ou em eventos imprevistos e os preços de liquidação de diferenças (PLD), também conhecidos como preços spot ou preços de curto prazo. Além destes resultados, este modelo também fornece o conjunto de cenários de operação e preços futuros do sistema, simulados através de um processo de simulação de Monte Carlo das vazões, necessários para se compor a programação (despacho) do período atual.

Os cenários de geração das hidrelétricas são, então, alocados para cada hidrelétrica com base em mecanismo de realocação de energia (MRE) que faz um rateio da geração total do sistema, através do montante de energia assegurada de cada usina. Este processo é descrito no item 9.4 do ANEXO A e a entrada de cada usina neste mecanismo é facultativa. Entretanto esse mecanismo se mostra bastante vantajoso para as hidrelétricas, uma vez que, geralmente, a geração total de todas as usinas do Brasil tem um perfil muito mais constante e previsível do

que a geração individual. Assim, este mecanismo funciona como uma espécie de “condomínio” que tira vantagem das correlações espaciais dos diversos regimes hidrológicos do país, como mostra a figura abaixo para uma usina localizada na cabeceira do rio Paraibuna (Rio Paraíba do Sul).

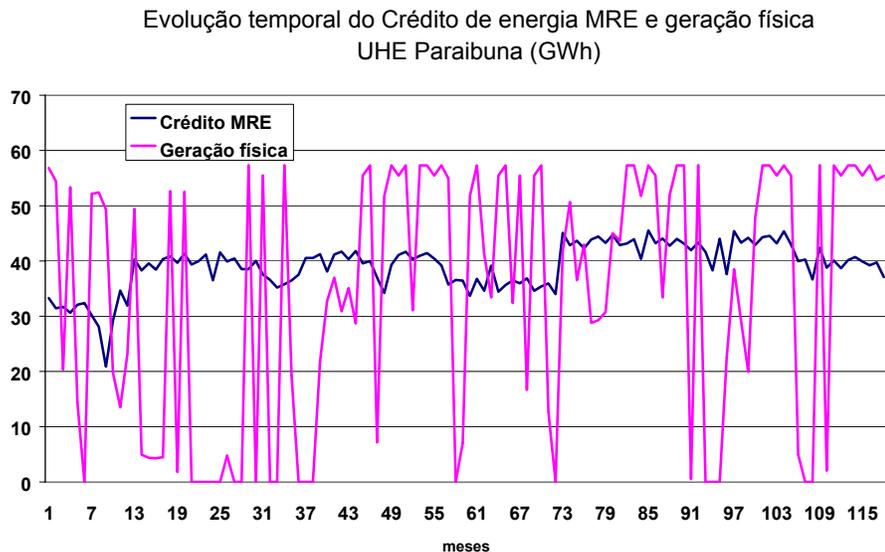


Figura 5-3 – Geração física *versus* crédito de energia alocado pelo MRE à usina Paraibuna ao longo de 10 anos.

Já para a biomassa, o perfil de geração é um perfil fixo ou dito inflexível ao longo do ano. Esta fonte gera 100% de sua capacidade ao longo do período da safra (período de colheita da cana de açúcar – maio a novembro no sudeste do Brasil) e permanece desligada durante o período entre safras (de dezembro a abril).

Na Figura 5-4 a seguir é exibido o perfil de geração de uma usina a biomassa (área com valores no eixo da esquerda) e o perfil médio acompanhado do intervalo de confiança de 90% para os créditos de energia de uma PCH no subsistema sudeste (linhas com valores no eixo da direita). Os valores são apresentados em percentual dos respectivos lastros de forma a normalizar os valores e torná-los gerais e independentes de usinas específicas.

Para tanto, o procedimento de despacho hidrotérmico foi executado com o software SDDP¹⁴, de acordo com os dados do sistema publicados no programa mensal de operação do sistema (PMO) do ONS (www.ons.org.br), publicado em maio de 2007.

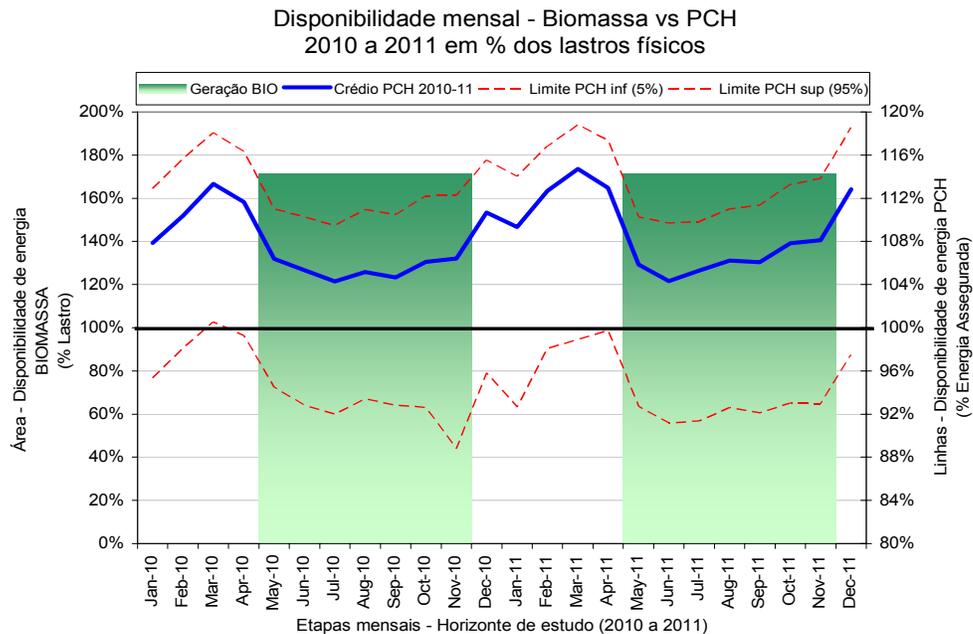


Figura 5-4 – Disponibilidade futura de energia ao longo do período (PCH e Biomassa) em % do lastro físico de cada usina

Nesta figura é importante ressaltar o risco de quantidade, que conforme o a expressão (5-2) explicita em seu segundo termo, toda vez que a energia produzida for inferior ao montante contratado, que tem como limite lastro físico da usina (100% na Figura 5-4), ocorrerá uma despesa de compra no curto prazo. Assim, pode-se observar a alta exposição que uma comercializadora poderia incorrer ao se contratar somente com uma das fontes. No caso da biomassa, a exposição é maior que a proporcionada pela PCH devido à geração nula fora do período da safra. Contudo, devido ao fato da biomassa apresentar um perfil de geração acima do seu lastro, justamente nos meses de seca (período de safra – de maio a novembro), esta apresenta um valor esperado de somatório anual superior ao da

¹⁴O SDDP é um software de propriedade da PSR consultoria (www.prs-inc.com).

PCH, que sofre do “mal do risco de preço e quantidade”. Estes dois resultados podem ser explicados pela estrutura do setor elétrico, que por ser predominantemente hidrelétrico, apresenta preços mais elevados justamente quando os reservatórios estão em níveis baixos, proporcionando uma geração hídrica inferior aos valores de garantias físicas (energia assegurada). Como a biomassa opera justamente no momento crítico de disponibilidade para o sistema, sua energia é valorada por um preço superior ao médio. A Figura 5-5 apresentada no próximo item (Resultados), contrastará os valores esperados (projeção) da energia alocada à PCH e dos preços spot ao longo do período de estudo. Nesta será possível perceber a correlação negativa entre essas duas séries.

5.3

Resultados

Com base nos resultados do modelo de despacho hidrotérmico, descrito anteriormente, para o período entre 2010 e 2011 (etapas mensais), os créditos de energia de uma PCH com potência de 30 MW e 16.5 MW médios (55% da potência) de energia assegurada (lastro físico) foram simulados ao longo do horizonte de estudo, para 200 diferentes cenários hidrológicos estatisticamente independentes e equiprováveis. Além deste resultado, o preço spot ou preço de liquidação de diferenças de curto prazo, também foi obtido segundo o mesmo procedimento.

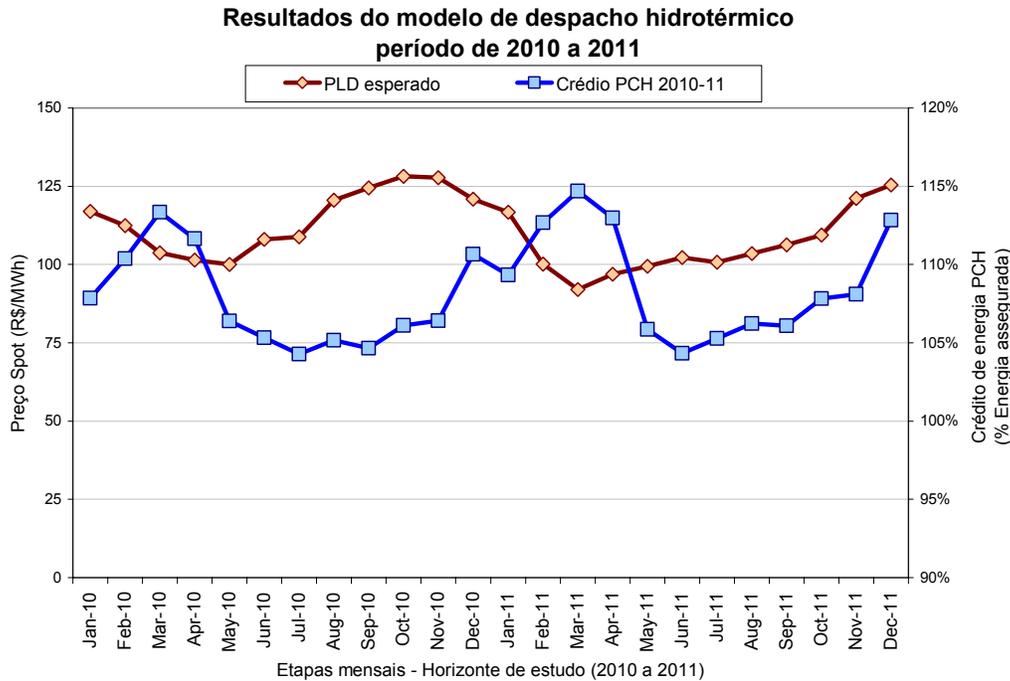


Figura 5-5 – Valor esperado dos preços spot e créditos de energia ao longo período de estudo. Estimativa de coeficiente de correlação = -0.51.

Da mesma forma, foi considerada como fonte de energia e lastro para a comercializadora, uma termelétrica a biomassa de 30 MW de potência disponível, com um lastro físico de 17.5 MW médios (cerca de 58% da referida potência).

Por simplicidade, os preços de compra de lastro para ambas as fontes foram assumidos iguais a 140 R\$/MWh-lastro. Este valor deverá ser pago para cada MWh de lastro contratado pelo modelo. O referido valor é superior aos preços marginais dos últimos leilões (A-3 e A-5) realizados em 2007 no ambiente de comercialização regulado (ACR) e foi selecionado de forma a gerar um caso onde se paga um preço alto. Desta maneira, se constatarmos que a operação de compra e venda se mostrou atraente neste caso, certamente se mostrará ainda mais vantajosa ao se utilizar preços mais realistas discriminados por fonte, que deverão ser obtidos e calibrados pelas condições específicas de uma dada situação de negociação. No que diz respeito ao preço de venda, a comercializadora deverá negociar diretamente com o seu potencial consumidor.

Se considerarmos um consumidor livre com uma carga de 15 MW médios, contratado a 115 R\$/MWh, e que este ainda tenha que incorrer em uma tarifa de

fio, cobrada pela distribuidora, de 135 R\$/MWh, a tarifa final de energia efetivamente paga será de 250 R\$/MWh. Seguindo a idéia do modelo de negócio descrito neste capítulo, uma comercializadora poderia oferecer a este consumidor um contrato com tarifa de energia igual 165 R\$/MWh, lastreado em energia de fontes alternativas (Biomassa e PCH). Ao se contratar com esta duas fontes, através do intermédio da comercializadora, o consumidor obterá um desconto de, por exemplo, 75 R\$/MWh na tarifa fio, equivalente a 55% de redução previsto na lei N° 9.427 de dezembro de 1996, incorrendo assim, em uma tarifa final de 165 (nova tarifa de energia) + 60 (nova tarifa fio) = 225 R\$/MWh (10% menor). Esta diferença de 10% representa uma economia de 25 (R\$/MWh) × 15 (MWh méd) × 8760 (horas por ano) × 2 (anos) × 66% (valor líquido de redução de imposto de renda e contribuição social: 66% = 100% – 25% + 9% = 34%) = 4.3 Milhões de R\$ em custos evitados. Esta economia, dificilmente seria obtida sem o intermédio direto da comercializadora, que como argumentado no início deste capítulo, deverá formar um portfólio entre as duas fontes de forma a gerenciar o risco de quantidade através dos montantes de energia contratados por ambas as fontes.

Vamos estudar o mix ótimo de compra para a configuração de compra e venda descrita anteriormente e resumida na tabela a seguir. Para isso utilizaremos a abordagem descrita no capítulo 3, baseada no valor presente líquido (VPL) dos equivalentes certos de cada período.

Tabela 5-1 – Preços de compra e venda para a quantidade demandada pelo consumidor livre.

Quantidade de Venda (E^V) [MWh méd]	Preço de Venda (P^V) [R\$/MWh]	Preço de Compra BIO (P^{BIO}) [R\$/MWh-lastro]	Preço de Compra PCH (P^{PCH}) [R\$/MWh-lastro]
15	165	140	140

5.3.1

Resultado neutro a risco

Primeiramente será analisada a solução neutra a risco, onde o valor esperado do VPL é maximizado. Para isso, consideraremos um custo de capital de 10% a.a.

Sob a hipótese de neutralidade a risco (utilidade linear $U(r) = r$), o modelo (3-30) a (3-40) contrata somente a Biomassa para lastrear o contrato de venda. A

quantidade adquirida de lastro desta fonte foi exatamente igual aos 15 MWmédios necessários para lastrear o montante de venda, deixando a distribuidora extremamente exposta aos custos de compra no curto prazo durante os períodos fora da safra (quando no ocorre geração por parte da usina a biomassa). Contudo, como o período de safra possui preços mais elevados que os preços fora da safra (ver Figura 5-5) a soma ao longo dos anos ainda sim proporciona um Custo Esperado de Compra (CEC) líquido (compras menos vendas) negativo, indicando um benefício esperado, ao longo do horizonte, com a parcela variável da expressão (5-2). Em termos médios, ao longo dos dois anos (2010 e 2011), o Custo Esperado de Compra por MWh de lastro contratado apresentou um valor igual a $CEC^{BIO} = -1.5 \text{ R\$/MWh-lastro}^{15}$. Assim sendo, segundo a ótica de um perfil neutro a risco, o melhor a se fazer é contratar integralmente esta fonte para lastrear a venda no curto prazo, resultando em um VPL(10%a.a.) esperado de 6.1 MMR\$. Na figura a seguir, o valor esperado deste custo (líquido) ao longo dos meses e o seu respectivo intervalo de confiança de 90% são exibidos.

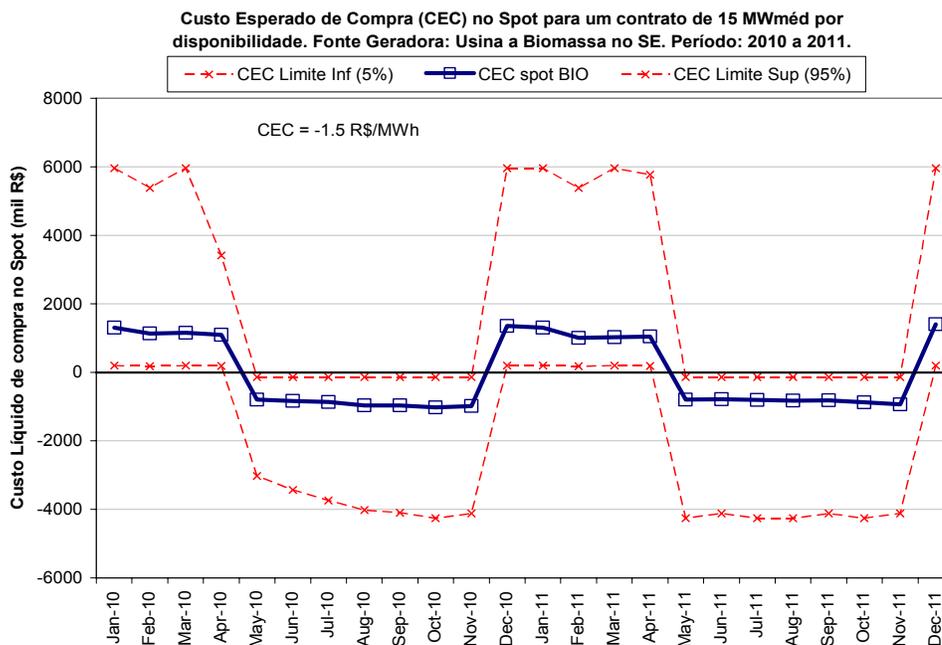


Figura 5-6 – Custo líquido de compras menos vendas no curto prazo. Valor esperado e intervalo de confiança de 90%.

¹⁵Este valor pode ser obtido somando o valor esperado dos custos menos receitas ao longo de todo o período e dividindo o mesmo pelo montante de MWh de lastro adquirido, no caso 15 (MWmédios) × 8760 × 2 (anos). Assim, o valor de $CEC = -1.5 \text{ R\$/MWh-lastro}$ expressa a receita (custo negativo) esperada com a parcela variável do contrato para cada MWh de lastro que seja adquirido desta fonte.

A distribuição de probabilidade acumulada dos resultados líquidos da comercializadora (variáveis $R(x, \xi_{2010})$ e $R(x, \xi_{2011})$) podem ser visualizados na figura a baixo, onde em ambos os anos existe uma probabilidade de aproximadamente 10% de se obter resultados negativos (prejuízo), os quais podem chegar atingir uma profundidades de até 10 MMR\$. Na seqüência, a Figura 5-8 exibe o VPL(10% a.a.) relacionado aos resultados da Figura 5-7.

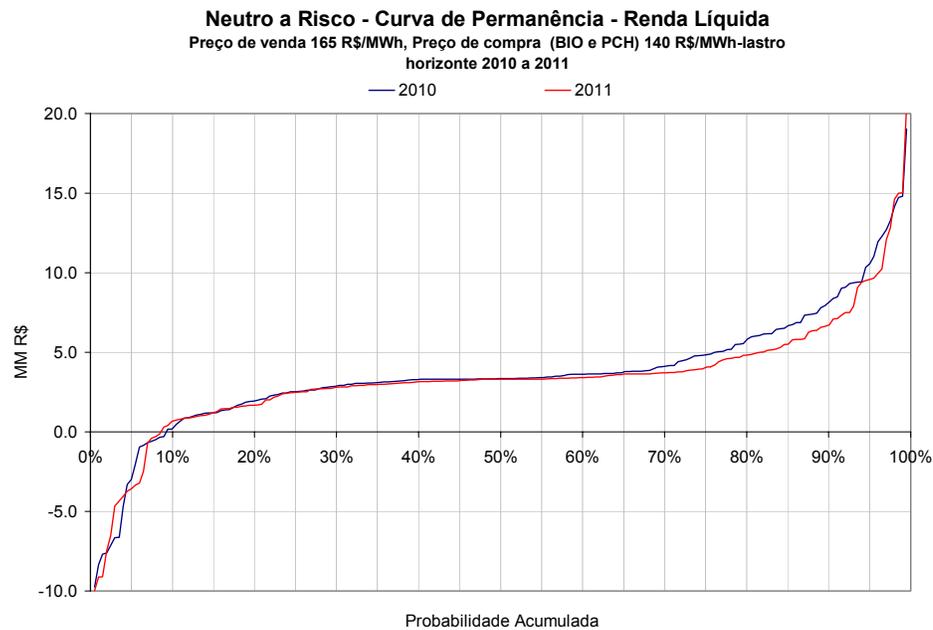


Figura 5-7 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida dos períodos 2010 e 2011. Estratégia neutra a risco (maximizar o VPL (10%) esperado da renda).

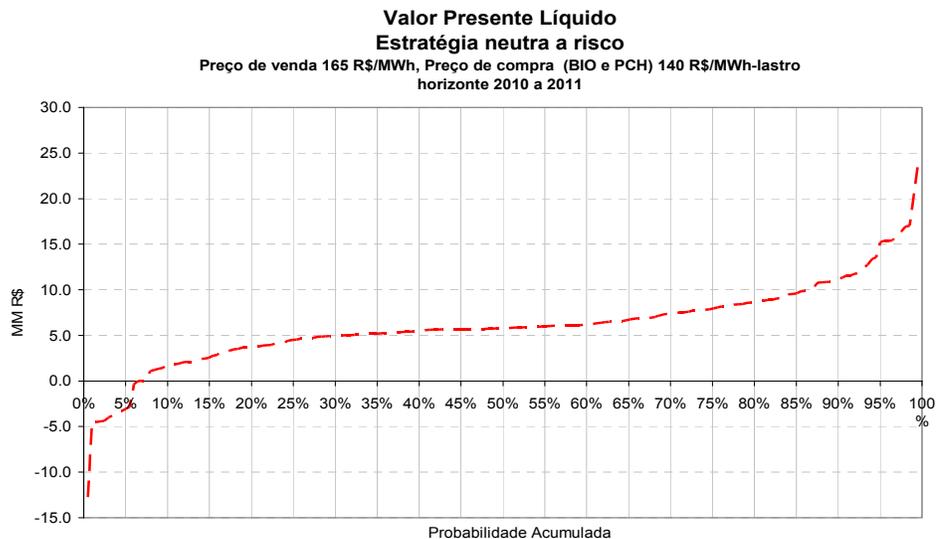


Figura 5-8 – Distribuição de Probabilidade do VPL(10% a.a.) para a estratégia neutra a risco.

5.3.2

Resultado avesso a risco

Se agora considerarmos um perfil de aversão a risco, através de uma função utilidade linear por partes côncava (conforme apresentada na Figura 5-9) e utilizarmos o modelo (3-30) a (3-40) para traçar a estratégia avessa a risco desta operação de compra e venda, será possível verificar, na Tabela 5-2, o portfolio formado por ambas as fontes, Biomassa e PCH, para atender o contrato de venda.

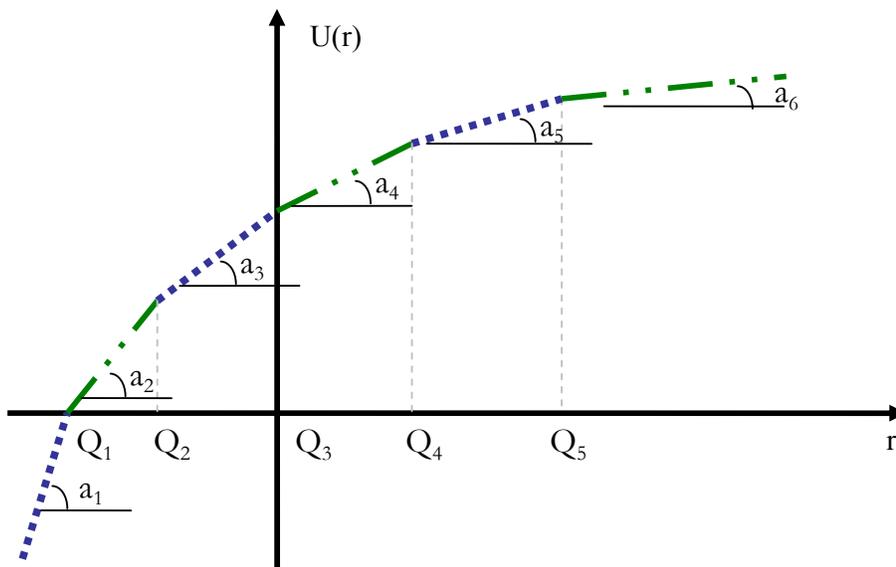


Figura 5-9 – Utilidade Linear por Partes com 6 segmentos.

O valor das inclinações ou penalizações de cada segmento foi definido segundo um coeficiente de aversão a risco constante entre segmentos, $CARP_k = 50\% \forall k$ (definido em (2-6)): $a_1 = 100$ e $a_{k>1} = a_{k-1}/2$.

Os valores das quebras, ou pontos de renda líquida (em MMR\$) a partir dos quais as inclinações definidas passam a valer, foram definidos arbitrariamente para expressar os limites onde existe mudança na percepção de risco: $Q_0 = -\infty$, $Q_1 = -2$, $Q_2 = -1$, $Q_3 = 0$, $Q_4 = 1$, $Q_5 = 2$, $Q_6 = \infty$.

Tabela 5-2 – Comparação da contratação realizada pelos perfis de aversão e neutralidade a risco

	Qt Venda (MWméd)	Qt Compra BIO (MWméd)	Qt Compra PCH (MWméd)	Qt Compra Total (MWméd)	Hedge (MWméd)	Hedge (%compra)
Avesso a risco (Otm EC)	15.0	5.8	10.6	16.4	1.4	8.5%
Neutro a Risco	15.0	15.0	0.0	15.0	0.0	0.0%

A solução do perfil avesso a risco contratou um total de 16.4 MWmédios compostos por 35% de lastro proveniente de Biomassa e 65% de proveniente da PCH. A PCH é inserida no *mix* por este perfil à medida que a exposição ao preço spot, conforme evidenciado na solução neutra a risco (Figura 5-6), é altamente penalizada pelos segmentos inferiores da função utilidade. Conforme já comentado, a Figura 5-4 evidencia uma maior exposição à volatilidade dos preços de curto prazo no caso da biomassa. Em contraposição ao argumento realizado a favor da energia proveniente da biomassa, dado pelo benefício esperado com a venda nos períodos de seca, o perfil de aversão a risco penaliza muito mais severamente (através dos segmentos inferiores da utilidade) os momentos de exposição (fora da safra, onde a usina está indisponível) frente às situações onde este benefício ocorre. Desta maneira, o modelo baseado no equivalente certo de cada período busca o correto equilíbrio entre o valor esperado de ambas as fontes e o risco agregado por estas. Este equilíbrio é dado pelo portfolio que maximiza a preferência do agente, expresso pelo fluxo equivalente certo.

Na tabela a seguir são contrastados os valores esperados e os equivalentes certos de cada período, acompanhados dos respectivos VPL's das soluções obtidas através do perfil avesso e neutro a risco. Em ambas as soluções, o equivalente certo calculado refere-se à função utilidade do perfil avesso a risco.

Tabela 5-3 – Resultado de equivalente certo e valor esperado dos fluxos obtidos pelos perfis de aversão e neutralidade a risco.

	VPL(10%) EC(R_t) MMR\$	EC(R_{2010}) MMR\$	EC(R_{2011}) MMR\$	VPL(10%) E(R_t) MMR\$	E(R_{2010}) MMR\$	E(R_{2011}) MMR\$	Prêmio de Risco* %
Averso a risco	2.9	2.8	0.5	5.1	3.1	2.8	43%
Neutro a Risco	-3.0	-1.7	-1.7	6.1	3.7	3.3	149%

*Valores calculados com base na diferença percentual entre os VPL dos Equivalentes certos e os respectivos valores esperados.

Conforme mencionado, a solução neutra a risco, sob a ótica do perfil de aversão é extremamente penalizada, apresentando um valor de equivalente certo negativo para os dois anos. O que significa que sob esta ótica, a comercializadora estaria disposta a pagar para não incorporar este fluxo de caixa em seu portfolio. Desta forma, a solução que maximiza o valor presente dos equivalentes certos de cada período (métrica de preferência proposta no capítulo 3), apresenta um prêmio de risco bastante inferior ao da solução neutra a risco, indicando um ganho obtido com relação ao nível de certeza neste fluxo. Comparando os valores das duas soluções, nota-se claramente o benefício obtido com o *mix* entre as fontes, onde basicamente, foi feita uma “troca” de 950 mil R\$ de redução no valor esperado por um ganho de 5.9 MMR\$ em termos de equivalente certo.

A Figura 5-10 a seguir, compara o as distribuições dos VPL's obtidos pelos perfis neutro (linha pontilhada) e avesso (linha contínua) a risco onde fica evidente a redução tanto da probabilidade quanto da profundidade de perdas financeiras ao longo do período.

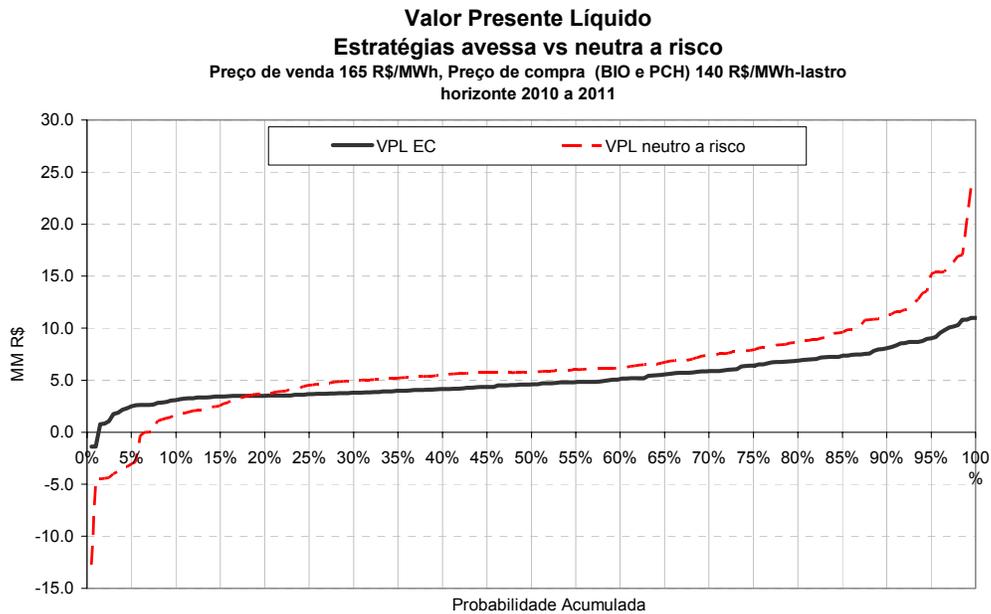


Figura 5-10 – Distribuição de Probabilidade do VPL(10% a.a.) para a estratégia avessa a risco, baseadas na maximização do VPL dos equivalentes certos de cada período e para estratégia neutra a risco, baseada na maximização do valor esperado do VPL.

A tabela a seguir resume os dados principais do tamanho e tempo consumido para o problema resolvido:

Tabela 5-4 – Resultado de equivalente certo e valor esperado dos fluxos obtidos pelos perfis de aversão e neutralidade a risco.

	Valores
Número de Linhas (restrições)	2799
Número de Colunas (variáveis)	826
Elementos diferentes de zero da matriz	6813
Número de variáveis binárias	10
Tempo consumido	4 segundos.

5.3.3

Sensibilidade no Preço de Venda

Com o intuito de analisarmos o comportamento das decisões ótimas de compra e venda, realizadas pela abordagem avessa a risco, vamos estudar a sensibilidade do *mix* de contratação ótimo entre as fontes com respeito ao preço de venda no ACL. Desta maneira, o preço de venda foi discretizado em 30 pontos igualmente espaçados de 1 R\$/MWh e inicializados pelo preço de compra, 140, até atingir o preço de 169 R\$/MWh. Os resultados exibidos no item anterior, para o preço de venda referente a 165 R\$/MWh, está portanto, incluído nos pontos que serão analisados a seguir.

Tabela 5-5 – Resultado de equivalente certo e valor esperado dos fluxos obtidos pelos perfis de aversão e neutralidade a risco.

Preço Venda (R\$/MWh)	Qt de Venda (MWméd)	Qt compra BIO (MWméd)	Qt compra PCH (MWméd)	Qt compra total (MWméd)	Qt compra BIO (% total)	Qt compra PCH (% total)
140	0.0	0.0	0.0	0.0		
141	0.0	0.0	0.0	0.0		
142	0.0	0.0	0.0	0.0		
143	0.0	0.0	0.0	0.0		
144	2.7	1.2	1.4	2.7	46%	54%
145	2.7	1.3	1.4	2.7	47%	53%
146	2.8	1.3	1.5	2.8	47%	53%
147	2.9	1.4	1.5	2.9	48%	52%
148	2.9	1.4	1.5	2.9	49%	51%
149	3.2	1.6	1.7	3.3	49%	51%
150	3.3	1.7	1.7	3.4	50%	50%
151	3.5	1.8	1.8	3.5	50%	50%
152	3.7	2.0	1.9	3.8	51%	49%
153	3.9	2.1	2.0	4.0	51%	49%
154	4.6	2.3	2.4	4.7	48%	52%
155	5.9	2.7	3.5	6.2	43%	57%
156	15.0	4.6	11.6	16.2	29%	71%
157	15.0	4.8	11.5	16.3	29%	71%
158	15.0	4.8	11.6	16.4	29%	71%
159	15.0	4.9	11.4	16.3	30%	70%
160	15.0	4.7	11.3	16.0	30%	70%
161	15.0	4.9	11.1	16.0	31%	69%
162	15.0	5.1	11.1	16.1	31%	69%
163	15.0	5.5	10.7	16.2	34%	66%
164	15.0	5.6	10.6	16.3	35%	65%
165	15.0	5.8	10.6	16.4	35%	65%
166	15.0	5.9	10.5	16.5	36%	64%
167	15.0	6.1	10.5	16.6	37%	63%
168	15.0	7.1	9.8	16.9	42%	58%
169	15.0	7.3	9.6	17.0	43%	57%

Os resultados da Tabela 5-5 pode ser divididos em dois conjuntos: (i) o conjunto de preços de venda para os quais esta transação apresenta baixa

rentabilidade e muito risco, logo a oportunidade de venda não é integralmente aproveitada pela comercializadora (preços de venda entre 140 a 155 R\$/MWh), e (ii) o conjunto de preços para os quais tal operação se mostra rentável o suficiente para ser integralmente aproveitada pela comercializadora (preços de 156 R\$/MWh em diante). Esta atratividade ou disposição a contratar pode ser visualizada na Figura 5-11 a seguir, onde a decisão ótima de venda foi normalizada pelo seu valor máximo (15 MW médios requisitados pelo ACL) e exibida para cada oportunidade de preço de venda considerada na sensibilidade.

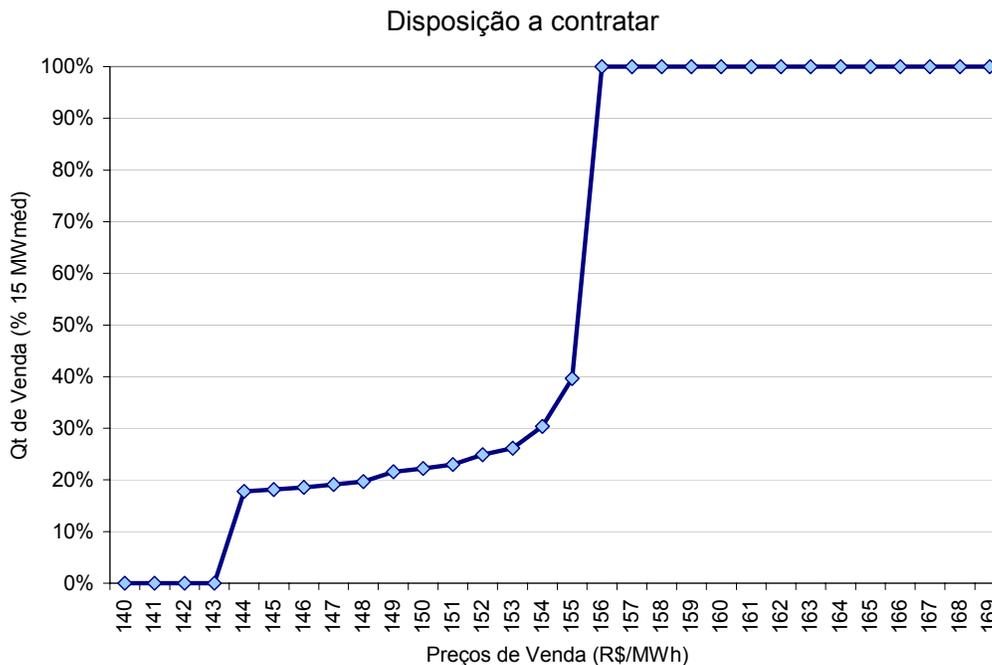


Figura 5-11 – Curva de Disposição a Contratar no ACL (valores em % da demanda máxima requisitada, 15 MW médios).

Desta maneira, o *spread* de 16 R\$/MWh com relação ao preço de compra, de 140 R\$/MWh-lastro, representa o sobre-preço necessário para que a comercializadora assumira integralmente o risco da entrega dos 15 MW médios requisitados pelo consumidor do ACL, uma vez que a compra de lastro está sendo feita através de pagamentos por disponibilidade (onde a capacidade das usinas é alugada – contrato por disponibilidade) e a venda por quantidade (onde a obrigação de entrega do montante contratado está nas mãos do vendedor – comercializadora).

Na Figura 5-12 (abaixo) o *mix* entre as fontes (PCH e Biomassa) é exibido para as diversas hipóteses de preços de venda no ACL. Além disso, nesta figura os conjuntos de preços descritos no parágrafo anterior são evidenciados.

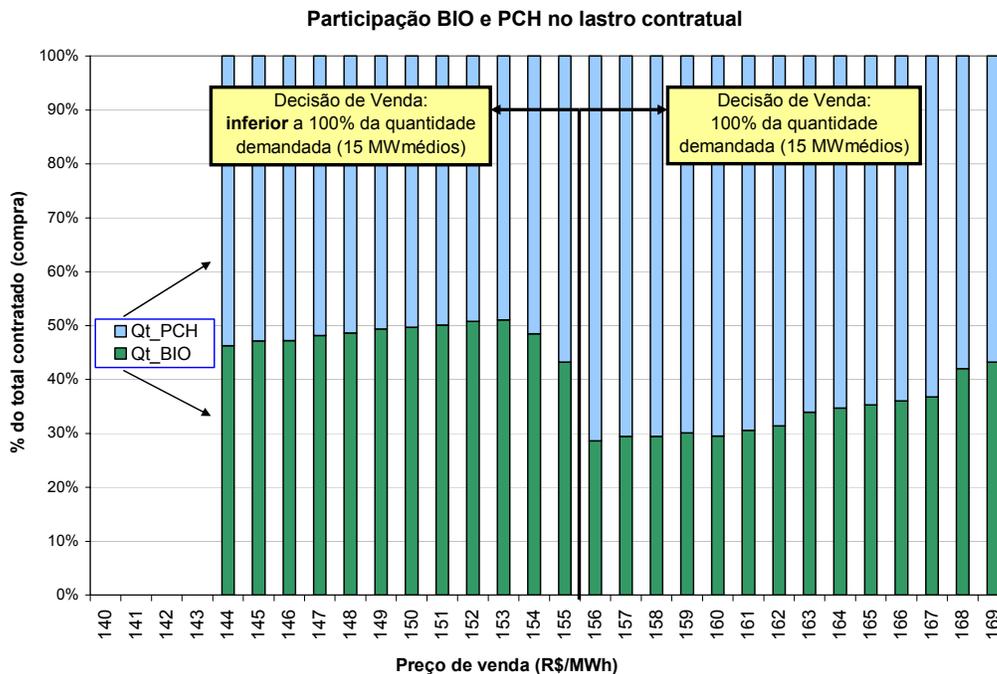


Figura 5-12 – Sensibilidade do mix de contratação ótimo entre as fontes (PCH e Biomassa) com relação ao preço de venda no ACL (valore em % da compra total).

Pode-se perceber que a estrutura de contratação sofre uma “quebra” ao passar de um conjunto para o outro. Para o preço de venda de 156 R\$/MWh, o *mix* sofre uma brusca alteração onde a participação da PCH é visivelmente superior à da biomassa (aproximadamente 70% PCH e 30% Biomassa). Contudo, à medida que o preço de venda aumenta este *mix* novamente caminha para um portfólio com cada vez mais biomassa. Isso ocorre em função dos diferentes atributos dos perfis de geração da Biomassa e da PCH. A PCH apresenta um perfil de geração menos sazonal que o da biomassa, e apesar de incerto, sua variabilidade não requer que a comercializadora compre no mercado de curto prazo todo o seu lastro vendido, como o perfil da Biomassa requer nos meses fora da safra (ver Figura 5-4), indicando assim, um menor risco de compra se comparado ao proveniente da biomassa. Entretanto, o perfil exibido pela Biomassa tem o seu valor, pois conforme comentado, o valor esperado da venda da energia nos meses de safra

apresenta um valor superior ao dos meses de fora da safra. Assim, conforme o preço de venda aumenta, a receita certa do contrato cresce e o agente pode “tirar proveito” do benefício esperado da energia da biomassa, se arriscando um pouco mais na parcela variável do contrato, a qual tenderá a apresentar uma maior exposição aos custos de compra no curto prazo nos meses fora da safra, e uma maior receita esperada devido aos meses de safra.

Pode-se resumir as qualidades de cada fonte da seguinte forma: (i) a biomassa representa um maior risco para a comercializadora, devido à forte exposição ao curto prazo nos períodos entre safras, porém um maior valor esperado com relação às vendas do excedente no curto prazo durante os períodos de safra, onde geralmente o preço do curto prazo é mais alto; e (ii) a PCH representa um menor risco na exposição ao curto prazo se comparada à biomassa, porém um valor esperado inferior, justamente por apresentar um excedente de produção nos períodos de cheia (coincidentes com o período de entre safras) dos reservatórios, quando os preços tendem a ser baixos.

Dessa maneira, como o preço de venda representa a parcela fixa (determinística) da renda, ele simplesmente translada a sua distribuição final, não alterando a dispersão da mesma. Assim, para preços baixos, próximos ao preço de compra, a comercializadora não tem muito espaço para gerenciar o risco e, portanto, seleciona uma participação maior de PCH. À medida que o preço é elevado, o contrato de venda “introduz mais média” na distribuição da renda, deslocando esta para a direita e retirando alguns cenários de baixo resultado dos primeiros segmentos da utilidade (onde ocorre uma alta penalização). Assim, o funcional de preferência pode “substituir” o risco, que foi reduzido pela elevação do preço de venda, pelo risco de um portfólio com mais biomassa. Em outras palavras, desta maneira o funcional “manteria o risco inalterado”, porém teria introduzido um maior valor esperado proveniente da maior participação de biomassa no portfólio final. Note que cada acréscimo de preço introduz 1 R\$/MWh e cada unidade de biomassa introduz 1.5 R\$/MWh de benefício médio com a venda no curto prazo (ver Figura 5-6).

É importante notar que a Figura 5-12 possui duas regiões bem distintas: (i) valores de composição do portfólio para preços de venda abaixo de 156 R\$/MWh e (ii) acima. Como o *mix* é definido como a participação % entre as fontes no total comprado, esta figura deve ser analisada por partes, onde a primeira região na

realidade contém uma estrutura completamente diferente da segunda, dificultando muito a comparação entre regiões. Entretanto, o comportamento descrito acima, com relação à contratação entre fontes vale para ambas as regiões isoladamente, pois tanto na primeira região, quanto na segunda, à medida que o preço de venda aumenta, a participação da biomassa cresce dentro do portfólio. A exceção ocorre justamente na fronteira entre as regiões, quando este negócio está prestes a se tornar 100% atraente à comercializadora (preço de venda de 156 R\$/MWh) e proporcionar uma nova escala para a renda nesta transação. Neste ponto, que foge à regra, a comercializadora percebe que a sua total entrada no negócio, que proporciona uma outra escala de lucro – venda dos 15 MW médios, é mais rentável, em termos de equivalente certo (EC), do que o aumento da participação de biomassa no portfólio. Assim, a comercializadora refaz o seu mix de forma a maximizar o EC neste novo *statu quo*. Deste ponto em diante, como a demanda é limitada aos 15 MW médios, o comportamento esperado novamente se repete, com a substituição gradativa de energia proveniente da PCH pela da biomassa, à medida que o preço de venda é acrescido.

5.3.4

Resumo e Considerações Finais

Neste estudo de caso, a importância de uma ferramenta analítica que traduza o perfil de risco do agente foi evidenciada à medida que as decisões de contratação de compra e venda exigem uma avaliação complexa de risco dos impactos que cada possível *mix* entre as fontes pode proporcionar. Além disso, a atratividade da operação de compra e venda foi analisada e pode ser observado o ponto a partir do qual esta se mostrou integralmente aproveitada pela comercializadora (156 R\$/MWh).

Desta forma, este capítulo conclui o seu objetivo principal de exemplificar, através do estudo de um problema bastante atual do setor elétrico brasileiro, a abordagem proposta nesta tese e mostrar a importância desta ferramenta analítica para a tomada de decisão na presença de risco, uma vez que todas as “sutilezas” na contratação entre as duas fontes, analisadas acima dificilmente poderiam ser percebidas ou quantificadas sem o auxílio deste modelo.

É importante registrar que: todos os exemplos baseados no modelo proposto do item 3.3 foram resolvidos através do solver de propriedade da *Dash Optimization (Xpress versão 16)* em menos de 1 minuto, mostrando assim, um desempenho bastante satisfatório para esta classe de problemas que mesmo se tratando de um problema inteiro misto, apresenta um moderado número de variáveis binárias (uma para cada segmento). Uma instância com 5 períodos com uma utilidade de 5 segmentos, apresentaria 25 variáveis inteiras.

Além disso, a presença destas variáveis se restringe à tarefa de impor a ordenação dos segmentos da inversa da utilidade na avaliação da utilidade esperada de cada período. Conforme foi mostrado, o número de variáveis binárias não cresce com o número de cenários o mostra a robustez do modelo com relação ao aumento do número de cenários de incerteza para proporcionar uma melhor estimativa.

Para instâncias grandes com mais de 20 anos, onde o algoritmo de *branch and bound* pode requerer muito esforço computacional, pode-se utilizar a solução do problema de maximização da utilidade esperada, fazendo o fator de impaciência igual ao desconto $(1-J^{LR})^{-1}$, para se estabelecer um limite inferior e uma boa solução viável. No sentido de se obter um limite superior, pode-se utilizar o valor esperado da solução neutra a risco, que por definição será superior a qualquer equivalente certo avesso a risco. Desta forma, o algoritmo de *branch and bound* pode ser iniciado com limites bem definidos, onde o limite inferior (EC proveniente do problema Max EU) em todos os testes e casos desta tese se mostrou bastante próximo à solução ótima do problema de maximização do EC.

Entretanto, para estes problemas torna-se importante introduzir no algoritmo de *branch and bound* tais limites, de forma a reduzir ainda mais o espaço de busca através das podas dos ramos da árvore. Tal procedimento deve ser implementado com o intuito de se verificar a sua real contribuição na redução do tempo computacional exigido em problemas maiores dos que os tratados aqui.

6

Conclusões

Esta tese atingiu o seu primeiro objetivo no capítulo 3, ao mostrar uma abordagem alternativa para o funcional de utilidade esperada no contexto multi-período. Para isso, foi proposto um funcional baseado no valor presente dos equivalentes certos de cada período ao invés da tradicional combinação linear entre as utilidades esperadas dos períodos ponderadas pelos fatores de impaciência. A justificativa dada para tal abordagem foi deixar para a utilidade apenas o papel de precificar (ou valorar) cada período, em termos de equivalente certo, e uma vez estabelecido um fluxo equivalente, a comparação intertemporal tornou-se direta através do custo de oportunidade livre de risco do agente.

Além disso, o segundo objetivo desta tese foi alcançado ao se propor um modelo de programação inteira mista para resolver a dificuldade inserida ao problema de maximização do funcional de preferência, quando considerada a abordagem proposta. Isso se fez necessário à medida que tal abordagem introduziu ao problema de maximização uma função objetivo linear por partes convexa.

Finalmente, o terceiro objetivo foi mostrar como problemas de maximização de renda esperada com restrições de *Conditional Value at Risk* (CVaR) mínimo podem representar um problema de maximização de utilidade esperada. Contudo, a função utilidade encontrada na estrutura destes problemas mostrou uma dependência com a instância do problema, mais especificamente, com a distribuição de probabilidade das incertezas. Desta forma, pode ser notada a dependência da utilidade encontrada na estrutura das restrições de CVaR com a distribuição de probabilidade das incertezas.

Durante o estudo do funcional de preferência baseado no problema de maximização de renda esperada com restrições de CVaR, observou-se a incapacidade deste em atribuir uma preferência para as distribuições inviáveis (com relação às restrições de CVaR). Neste sentido, foi proposto um funcional dual ao original capaz de atribuir preferência a qualquer variável aleatória, dando origem a um funcional completo. A condição necessária para que este

proporcionasse a mesma seleção ótima do problema original foi obtida através da relação direta entre a penalização da restrição de CVaR dualizada na função objetivo e o módulo da sua variável dual. Além disso, algumas propriedades importantes dos funcionais estudados, como a não linearidade nas probabilidades, foram evidenciadas através de dois exemplos. O primeiro exemplo mostrou a violação do axioma da independência pelo funcional implícito ao problema de maximização da renda esperada com restrições de CVaR mínimo e, posteriormente, o seu funcional dual, proposto no item 4.3, se mostrou capaz de capturar a ordenação definida pelo Paradoxo de Allais, que é impossível de ser capturada pelos funcionais baseados em utilidade esperada.

Com o intuito de evidenciar e privar pela aplicabilidade das abordagens analisadas nesta tese, todos os resultados obtidos foram ilustrados com exemplos práticos dentro do escopo de cada capítulo. Por fim, no capítulo 5 foi apresentado um estudo de caso no qual uma comercializadora, utilizando a abordagem proposta nesta tese, montou um portfólio de fontes alternativas complementares (termelétricas movidas à biomassa – bagaço de cana de açúcar – e pequenas centrais hidrelétricas – PCH) de forma a comercializar o lastro obtido destas fontes no Ambiente de Contratação Livre (ACL). Neste estudo, as decisões de compra e venda foram otimizadas com base na abordagem proposta e comparadas com a abordagem neutra a risco. Desta forma, foi possível medir o impacto e relevância do *hedge* contra as exposições financeiras presentes na decisão neutra a arisco em um problema realista e bastante atual do setor elétrico brasileiro.

Trabalhos futuros

A primeira extensão natural deste trabalho reside no estudo da aplicabilidade dos funcionais propostos no capítulo 3 e 4 para o caso de problemas multi-estágio ou mesmo de dois estágios, porém de maior porte do que os tratados nesta tese. Como exemplo, pode-se citar as avaliações de empreendimentos novos (energia nova), que para o caso de hidrelétricas têm vida útil de 30 anos. Conforme argumentado no último parágrafo do capítulo 5, a inserção de limites no algoritmo de *branch and bound* pode ajudar a reduzir bastante o esforço computacional em problemas grandes, como os encontrados nos casos multi-estágio ou de dois estágios com muitos períodos. Desta forma, uma possível linha de pesquisa decorrente deste trabalho é a pesquisa e verificação de desempenho tanto dos limites propostos quanto de outros.

Posteriormente, o estudo de funções utilidades lineares por partes com dependência em medidas ou parâmetros da distribuição avaliada pode trazer interessantes contribuições no sentido de se estabelecer novas conexões e interpretações sobre o uso de medidas de risco como funcionais de preferência. Neste sentido, a classe de medidas poliédricas de risco pode ser evidenciada como uma interessante classe de medidas a ser explorada. As suas já comprovadas propriedades [11] no contexto de medidas de risco aliadas com o contexto poliédrico, que permite expressá-las através de problemas de programação linear, apontam esta classe como uma potencial fonte de interpretações e propriedades a serem exploradas na área de teoria de decisão.

Além disso, a caracterização do perfil de risco gerado pelos funcionais que podem ser definidos através das diversas maneiras que o CVaR pode ser empregado em problemas de decisão torna-se o caminho natural para as subseqüentes análises.

Em um contexto pragmático, a investigação da aplicabilidade em problemas realistas de comercialização de energia elétrica de funcionais baseados em medidas de risco é algo de grande valor. O setor elétrico exhibe um conjunto de riscos e características bastante peculiar, sobretudo os sistemas

predominantemente hídricos como é o caso do sistema elétrico brasileiro [2][3][20][30][31][41]. Desta maneira, algumas características importantes podem ser enumeradas no que diz respeito ao estudo e análise da aplicabilidade desses funcionais: (i) boa interpretação para o agente e facilidade no processo de especificação, (ii) propriedades de coerência, (iii) propriedades que garantam sua fácil implementação em problemas de grande porte e (iv) uma forma que proporcione uma direta conexão e relação com o equivalente certo associado a este.

O trade-off entre risco e retorno é outro interessante aspecto a ser explorado sobre as diferentes óticas que esta medida pode proporcionar. Muitos trabalhos foram realizados para se testar e discutir os efeitos da inserção do CVaR, VaR e outras medidas em problemas similares ao de Markowitz [24][25][44], como por exemplo, [22] e outros. Contudo a própria definição de como medir o risco é algo bastante subjetivo. Por exemplo, um esquema de risco-retorno poderia ser analisado utilizando-se um binômio valor esperado versus a diferença entre o próprio valor esperado e o CVaR dos retornos. Neste caso o risco seria medido através da distância entre o valor esperado e o *proxy* de “pior resultado” da distribuição, o CVaR da cauda esquerda.

O estudo de equilíbrios de leilões de energia, desenho de mercados, impactos regulatórios são outros nichos com bastante espaço para estudos futuros relacionados aos resultados obtidos nesta tese. O uso do equivalente certo como funcional de preferência e as conseqüentes interpretações devidas às conexões entre este e o CVaR (ou outras medidas de risco) pode resultar em interessantes resultados, principalmente em casos de funcionais que capturam ordenações diferentes das obtidas pelas funções utilidades clássicas.

Além de todas as possíveis aplicações em teoria de portfolio e decisão sobre incerteza existe um classe muito interessante de problemas de repartição de benefício que decorre da propriedade de super-aditividade do CVaR. Como exemplo, pode-se mencionar problemas de fusão e aquisição de empresas ou cotas de fundos, distribuição de lucros entre setores de uma empresa globalmente otimizada, repartição de energia e potência firme em sistemas elétricos e muitos outros.

Finalmente, a interpretação de função de penalidade que o CVaR pode oferecer, que no contexto deste trabalho foi associada a uma função utilidade, em problemas de operação ótima de sistemas elétricos [36], geralmente resolvidos por técnicas de decomposição como SDDP [37], pode proporcionar interessantes resultados e interpretações sobre a construção das funções de custo de déficit.

8

Referências bibliográficas

- [1] A.C.G. Melo, M.S. Reis, B.G. Gorenstin, A.M. Oliveira, M.E. Maceira, “Risk Analysis in the Electrical Sector Investment Projects”. SEPOPE, Salvador, 1998.
- [2] A. Street, L.A. Barroso, S.Granville, M. Pereira, “Estratégias de Atuação de Agentes Geradores sob Incerteza em Leilões de Contratos de Energia Elétrica”, SNPTEE 2005 - XVIII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Curitiba, Brasil, 2005.
- [3] A. Street, “Estratégia de Oferta de Geradoras em Leilões de Contratação de Energia Elétrica”. Rio de Janeiro, 2004, 174p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).
- [4] A.K.Dixit and R.S.Pindyck, “Investment Under Uncertainty”, Princeton University Press, 1994.
- [5] Acerbi, C., “Coherent measures of risk in everyday market practice”, *Quantitative Finance*, Vol. 7, No. 4, 359–364, August 2007.
- [6] Acerbi, C. and Tasche, D., Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Econ. Notes*, 2002b, 31(2), 379–388.
- [7] A. Ben-Tal, M. Teboulle, “Expected Utility, Penalty Functions, and Duality in Stochastic Nonlinear Programming”, *Management Science*, Vol. 32, No. 11., pp.1445-1466, Nov., 1986.
- [8] Ben-Tal, A. and A. Ben-Israel, "A Recourse Certainty Equivalent for Decisions Under Uncertainty", *Annals of Operation Research* 31, 1991
- [9] Andrzej Ruszczyński & Alexander Shapiro, "Optimization of Measures," *Risk and Insurance* 0407002, EconWPA, 2004.
- [10] Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance* 9 no. 3, 203-228, 1999.

- [11] Eichhorn, A. and Römisch, W. 2005. “Polyhedral Risk Measures in Stochastic Programming”. *SIAM J. on Optimization* 16, 1 (May. 2005), 69-95. DOI= <http://dx.doi.org/10.1137/040605217>.
- [12] B.G.Gorenstin, N.M.Campodónico, J.P.Costa, M.V.F.Pereira, “Power System Planning Under Uncertainty”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 8, No.1, Feb. 1993.
- [13] B.G.Gorenstin, N.M.Campodónico, J.P.Costa, M.V.F.Pereira, “Stochastic Optimization of a Hydro-thermal System Including Network Constraints”, *IEEE Trans. on PAS*, Vol. 7, No. 2, May 1992.
- [14] B.Mo, A.Gjelsvik, A.Grundt, “Integrated Risk Management of Hydro Power Scheduling and Contract Management”, presented at the 1999 IEEE Winter Power Meeting.
- [15] C.Alexander, *Risk Management and Analysis – Measuring and Modelling Financial Risk*, Wiley, 1998.
- [16] Castro, L. I., Faro, J. H., “Introdução à Teoria da Escolha”, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (www.impa.br) 2005.
- [17] D.Luemberger, *Investment Science*, Oxford, 1998.
- [18] Dekrajangpetch, S. e G. B. Sheble, “Structures and formulations for electric power auctions”. *Electric Power Systems Research* 54, 159-167, 2000.
- [19] Domingues, E. G. et al. “Applying modern portfolio theory to investment projects in electric energy markets”, *IEEE Porto Power Tech Conference*, 2001.
- [20] F.Porrúa, G.Schuch, L.A.Barroso, A.Street, M.Junqueira, “Assessment of Transmission Congestion Price Risk and Hedging In The Brazilian Electricity Market”, *Cigré-IEEE International Symposium on congestion management*, San Antonio, USA, 2005.
- [21] G. Anders, R. Entriken, P. Nitu, “Risk Assessment and Financial Management”, *IEEE Tutorial, Winter Meeting*, 1999.

- [22] G.J. Alexander and A.M. Baptista. “A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model”. *Management Science* (forthcoming), 2003.
- [23] H. Bessembinder, M.L. Lemmon, “Equilibrium Pricing and Optimal Hedging in Electricity Forward Markets”, Draft, Goizueta Business School, Emory University, 1999.
- [24] H.M. Markowitz, “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 7, 1952.
- [25] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. New York: John Wiley & Sons, 1959.
- [26] Föllmer, A. Schied, “Stochastic finance: an introduction in discrete time. (De Gruyter Studies in Mathematics)” 27 Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002, IX+422 pages, Hardcover. ISBN 3-11-017119-8.
- [27] J. Birge, F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, 1997.
- [28] J. Hagle, S. Wallace, “Managing Risk in the new power business: a sequel”, *IEEE Computer Applications in Power*, 2001.
- [29] Jorion, P. (1997) *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill.
- [30] L.A. Barroso, J. Trinkenreich, S. Granville, P. Lino, M.V. Pereira, “Avaliação de estratégias de redução de risco hidrológico para empresas com portfólios predominantemente hidroelétricos” – XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [31] L.A. Barroso, A. Street, S. Granville, M. Pereira, “Market models & monitoring: assessing new techniques for long-term PPA auctions to support long-run policy decisions in Brazil”, 2005 IEEE General Meeting, San Francisco, USA.
- [32] Mark. J. Machina, “Generalized Expected Utility Analysis and the Nature of Observed Violations of the Independence Axiom” in *Foundations of Utility and Risk Theory with Applications*, ed. by B. Stigum and F. Wenstøp, 1983 (<http://econ.ucsd.edu/~mmachina/>).

- [33] M.V.F. Pereira, et al., “Methods and Tools for Contracting in a Competitive Framework”, CIGRÉ Task Force 38-05-09, Dezembro 2000.
- [34] M.V.F. Pereira; M.F. McCoy; H.M. Meryll, Managing risk in the new power business, IEEE Computer Applications in Power, Volume: 13 , Issue: 2, April 2000, Pages:18-24.
- [35] M.V.Pereira, L.A.Barroso, J.Rosenblatt, “Supply Adequacy in the Brazilian Power Market”, Proceeding of the IEEE General Meeting 2004, Denver.
- [36] M.V.Pereira, N. Campodónico, R. Kelman, – Long term Hydro Scheduling based on Stochastic Models, EPSOM '98, Zurique, Setembro 1998.
- [37] M.V.Pereira, M.; L.M.Pinto – Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning, Mathematical Programming, Vol 52, 359-375, 1991
- [38] Câmara de Comercialização de Energia Elétrica - CCEE (www.ccee.org.br).
- [39] P.Boyle, M.Broadie, P. Glasserman, “Monte Carlo Methods for Security Pricing”, Journal of Economic Dynamics and Control, 1977.
- [40] P. Jorion, Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, 1997.
- [41] P. A. M-S. David, “Formação do Preço, Atração de Investimentos e Gerenciamento de Risco no Mercado Brasileiro de Energia Elétrica” Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.
- [42] P. A. M-S. David, L.A.Barroso, S.Granville, A.V.Filho “Contratação e aversão a risco no despacho competitivo da geração” - XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [43] Lino, P. (2001). "Operação Descentralizada de Sistemas Hidrotérmicos em Ambiente de Mercado." MSc Thesis, IM/NCE-UFRJ.
- [44] R.Dembo, “Mark to Future: A consistent Firm-Wide Paradigm for Measuring Risk and Return”, in Risk Management and Analysis, Volume 1: Measuring and Modelling Financial Risk, John Wiley&Sons, 1998.

- [45] R.Kelman – Esquemas competitivos em sistemas hidrotérmicos: eficiência econômica e comportamento estratégico de geradores em ambiente de mercado – COPPE-UFRJ, Maio 1999.
- [46] Regras e Procedimentos de Mercado – disponível em <http://www.ccee.org.br>.
- [47] Regras Algébricas do Mercado Atacadista de Energia 3.5, capítulo 7: Mecanismo de Realocação de Energia – disponível em <http://www.ccee.org.br>.
- [48] R.T. Rockafellar and S.P. Uryasev, “Optimization of conditional value-at-risk”, *The Journal of Risk*, 2 (2000), 21-41.
- [49] S. Granville, G.C. Oliveira, L.M Thomé, N. Campodónico, M. Latorre, M.V.Pereira, e L.A. Barroso , “Stochastic optimization of transmission constrained and large scale Hydrothermal Systems in a Competitive Framework”, *Proceedings of the IEEE General Meeting*, Toronto, 2003.
- [50] S.Granville, R.Kelman,L.A.Barroso, R.Chabar, M.V. Pereira, P. Lino, P. Xavier, I. Capanema , “Um Sistema Integrado para Gerenciamento de Riscos em Mercados de Energia Elétrica”, XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [51] S.Fleten, S.Wallace, W.Ziemba, “Portfolio Management in a Deregulated Hydropower Based Electricity Market”, *Hydropower’97 Proceedings*, Trondheim, August 1997.
- [52] Silva, A.J. (2003). Leilões de certicado de energia elétrica: Maximo excedente versus maxima quantidade negociada. Dissertação de mestrado, Unicamp, Campinas - Brasil.
- [53] Stokey, N. and R. Lucas, with E. C. Prescott, “Recursive Methods in Economics Dynamics”. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1989.
- [54] T. Saaty, “Fundamentals of Decision Making”, RWS Publications, Pittsburg, 1994.
- [55] Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed-tenders. *Journal of Finance* 16, 8-37.

- [56] von Neumann, J.; Morgenstern, O. “Theory of Games and Economic Behaviour” Princeton Press, 1947; ISBN 0-691-00362-9.
- [57] W.V. Harlow, “Asset Allocation in a Downside-Risk Framework”, Financial Analysis Journal, 1991.
- [58] Web-site ANEEL: <http://www.aneel.gov.br>.
- [59] X.Vieira F., M.V.F. Pereira, B.G. Gorenstin, J.C.O. Mello, A.C.G. Melo, S. Granville, “Playing the Odds: Risk Management in Competitive Generation Contracts” Paper presented at the Paris CIGRÉ Conference, 199.

9

Anexo A: Formação de preços no mercado de curto prazo

Este capítulo discute o cálculo da produção de energia de cada gerador, hidrelétrico e térmico, ao longo do tempo, bem como do preço de curto prazo da energia em cada período. Estes valores são usados para calcular a renda líquida resultante da venda de energia no mercado de curto prazo. Inicialmente, será discutido o caso de sistemas compostos unicamente de usinas termelétricas. A seguir, a metodologia será estendida para o caso de sistemas hidrotérmicos.

9.1

Sistemas Puramente Térmicos

9.1.1

Despacho Econômico

Na maioria dos países, um Operador Independente do Sistema determina, a cada estágio, a produção de energia de cada usina geradora. O objetivo é atender a demanda de energia do estágio ao menor custo, o chamado despacho econômico. Em sistemas puramente térmicos, o despacho econômico, em sua versão mais simples, é formulado da seguinte maneira:

$$z = \text{Min} \sum_{j=1}^J c_j g_j \quad \text{Multiplicador} \quad (9-1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad \pi_d \quad (a)$$

$$g \leq \bar{g} \quad (b)$$

onde z , c_j , d , g_j e \bar{g} representam respectivamente o custo total de operação (valor a minimizar, em R\$); o custo variável de operação de cada gerador j (em R\$/MWh); a demanda do sistema (em MWh), a produção de energia elétrica (variável de

As restrições (9-1) (a) e (9-1) (b) representam respectivamente o atendimento da carga e os limites da capacidade de geração.

9.1.2

Solução do despacho econômico

O modelo de despacho (9-1) é um problema de programação linear (PL), que neste caso simplificado pode ser resolvido por inspeção, acionando os geradores em ordem crescente de custo variável, até que a geração total iguale a demanda. No caso mais geral onde se representa, por exemplo, a rede de transmissão, o PL pode ser resolvido por pacotes computacionais disponíveis no mercado.

9.1.3

Preço spot

O preço spot é, por definição, o custo de se atender a um incremento da demanda, ou seja, é a variação do custo de operação do sistema quando há um incremento de 1 MWh na demanda, dado pela derivada $\partial z/\partial d$ do problema (9-1). Da teoria de programação linear, sabe-se que esta derivada é dada pelo variável dual, π_d , associada à restrição de atendimento à demanda (9-1) (a).

Neste caso simplificado, o valor de π_d também pode ser obtido por inspeção. Como um aumento da demanda seria atendido pelo aumento da geração do último gerador acionado na ordem econômica de despacho, conhecido como gerador marginal. Conclui-se, portanto, que $\pi_d = c_j^*$, onde “*” identifica este último gerador.

9.1.4

Venda no mercado de curto prazo e renda líquida

Cada gerador j recebe do mercado de curto prazo, que no Brasil é administrado pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), um montante (R\$) correspondente ao produto do preço spot π (em R\$/MWh) por sua

produção de energia no despacho econômico, g_j (em MWh). Por sua vez, a demanda d desembolsa na CCEE um montante (R\$) dado por π . Como a produção total de energia é igual à demanda e há um único preço de compra e venda de energia, conclui-se imediatamente que o balanço financeiro na CCEE sempre “fecha”, isto é, o montante pago pela demanda é igual ao recebido pelos geradores.

Finalmente, a receita líquida de cada gerador pela venda de energia na CCEE é dada por $R_j = (\pi - c_j)g_j$

9.1.5

Exemplo

Os conceitos acima serão ilustrados para um parque gerador composto de três termelétricas, cujas características – capacidade instalada e custo operacional variável – estão especificadas na Tabela 9-1.

Tabela 9-1 – Características das Termelétricas

Nome	Cap. (MWh)	Custo oper. (\$/MWh)
G ₁	10	8
G ₂	5	12
G ₃	20	15

O despacho de mínimo custo para atender uma demanda de 20 MWh em uma etapa de uma hora é:

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = 5$$

$$G_3 = 5$$

O preço spot do sistema é \$15/MWh, que corresponde ao custo operacional da termelétrica marginal, G3. A renda líquida de cada gerador é:

$$RL_1 = (\pi_d - c_1)g_1 = (15 - 8)10 = 70$$

$$RL_2 = (15 - 10)5 = 25$$

$$RL_3 = (15 - 15)5 = 0$$

9.2

Sistemas Hidrotérmicos

9.2.1

Custos de oportunidade

À primeira vista, as usinas hidrelétricas seriam sempre acionadas primeiro no despacho econômico, pois seu custo variável de operação é muito pequeno¹⁶. Entretanto, o operador do sistema pode optar entre utilizar a água armazenada nos reservatórios para gerar hoje, ou deixá-la armazenada para uso futuro. Esta decisão depende do *custo de oportunidade* da geração hidrelétrica. Suponha, por exemplo, que o preço spot de hoje é 15 R\$/MWh. Isto significa que 1 MWh de geração hidrelétrica hoje “deslocará” 1 MWh do gerador marginal, economizando portanto R\$ 15. Suponha, entretanto, que o preço spot previsto para a próxima semana é maior, por exemplo, 20 R\$/MWh. Neste caso, vale a pena usar a água no futuro, pois haverá uma economia maior. Isto significa que o custo de oportunidade da geração hidrelétrica é 25 R\$/MWh. Para o despacho econômico, este custo de oportunidade tem todas as características de um custo “real”: por exemplo, seria preferível atender um aumento de demanda hoje com o gerador marginal a 15 R\$/MWh, do que acionar a hidrelétrica.

9.2.2

Árvore de decisões

O cálculo do custo de oportunidade da geração hidrelétrica é bastante complexo devido à incerteza das afluições futuras. Por exemplo, se a energia hidrelétrica for utilizada hoje, e ocorrer uma seca amanhã, pode ser necessário usar geração térmica mais cara no futuro, ou até mesmo interromper o fornecimento de energia elétrica (custo de oportunidade elevado). Se, por outro lado, os níveis dos reservatórios se mantiverem altos pelo uso mais intenso de geração térmica, e a afluição aumentar no futuro, os reservatórios poderão verter,

¹⁶ O custo variável direto de usina hidrelétrica é, basicamente, a soma do custo variável de O&M da usina, mais as taxas ambientais.

desperdiçando energia (custo de oportunidade baixo). Como ilustra a Figura 2-1, é necessário resolver uma “árvore de decisão” e quantificar os efeitos de todas as possíveis decisões, escolhendo a que, em média, leva aos melhores resultados.

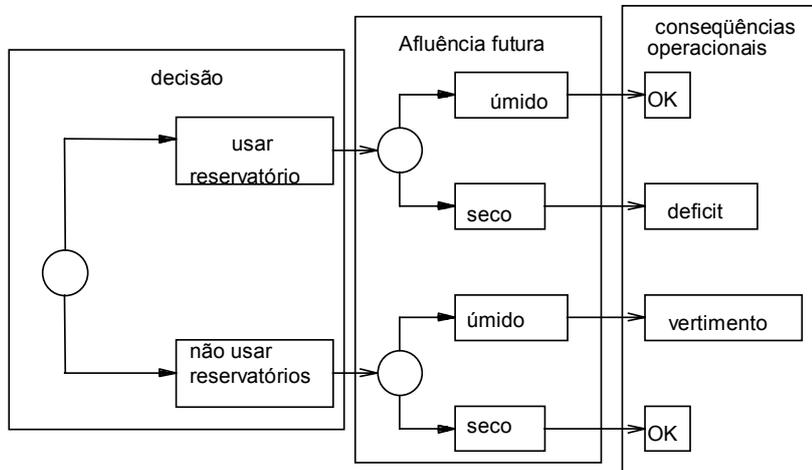


Figura 9-1 – Processo Decisório em Sistemas Hidrotérmicos

9.2.3

Custos Operacionais Imediatos e Futuros

Na prática, a busca pela melhor decisão operativa é baseada na composição dos custos operacionais *imediato* e *futuro*, como ilustrado na Figura 2-2.

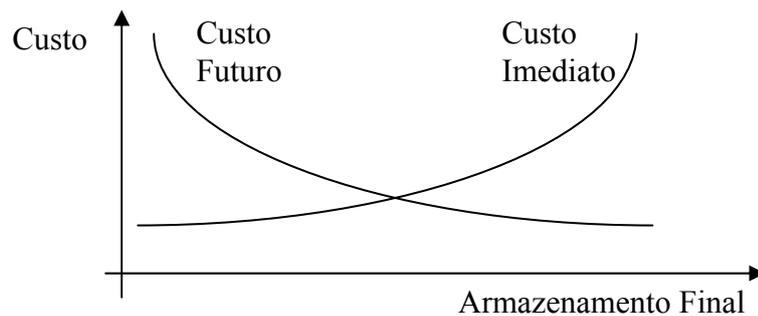


Figura 9-2 – Custos Imediatos e Futuros contra Armazenamento Final

A função de custo imediato – FCI – está relacionada aos custos de geração térmica no estágio t . À medida que o armazenamento final aumenta, um menor volume de água estará disponível para produção de energia nesta etapa. Como resultado, há necessidade de maior geração térmica para atender a demanda, e o custo imediato sobe. Por sua vez, a função de custo futuro – FCF – está associada

às despesas esperadas de geração térmica da etapa $t + 1$ até o final do período de planejamento. Podemos observar que a FCF diminui com o armazenamento final, à medida que um maior volume de água é disponibilizado para uso futuro.

A FCF é calculada simulando-se a operação do sistema no futuro para diferentes níveis de armazenamento inicial e calculando-se os custos operacionais. O horizonte de simulação depende da capacidade de armazenamento do sistema. Se a capacidade for relativamente pequena, como nos sistemas espanhol e norueguês, o impacto de uma decisão é diluído em vários meses. Se a capacidade for significativa, como no sistema brasileiro, o horizonte de simulação pode chegar a cinco anos.

Como visto, esta simulação torna-se mais complexa pela variabilidade da vazão afluente aos reservatórios, cujos níveis flutuam sazonalmente, regionalmente e de ano para ano. Como consequência, o cálculo da FCF deve ser feito de maneira *probabilística*, isto é, utilizando um grande número de cenários hidrológicos, como mostra a Figura 2-3.

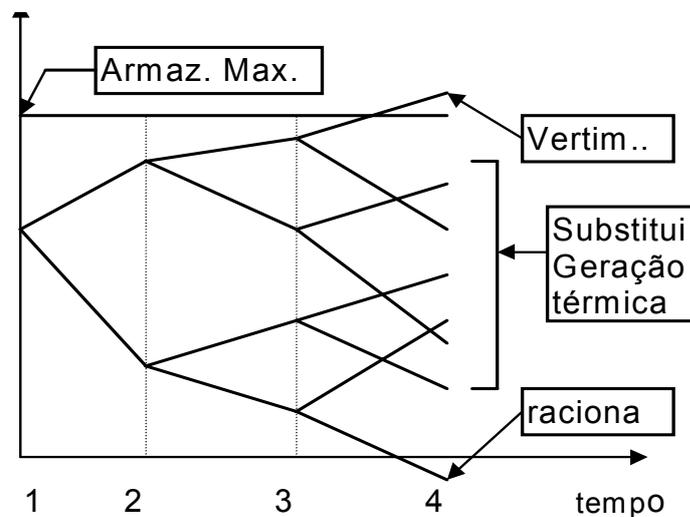


Figura 9-3 – Cálculo da FCF

9.2.4

Valor da água

O uso ótimo da água armazenada corresponde ao ponto que minimiza a soma dos custos imediato e futuro. Como mostra a Figura 2.4, este também é o ponto em que as derivadas de ICF e FCF se igualam em módulo. Estas derivadas são conhecidas como *valores da água*.

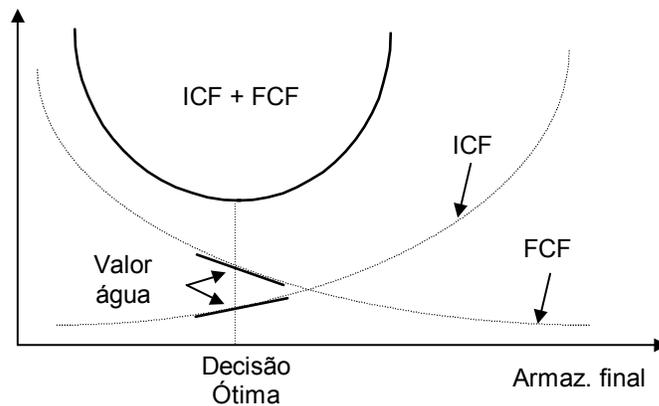


Figura 9-4 – Programação Hidrelétrica Ótima.

9.2.5

Formulação do Despacho Hidrotérmico para uma Etapa

Apresenta-se, a seguir, a formulação do despacho hidrotérmico para um determinado estágio t , supondo que foi calculada a função de custo futuro (o cálculo desta FCF será discutido mais adiante).

- a) Função Objetivo** – Como visto, o objetivo é minimizar a soma dos custos imediato e futuro:

$$z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^J c_j g_{tj} + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \quad (9-2)$$

O custo imediato em (2.4) é dado pelos custos operacionais térmicos na etapa t , $\sum c_j g_{tj}$. Por sua vez, o custo futuro é representado pela função $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$, onde v_{t+1} é o vetor dos níveis de armazenamento do reservatório ao final da etapa t

(início da etapa $t+1$). As restrições operacionais nesta etapa são discutidas a seguir.

b) Balanço Hídrico – Como ilustrado na Figura 9-5, a equação de balanço hídrico relaciona o armazenamento e os volumes de entrada e saída do reservatório: o volume final no estágio t (início do estágio $t+1$) é igual ao volume inicial menos os volumes de saída (turbinamento e vertimento) mais os volumes de entrada (afluência lateral mais os volumes de saída das usinas a montante).

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) + \sum_{m \in U(i)} [u_t(m) + s_t(m)] \quad (9-3)$$

para $i = 1, \dots, I$

onde:

- i índice das hidrelétricas (I número de hidrelétricas)
- $v_{t+1}(i)$ volume armazenado na usina i ao final do estágio t (variável de decisão)
- $v_t(i)$ volume armazenado na usina i no início do estágio t (valor conhecido)
- $a_t(i)$ afluência lateral que chega na usina i na etapa t (valor conhecido)
- $u_t(i)$ volume turbinado durante a etapa t (variável de decisão)
- $s_t(i)$ volume vertido na usina i durante a etapa t (variável de decisão)
- $m \in U(i)$ conjunto de usinas imediatamente a montante da usina i

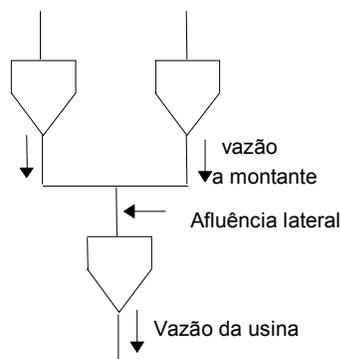


Figura 9-5 – Balanço hídrico do reservatório

c) Limites de Armazenamento e Turbinamento

$$v_t(i) \leq \bar{v}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (9-4)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (9-5)$$

onde $\bar{v}(i)$ e $\bar{u}(i)$ são respectivamente o armazenamento máximo e a capacidade das turbinas.

d) Limites de Geração Térmica

São os mesmos do despacho térmico, vistos no início deste capítulo.

$$g_{tj} \leq \bar{g}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (9-6)$$

e) Atendimento à Demanda

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) u_t(i) + \sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad (9-7)$$

onde $\rho(i)$ é o coeficiente de produção da usina i (MWh/hm³) (valor conhecido).

9.2.6**Solução do Problema e Custos Marginais**

O problema (9-2)-(9-7) é em geral resolvido por um algoritmo de programação linear (PL). Assim como no caso térmico, o preço spot é o multiplicador associado à equação de atendimento da demanda (2.9). Por sua vez, o valor da água de cada hidrelétrica é o multiplicador associado à equação de balanço hídrico (9-3).

9.2.7**Exemplo**

Suponha que ao sistema térmico do exemplo anterior (ver seção 9.1.5) foi adicionada uma hidrelétrica, cujas características são especificadas na Tabela 9.1.

Tabela 9-2 – Características da Hidrelétrica

Nome	cap. (MW)	Coef. Prod. (MWh/m ³)
H ₁	15	2

Suponha também que a FCF da hidrelétrica, $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$, é dada pela expressão linear $-28v_{t+1} + 4000$, ilustrado na Figura 9-6.

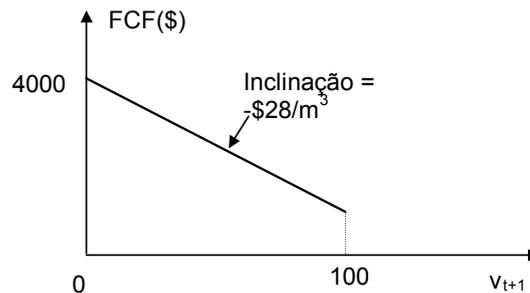


Figura 9-6 – Função de Custo Futuro.

Como visto, a FCF informa ao operador que o custo de oportunidade futuro de 1 m³ de água é R\$ 28. Portanto, só vale a pena utilizar esta água hoje se o benefício imediato (redução de custo operativo) exceder este valor. Como este m³ pode ser utilizado para produzir $\rho \times 1 = 2$ MWh agora, conclui-se que só vale a pena utilizar a hidrelétrica se as alternativas térmicas custarem mais de $28/2 = 14$ R\$/MWh. Em outras palavras, a energia hidrelétrica é, por um lado, mais “cara” que as térmicas 1 e 2, que custam respectivamente 8 e 12 R\$/MWh; e, por outro, mais “barata” que a térmica 3, que custa 15 R\$/MWh.

A ordem de acionamento dos geradores no despacho econômico hidrotérmico seria portanto (T₁, T₂, H₁, T₃), e a produção de energia resultante, como mostrado na Tabela 9.3:

Tabela 9-3 – Despacho Ótimo – Sistema Hidrotérmico.

Unidade	Custo (\$/MWh)	Ger. (MWh)
T ₁	8	10
T ₂	12	5
H ₁	14	5
T ₃	15	0
total		20

O preço spot do sistema, como sempre, reflete o custo da usina marginal, que no caso é a usina hidrelétrica. Portanto, o preço spot do sistema é o custo de oportunidade da hidrelétrica, 14 R\$/MWh. Este preço spot é usado de maneira idêntica ao apresentado no exemplo térmico para calcular a remuneração dos geradores e pagamentos da demanda na CCEE:

$$RL_1 = (\pi - c_1)g_1 = (14 - 8)10 = 60$$

$$RL_2 = (14 - 10)5 = 20$$

$$RL_H = (14 - 0)5 = 70$$

$$RL_3 = (14 - 15)0 = 0$$

9.3

Cálculo da Função de Custo Futuro

Como visto, as decisões operativas de um sistema hidrotérmico se baseiam no equilíbrio entre o custo de oportunidade hoje e seu valor esperado futuro, representado pela FCF, $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$. Esta função é calculada através de um procedimento recursivo chamado programação dinâmica estocástica dual (PDDE) [29,30], apresentado a seguir:

- a) para cada estágio t (tipicamente um mês) define-se um conjunto de *estados do sistema*, por exemplo, níveis de armazenamento 100%, 90% etc. até 0%. A Figura 9-7 ilustra a definição dos estados para um reservatório. Supõe-se conhecido o armazenamento inicial do primeiro estágio.

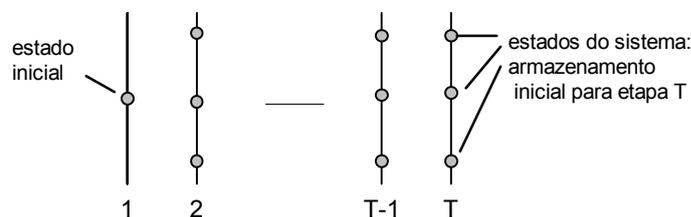


Figura 9-7 – Definição dos Estados do Sistema.

- b) iniciar no *último* estágio, T , e resolver o problema de despacho de um estágio supondo que o armazenamento inicial corresponde ao primeiro nível selecionado no passo (a) - por exemplo, 100%. Dado que se está no último estágio, supõe-se que a FCF é igual a zero. Resolva o problema de despacho

para cada um dos N cenários de vazões para o estágio. O esquema está ilustrado na Figura 9-8.

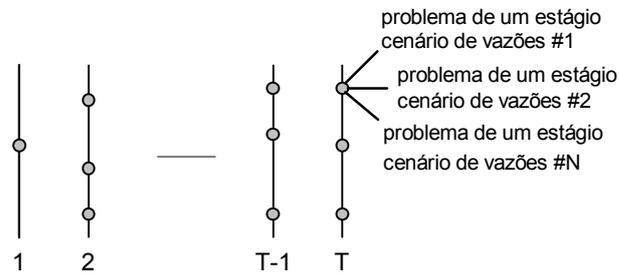


Figura 9-8 – Cálculo da Decisão Ótima por Cenário - Último Estágio

- c) Calcular o valor esperado do custo operativo associado ao nível 100% como a média dos custos dos N subproblemas de um estágio. Com isto se obtém o primeiro ponto da FCF para o estágio $T-1$, i.e. $\alpha_T(v_T)$. Observe que a *tangente* da FCF em torno deste ponto corresponde ao valor da água esperado (como mencionado na item 9.2.4, o valor da água é obtido do multiplicador simplex da equação de balanço hídrico). O procedimento está ilustrado na Figura 9-9.

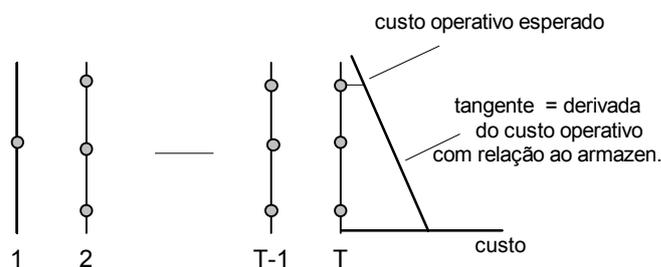


Figura 9-9 – Cálculo do primeiro segmento da FCF

- d) Repetir o cálculo do custo operativo e das tangentes da superfície de custo futuro para cada estado de armazenamento no estágio T . O resultado final é uma superfície linear por partes, que representa a FCF $\alpha_T(v_T)$ para o estágio $T-1$, como mostrado na Figura 9-10.

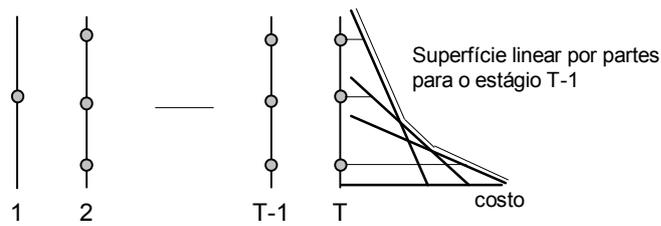


Figura 9-10 – FCF Linear por partes para o Estágio T-1

- e) Repetir o processo para todos os estados de armazenamento selecionados nos estágios T-1, T-2 etc. como mostrado na Figura 9-11. Observe que o objetivo agora é minimizar o custo operativo imediato no estágio T-1 mais o custo futuro esperado, dado pela função linear por partes calculada no passo anterior.

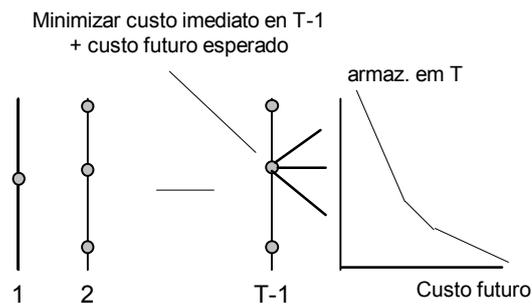


Figura 9-11 – Cálculo do custo operativo para o estágio T-1 e FCF para T-2.

O resultado final do esquema PDE (a)-(e) é um conjunto de FCFs $\{\alpha_{t+1}(v_{t+1})\}$ para todos os estágios $t = 1, \dots, T$. Observe que o cálculo desta função requer a representação da operação conjunta do sistema, com o conhecimento completo dos estados de armazenamento de todas as usinas do sistema. Em outras palavras, o valor da água de uma usina hidrelétrica é uma função não-separável do estado das demais usinas do sistema.

9.4

Mecanismo de Realocação de Energia (MRE)

A predominância absoluta do parque gerador hidroelétrico, com a conseqüente volatilidade dos preços da energia e necessidade de forte cooperação entre empresas que, em princípio, deveriam estar competindo entre si (empresas distintas com reservatórios na mesma cascata), levaram ao estabelecimento do Mecanismo de Realocação de Energia (MRE) [47]. Os objetivos deste mecanismo são mitigar o risco das usinas hidroelétricas contra períodos secos prolongados e administrar convenientemente o problema das usinas em cascata.

O MRE consiste essencialmente na atribuição a cada usina participante de um valor de referência, denominado Energia Assegurada, e na repartição da maior parte da produção do conjunto de usinas participantes entre as mesmas proporcionalmente às suas Energias Asseguradas. Desta forma, a energia alocada a cada usina participante do MRE, para efeitos da CCEE, não é a sua produção física, e sim, uma parcela do rateio da produção de todas as usinas pertencentes ao MRE, denominada de *crédito de energia*. O detalhamento completo das regras do MRE pode ser encontrado em [46][47].

9.5

MRE: Motivação

9.5.1

Riscos Hidrológicos de Usinas Hidrelétricas Riscos Hidrológicos de Usinas Hidrelétricas

Os contratos bilaterais entre empresas no Setor Elétrico Brasileiro constituem apenas instrumentos financeiros. Isto significa que a produção física das usinas é completamente desvinculada dos contratos firmados por seus proprietários.

Como discutido no decorrer desta tese, no caso de usinas térmicas, os contratos bilaterais permitem gerenciar adequadamente a volatilidade: se o preço “spot” é reduzido, a usina não é despachada e atende seu contrato através da

compra de energia no mercado “spot”, evitando assim os custos de produção; se o preço “spot” é elevado, a usina é despachada e atende seu contrato através de geração própria, evitando assim compras onerosas de energia.

No caso de usinas hidrelétricas, entretanto, a contratação não é suficiente para reduzir os riscos a um nível adequado. Devido à predominância da produção hidroelétrica no sistema brasileiro, os preços “spot” são mais elevados em situações de seca, quando as hidroelétricas necessitam comprar energia para cumprir seus contratos. Como consequência, a hidroelétrica contratada corre riscos em ambos os extremos: se estiver pouco contratada, está exposta a preços baixos no “spot”; e se estiver muito contratada, está exposta ao risco de ser obrigada a comprar energia a preços elevados. Este risco é conhecido como “risco hidrológico”. Em particular, no caso de racionamento de energia, as hidroelétricas teriam que pagar o equivalente à diferença entre a energia contratada e produzida multiplicada pelo custo de racionamento.

9.5.2

Eficiência Econômica da remuneração “spot”

A implementação do esquema “spot” em sistemas hidrotérmicos não deveria apresentar dificuldades conceituais: uma vez calculado o despacho ótimo do sistema, no balanço de pagamentos no mercado “spot” cada agente receberia (pagaria) o produto do preço “spot” e sua produção (consumo) de energia. Uma das justificativas básicas para a implantação de um esquema de pagamento “spot” é a eficiência de seus sinais econômicos. Mostra-se em [45] que, sob condições de concorrência perfeita, a expansão descentralizada do sistema, onde os agentes tentam maximizar seu lucro, coincide com a expansão centralizada do sistema, onde um agente central (o planejador) procura encontrar a solução de mínimo custo total.

Entretanto, conforme mostrado em [45], o mecanismo de remuneração “spot” só fornece sinais econômicos corretos quando as usinas hidroelétricas estão isoladas ou quando todas as usinas de uma mesma cascata pertencem a uma única empresa. Num caso extremo podemos imaginar um sistema composto de um reservatório “puro”, isto é, sem geração associada, a montante de usinas a fio d’água. Este reservatório é obviamente benéfico para o sistema, pois regula a

vazão afluyente às usinas e, portanto, aumenta sua capacidade de produção firme de energia. Entretanto, dado que o esquema “spot” remunera somente a *energia* gerada, o reservatório não seria remunerado, enquanto as usinas a jusante ficariam com toda a renda. Isto indica que há uma distorção na alocação dos benefícios econômicos aos agentes.

É importante observar que esta distorção ocorre mesmo se as usinas com reservatório têm capacidade de turbinamento, isto é, estamos discutindo um efeito *geral* para as usinas em cascata, não um caso particular para reservatórios sem máquina. A compensação pelo serviço de regularização prestado pelos reservatórios numa cascata é essencial para corrigir os sinais econômicos. Conforme discutido em [45][43], esta distorção pode ser corrigida através da criação de um mercado “spot” de água, que tem com relação à compra a venda deste recurso uma função análoga à do mercado “spot” de energia, e permite remunerar estes serviço de maneira a restabelecer a eficiência econômica.

9.6

O Mecanismo de Realocação de Energia

O Mecanismo de Realocação de Energia apresenta uma proposta de solução para os dois tópicos anteriores.

O MRE é um mecanismo de “hedging” compulsório entre as usinas hidrelétricas que compõe o sistema. No contexto do MRE, cada usina hidroelétrica recebe a cada período um *crédito de energia* (MWh) proporcional à produção hidroelétrica *total* (soma da produção de todas as usinas hidroelétricas) nesta mesma etapa. O fator de proporção é dado pela razão entre o *certificado de energia assegurada* da hidroelétrica e a soma dos certificados de todas as usinas participantes do MRE. Este crédito de energia, e não a energia produzida fisicamente pela mesma, é então utilizado para atender o contrato da usina.

Como a produção *total* de energia hidroelétrica (e portanto o crédito de energia) é muito mais constante que a produção individual das usinas

hidroelétricas, conclui-se que o MRE é um esquema eficiente de redução da volatilidade e risco hidrológico¹⁷.

Por outro lado, o MRE procura corrigir a distorção econômica da remuneração “spot” das hidroelétricas através de uma representação *implícita* do mercado “spot” de água. A razão é que este esquema de compensação se baseia na observação de que se todas as usinas numa cascata pertencem ao mesmo agente, a renda “spot” total da cascata (soma dos pagamentos “spot” a todas as usinas da cascata) está correta. Portanto, pode-se interpretar o MRE como uma empresa *fictícia* chamada “Mecanismo de Realocação de Energia” cujos “acionistas” são as usinas da cascata. As “ações” da “empresa” MRE são os *Certificados de Energia Assegurada (CEA)* e tudo funciona como se a “empresa” MRE recebesse o pagamento “spot” total e o distribuísse entre seus acionistas como “lucros”, em proporção às ações que cada um possui, e não à produção individual. Com isto, um reservatório puro, por exemplo, é remunerado com base no seu *Certificados de Energia Assegurada* e não com base na sua produção individual (que é nula).

Portanto, conclui-se que o MRE atinge os dois objetivos a que se propõe. Finalmente, o valor do CEA de cada usina (i.e. a quantidade de MWs) é determinado pela ANEEL e pode ser revisto a cada 5 anos. Em cada revisão, o mesmo não pode ser alterado em mais (menos) de 5% e o limite para sua alteração total ao longo de toda a concessão do empreendimento é 10%.

9.7

Exemplo de Aplicação do MRE

Como visto anteriormente, no esquema MRE, a geração total da cascata a cada hora é alocada entre as usinas na proporção de seus CEAs. O pagamento “spot” se aplica então à energia alocada a cada usina, e não à produzida fisicamente pela mesma. Em outras palavras, tudo funciona como se a “empresa” MRE recebesse o pagamento “spot” total e o distribuísse entre seus acionistas como “lucros”, em proporção às ações que cada um possui.

¹⁷Entretanto, conforme discutido em [42], o MRE não mitiga o risco hidrológico global: se a produção total de energia das UHEs for inferior à soma das seus certificados de energias asseguradas, os créditos do MRE distribuídos às UHEs serão inferiores às seus certificados de energias asseguradas.

9.7.1

Sistema Exemplo

Os conceitos apresentados acima serão ilustrados através de um exemplo com dois geradores térmicos, três hidroelétricas e duas demandas, com as seguintes características:

Tabela 9-4 – Geradores

Nome	Cap. (MW)
H ₁	20
H ₂	50
H ₃	30
T ₁	10
T ₂	20

Tabela 9-5 – Demandas

Nome	Carga (MWh)
D _A	50
D _B	30

9.7.2

Despacho Ótimo

Suponhamos que o despacho ótimo para uma dada etapa (1 hora) é o apresentado a seguir:

Tabela 9-6 – Despacho Ótimo

gerador	Produção (MWh)
H ₁	5
H ₂	40
H ₃	25
T ₁	10
T ₂	0

9.7.3

Balanço de Pagamentos no mercado “spot” - sem MRE

No balanço de pagamentos no mercado “spot”, os geradores recebem o produto de sua geração física (MWh) pelo preço “spot” (\$/MWh). Por sua vez, as demandas pagam o produto de seu consumo (MWh) pelo preço “spot”. A Tabela 9-7 apresenta o balanço no mercado “spot” para o caso exemplo, supondo um preço “spot” de \$10/MWh.

Tabela 9-7 – Balanço no mercado “spot” - Geração - sem MRE

Agente	Geração	Remuneração
	(MWh)	(\$)
H ₁	5	50
H ₂	40	400
H ₃	25	250
subtotal H		700
T ₁	10	100
T ₂	0	0
subtotal T		100
total geração		800

Tabela 9-8 – Balanço no mercado “spot” – Demanda

Demanda	Consumo	Pagamento
	(MWh)	(\$)
D _A	-50	-500
D _B	-30	-300
Total		-800

9.7.4

Aplicando o Mecanismo de Realocação de Energia (MRE)

Como mencionado anteriormente, cada agente hidro possui uma quantidade de “cotas” numericamente igual a seu CEA. A Tabela 9-9 apresenta os CEAS associados a cada usina no exemplo.

Tabela 9-9 – CEAs e Cotas da “Empresa” MRE

agente	CEA (MW)	cota (p.u.)
H ₁	10	0.2
H ₂	25	0.5
H ₃	15	0.3
total	50	1.0

Também como mencionado, o procedimento MRE transforma a geração física $\{H_1, H_2, H_3\}$ de cada usina (MWh) em *créditos de geração* $\{E_1, E_2, E_3\}$ (também em MWh). Estes créditos são calculados como o produto da participação da usina na “empresa” (em p.u.) pela geração hidrelétrica *total*. No exemplo acima, a geração hidrelétrica total (soma das gerações das três usinas hidrelétricas) é 70 MWh. Os créditos são, portanto:

Tabela 9-10 – Créditos de Geração das Hidrelétricas

agente	Geração física (MWh)	cota (p.u.)	Crédito de geração (MWh)
1	H ₁ = 5	0.2	$E_1 = 0.2 \times 70 = 14$
2	H ₂ = 40	0.5	$E_2 = 0.5 \times 70 = 35$
3	H ₃ = 25	0.3	$E_3 = 0.3 \times 70 = 21$
total	70	1.0	70

9.7.5

Balanco de Pagamentos no mercado “spot” - com MRE

A única diferença no balanço do mercado “spot” com MRE é que os geradores hidrelétricos recebem o produto de seu crédito de geração (MWh) pelo preço “spot” (\$/MWh). Todos os demais elementos (remuneração das térmicas, das demandas, total dos geradores etc.) permanecem idênticos. Em outras

palavras, o MRE é um ajuste *interno* ao conjunto de geradores hidrelétricos, e não tem efeito nos demais agentes. A Tabela 9-11 ilustra este pagamento.

Tabela 9-11 – Balanço no mercado “spot” - Geradores Hidrelétricos - com MRE

Agente	Geração (MWh)	Remuneração (\$)
E ₁	14	140
E ₂	35	350
E ₃	21	210
subtotal H	70	700

Finalmente, observa-se que, como o crédito de energia de uma usina é fração da produção total do “sistema MRE”, os créditos podem ser localizados em regiões (sub-mercados) distintos ao de origem da usina, uma vez que o “sistema MRE” está localizado em diferentes regiões e bacias. Esta possibilidade não foi considerada no exemplo anterior e o conjunto de regras que a define pode ser encontrado em [46][47]¹⁸. Quando há diferenças de preços entre as regiões onde o crédito da usina está alocada, existe um “surplus” da transmissão (soma dos pagamentos das demandas excede a receita dos geradores). Este “surplus” é alocado aos agentes MRE com o objetivo de reduzir a exposição por alocação em diferente submercado.

¹⁸ Conforme discutido em [46][47], um crédito de uma UHE alocado em um submercado diferente daquele em que ela se situa gera uma despesa adicional devida à diferença entre o preços dos submercados em pauta. É claro que teoricamente esta realocação poderia gerar lucro para a UHE afetada se o preço do MAE da região onde ela recebeu o crédito fosse maior que a da região de origem, mas o que acontece normalmente é o contrário, pois as regiões de alto preço do MAE são aquelas onde se observam piores condições hidrológicas e onde é mais difícil a alocação de créditos.

9.8

Vantagens e Limitações do MRE

O MRE apresenta vários aspectos atraentes:

1. Desvincula a produção física da usina do seu crédito de geração. Isto permite que o Operador do Sistema despache os recursos hidroelétricos do sistema de maneira ótima global (por exemplo: mantendo um grande reservatório cheio por vários meses, com geração reduzida, para aumentar a segurança futura do sistema) sem afetar o fluxo de caixa do proprietário.
2. O crédito de geração de cada usina, por ser proporcional à geração hidrelétrica total na cascata, apresenta menos variabilidade que a geração individual da mesma. Em outras palavras, há menos risco do crédito de geração ser inferior ao contrato, o que evita a compra de energia no “spot”.
3. Os investidores em usinas hidrelétricas na realidade não estão comprando ativos físicos, mas “cotas” de uma “empresa” fictícia. Isto torna possível vender as usinas hidroelétricas como simples “papéis” financeiros, isto é, não é necessário dividir as empresas por bacia, etc. para sua venda.

Uma possível desvantagem do MRE seria o desincentivo que o proprietário teria para operar e manter em boas condições sua usina. Prevê-se no marco regulatório a aplicação de multas por não manter um nível adequado de disponibilidade dos equipamentos, que seriam inspecionados periodicamente.

10

Anexo B: Contratos de compra e venda de energia

Este capítulo discute a segunda parcela de renda de um gerador, que é a venda de contratos de energia.

10.1

Volatilidade dos preços spot

O conjunto de preços spot $\{\pi_{ts}\}$ apresenta flutuações, ou volatilidade, tanto ao longo do tempo, para um mesmo cenário s , como ao longo dos cenários, para um mesmo estágio t .

Como exemplo de flutuações ao longo do tempo, a Figura 10-1 mostra o preço “spot” no sistema Sul-Sudeste brasileiro de janeiro de 1993 a agosto de 1997 (em US\$/MWh).

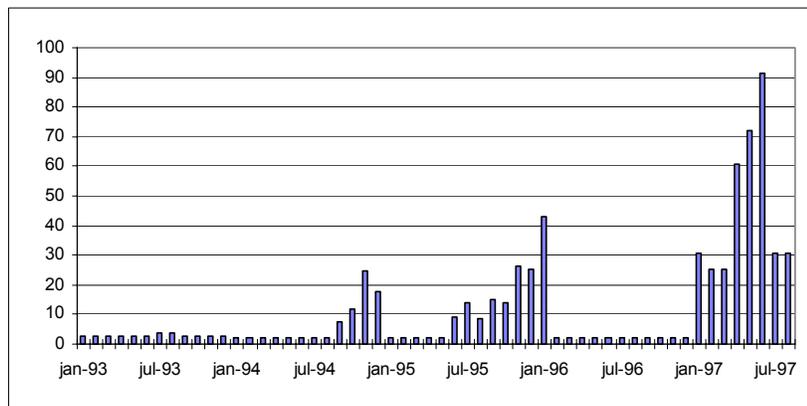


Figura 10-1 – Sistema Brasileiro – Custo marginal de curto prazo.

Vê-se na figura que o preço “spot” do sistema estava próximo de zero em 36 dos 56 meses observados. Também se pode notar que houve um período de quase dois anos (21 meses) onde os preços se mantiveram muito baixos.

Como exemplo de flutuações ao longo dos cenários, a Figura 10-2 mostra a distribuição de frequência prevista do preço “spot” no sistema sul brasileiro, calculadas por um modelo de despacho hidrotérmico (em R\$/MWh). Cinquenta e

um dos 64 cenários hídricos mostram preços abaixo da média. Dentre estes, 26 cenários têm preço “spot” igual a zero. Por outro lado, existem alguns cenários onde o preço “spot” ultrapassa os R\$300/MWh.

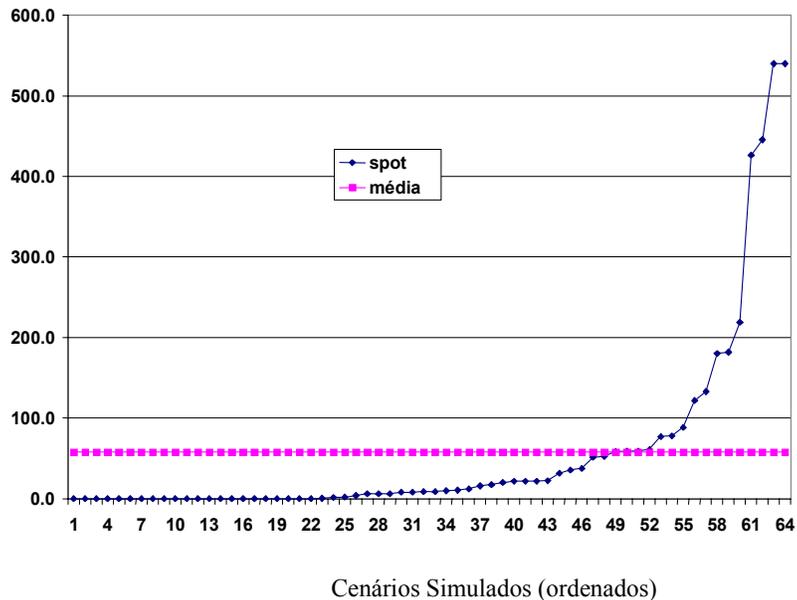


Figura 10-2 – Cenários simulados do Preço “spot”– Janeiro de 2002

A razão para a volatilidade é que os sistemas hidrelétricos são projetados para garantir o atendimento da carga sob circunstâncias hidrológicas adversas, que não ocorrem com frequência. Como resultado, na maior parte do tempo formam-se excedentes temporários de energia (conhecidos como “energia secundária”), o que implica em um preço “spot” muito baixo. Por outro lado, se houver um período de seca, o preço “spot” pode subir abruptamente, chegando a alcançar o custo de racionamento do sistema.

Devido à capacidade de armazenamento do reservatório, estes períodos de baixo custo não apenas ocorrem com frequência, mas podem estender-se por muito tempo, sendo intercalados por períodos de custo muito elevado em decorrência das secas.

10.1.1

Contratos Bilaterais

Os contratos de suprimento têm sido tradicionalmente utilizados como medida de proteção contra a volatilidade da renda líquida resultante da venda de energia no mercado de curto prazo.

Suponha, por exemplo, que um gerador vende hoje um contrato de 100 MWh a um preço de 35 R\$/MWh, com vencimento no estágio t . Nesta data, a produção do gerador é de 95 MWh, a carga é 105 MWh e o preço “spot” do sistema é π R\$/MWh. A renda líquida do gerador e o pagamento líquido da demanda são dados por:

$$R_g = \pi \times G + (35 - \pi) \times E_c \quad (10-1)$$

$$P_d = \pi \times D + (35 - \pi) \times E_c \quad (10-2)$$

As expressões acima contêm duas parcelas: na primeira, o gerador e demanda vendem (compram) sua produção G (consumo D) no “spot”, da maneira tradicional. Na segunda, o gerador e demanda recebem (pagam) o produto da diferença entre o preço contratado e o “spot” pela quantidade E_c contratada.

Suponha que o preço “spot” π seja baixo, por exemplo 10 R\$/MWh. Neste caso, a remuneração correspondente à primeira parcela da expressão (10-1) – venda da geração no spot – é reduzida. Por outro lado, a segunda parcela é positiva, isto é, o gerador recebe uma remuneração adicional à remuneração “spot”. Em outras palavras, o contrato protege o gerador contra preços “spot” reduzidos. Por sua vez, se o preço spot for alto (por exemplo, 50 R\$/MWh), a demanda tem gastos elevados de compra no “spot” (primeira parcela de (10-2)). Estes gastos são parcialmente compensados na segunda parcela, que tem valor negativo. Conclui-se portanto que o contrato protege a demanda contra preços “spot” altos.

A Figura 10-3 resume a situação, mostrando os rendimentos e pagamentos do gerador e demanda (em \$), para as quatro situações: com e sem contrato, preço spot alto e baixo.

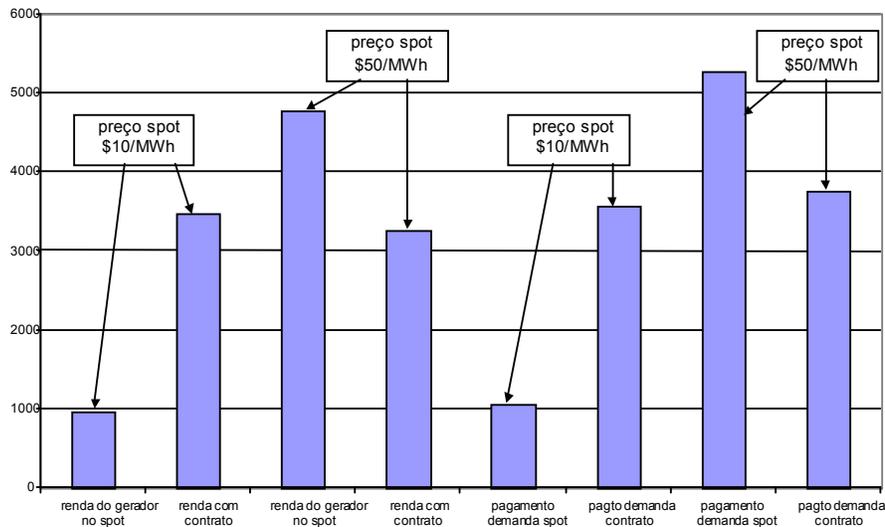


Figura 10-3 – Uso de Contratos para Redução de Volatilidade

10.2

Riscos de preço e quantidade

O contrato de energia, como visto, tem várias características atraentes. Entretanto, também oferece riscos para o gerador, que devem ser quantificados. Em particular, devem ser analisados os cenários onde a produção do gerador é inferior ao montante contratado (em linguagem do setor financeiro, quando o gerador está “short” em relação a seu contrato). Como visto, o gerador nestes casos paga um montante (R\$) dado pela diferença entre contrato e produção (MWh), multiplicada pelo preço spot (R\$/MWh). Se este preço spot for elevado, a perda financeira do gerador pode ser substancial. O recente racionamento de energia no Brasil ilustra bem este risco. Antes do racionamento, 100% da demanda estava contratada com os geradores. Quando houve o racionamento, a demanda se reduziu em 20%, mas os montantes de energia dos contratos não foram afetados (como visto anteriormente, os contratos são “hedges” puramente financeiros). Dado que a produção física de energia é necessariamente igual à demanda física, ocorreu uma diferença também de 20% entre contrato e produção, que deveria ser paga pelos geradores às distribuidoras. Entretanto, o preço spot na época do racionamento era cerca de cinco vezes maior do que o preço que os geradores recebiam pelos contratos; portanto, o montante (R\$) que os geradores

deviam pagar correspondia a 20% (diferença de energia) x 5 (diferença de preço) = 100% da remuneração que recebiam pelos contratos.

Embora o racionamento tenha sido um evento excepcional, este tipo de risco existe nos contratos regulares. No caso das usinas térmicas, o maior risco é uma falha de longa duração do gerador coincidente com um período de preço “spot” elevado. Este risco é relativamente pequeno porque os eventos de falha e preço são estatisticamente independentes; portanto, a probabilidade da ocorrência simultânea de ambos é dada pelo produto das probabilidades individuais.

Entretanto, como visto em [30], a situação das hidrelétricas é diferente, pois há uma correlação **negativa** entre a geração de uma usina hidrelétrica e o preço spot, isto é, a produção tende a diminuir quando o preço spot aumenta, e vice-versa. Este fenômeno é ilustrado nas Figura 10-4 e Figura 10-5, que mostram a evolução do preço spot e nível de armazenamento nos sistema Sudeste ao longo de quatro anos.

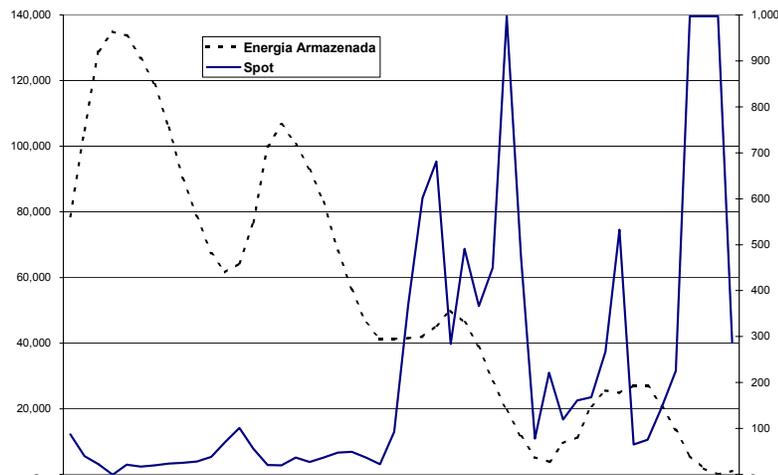


Figura 10-4 – Preços “spot” x Nível de Armazenamento (II) – situação seca

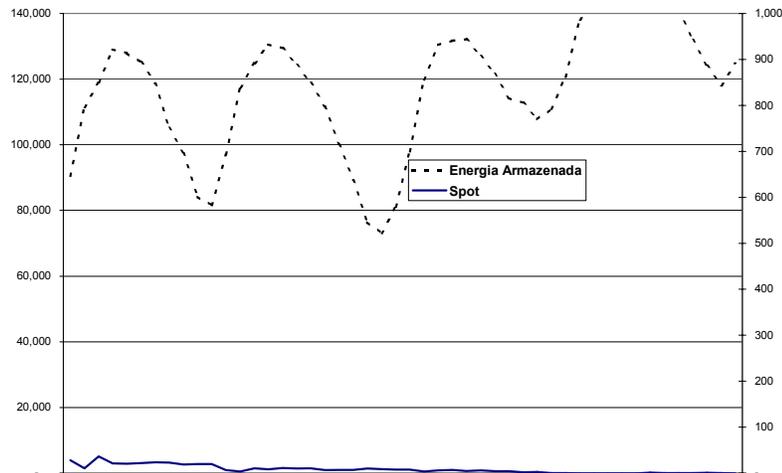


Figura 10-5 – Preços “spot” x Nível de Armazenamento (III) – situação úmida

Esta correlação negativa se deve à grande participação hidrelétrica na geração de energia no Brasil, onde o preço spot é dado, em geral, pelo custo de oportunidade das hidrelétricas. Como visto em capítulos anteriores, este custo de oportunidade reflete a média ponderada dos custos de racionamento e despacho térmicos futuros, que por sua vez dependem dos níveis de armazenamento.

Conclui-se que o montante contratado pela hidrelétrica deve ser cuidadosamente calibrado. Se houver sub-contratação, a hidrelétrica estará exposta ao risco de baixas remunerações nos períodos de preços spot reduzidos; se houver sobre-contratação, a hidrelétrica estará exposta ao risco de compensações financeiras substanciais nos períodos de preço spot elevado.

11

Anexo C: Formas de funções utilidade

11.1

Função Utilidade Quadrática

Este tipo de função é bastante utilizada por proporcionar um resultado analítico, que é o critério média-variância. A função de utilidade quadrática pode ser definida como um polinômio de segundo grau conforme a equação abaixo:

$$U(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2 \quad \text{para } a > 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (11-1)$$

Esta função é significativa apenas para o domínio de $x \leq a/b$, onde ela é crescente. Outra observação importante é que para $b > 0$, esta função é estritamente côncava, caracterizando um perfil de aversão a risco.

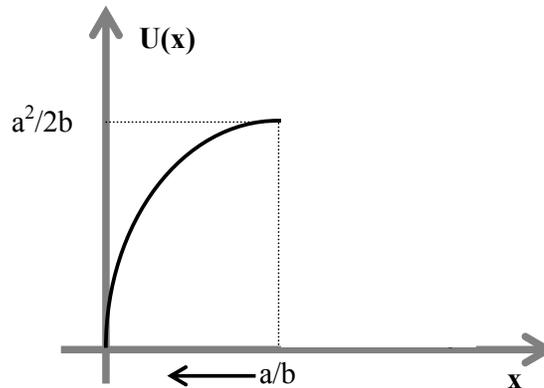


Figura 11-1 – Função de utilidade quadrática

Para demonstrar como a utilidade quadrática reflete o critério de média-variância através de seu valor esperado, vamos assumir que x seja uma v.a. limitada superiormente por a/b , ou seja, $\text{Prob}(x \leq a/b) = 1$. Então o valor esperado da utilidade de x pode ser expresso por:

$$E[U(x)] = aE(x) - \frac{1}{2}bE(x^2) \quad (11-2)$$

$$E[U(x)] = aE(x) - \frac{1}{2}bE(x)^2 - \frac{1}{2}b\text{Var}(x) \quad (11-3)$$

A expressão acima, que só depende da média de x e de sua variância, nos mostra que, se b e a forem maiores que zero e de $x \leq a/b$, o valor esperado da utilidade de x cresce à medida que o valor esperado de x cresce, e em contrapartida, decresce conforme a variância de x aumenta. Essa propriedade é bastante intuitiva e promove uma expressão analítica que simplifica muito o desenvolvimento de diversos problemas.

$$CAR_U(x) = -U''(x)/U'(x) \quad (11-4)$$

$$CAR_U(x) = b/(a-bx) \quad (11-5)$$

Porém, essa forma quadrática apresenta uma “inconsistência” de comportamento, pois como pode ser visto na expressão (11-5), o grau de aversão a risco, expresso pelo coeficiente de aversão a risco, CAR, aumenta à medida que x cresce, o que não é muito intuitivo. Esse fato nos motiva a explorar outras formas de utilidade.

11.2

Função Utilidade Exponencial (EXP)

A função de utilidade exponencial consiste em uma exponencial amortecida negativa. Esta não apresenta o inconveniente de domínio restrito e pode ser encontrada, à medida que se imponha um comportamento onde o CAR seja constante, ou seja, o grau de aversão a risco não se altere ao longo da renda. Dessa maneira, pode-se encontrar a expressão de $U(x)$ através da resolução da equação diferencial a seguir.

$$CAR_U(x) = U''(x)/U'(x) = -a \quad (11-6)$$

Que resulta em:

$$U(x) = -e^{-ax} \quad (11-7)$$

Outra vantagem desta forma pode ser visto no caso em que a distribuição de probabilidade da variável avaliada é normal. Essa apresenta uma propriedade similar à da função quadrática, onde o valor esperado da utilidade proporciona uma expressão analítica em função dos parâmetros da v.a. (média e variância). Na figura a seguir, pode-se visualizar a forma que esta função adquire.

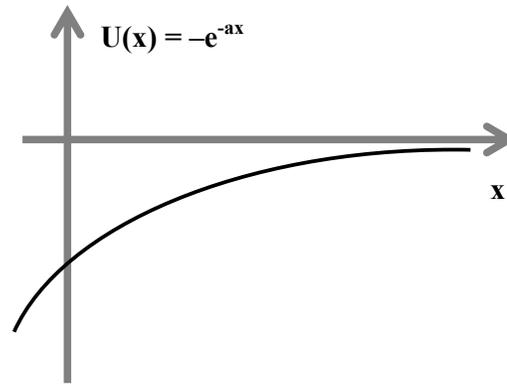


Figura 11-2 – Função de utilidade exponencial negativa

Se x for uma v.a. normal com média μ e variância σ^2 , então o valor esperado da utilidade de x pode ser escrito como:

$$E[U(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dX \quad (11-8)$$

$$E[U(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - (2a\sigma^2 - 2\mu)x + \mu^2)} dX \quad (11-9)$$

Ao completarmos o quadrado do expoente do integrando, em busca da forma padrão de uma distribuição normal, encontra-se a seguinte expressão:

$$E[U(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a\left(\mu - \frac{a}{2}\sigma^2\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x - (2a\sigma^2 - 2\mu)]^2} dX \quad (11-10)$$

Como o integrando da expressão acima, a menos de uma exponencial constante com relação à variável de integração, é a distribuição de uma v.a. normal, a expressão (11-10) pode ser reescrita como:

$$E[U(x)] = -e^{-a\left(\mu - \frac{a}{2}\sigma^2\right)}, \text{ que só depende da média e variância de } x. \quad (11-11)$$

Nesta expressão final, nota-se que:

- (i) à medida que a média aumenta o valor esperado da utilidade cresce.
- (ii) conforme a variância aumenta, o mesmo valor esperado decresce.

Esse resultado, porém, não pode ser generalizado para qualquer distribuição que a v.a. x assuma, como no caso da quadrática.

11.3

Função Utilidade Logarítmica (LN)

A função de utilidade LN pode ser obtida através da imposição de um perfil de aversão a risco, onde o CAR “decaia” com a renda (x), segundo uma hipérbole. Esta hipótese é razoável, visto que se a renda de uma agente aumenta, espera-se que este seja menos avesso ao risco. Assim, se fizermos:

$$\text{CAR}_U(x) = (x+a)^{-1} \quad (11-12)$$

Onde o parâmetro a controla a translação da função, de forma que se permita modificar o CAR da maneira que expresse o perfil de cada agente.

Então,

$$U''(x)/U'(x) = -1/(x+a) \quad (11-13)$$

que resulta na função:

$$U(x) = \ln(x+a) \quad (11-14)$$

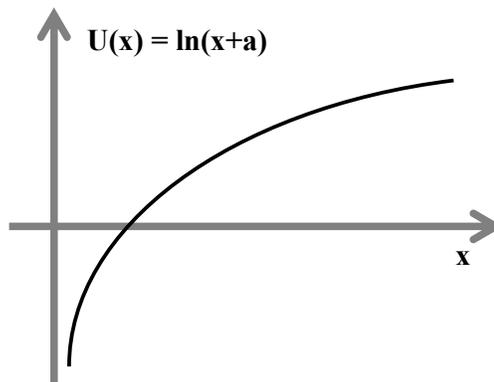


Figura 11-3 – Função de utilidade logarítmica

A função utilidade logarítmica também pode ser justificada para o caso de um agente que busque maximizar a média geométrica dos possíveis resultados

$$\{x_s\}, \text{Max} \prod_{s=1}^S x_s^{1/S}.$$

Como maximizar uma transformação biunívoca e estritamente crescente de qualquer função, não altera o seu ponto de máximo, ao aplicarmos o logaritmo à média geométrica (função objetivo), este proporciona a forma exata do problema de maximização da utilidade esperada para o caso da FU logarítmica, pois

$$\text{Maximizar } \ln\left(\prod_{s=1}^S x_s^{1/S}\right) = \text{Maximizar } \sum_{s=1}^S \ln(x_s).$$

11.4

Utilidade Generalizada de Machina

Em 1944/47 os trabalhos publicados por von Neumann e Morgenstern (vN-M) introduziram a teoria de decisão os axiomas da teoria de utilidade esperada. Neste trabalho as variáveis aleatórias foram caracterizadas por um suporte (possíveis valores) e suas respectivas probabilidades (ver capítulo 7 em [16]). A preferência de um agente entre duas variáveis aleatórias seria feita então, com base em um funcional composto pelo valor esperado da função utilidade aplicada a cada variável. Contudo, este funcional apresenta um comportamento linear com respeito às probabilidades, e traduz todo o perfil de comportamento do agente somente através do mapeamento (função utilidade) do suporte da variável aleatória mensurada.

Savage (1954) sintetizou o conceito de probabilidade subjetiva com a teoria de utilidade esperada de vN-M através da atribuição de diferentes “pesos” a cada probabilidade. Em outras palavras, foi introduzida no funcional de preferência a percepção de diferentes importâncias que se poderia dar às diferentes probabilidades. Este conceito se mostrou bastante intuitivo e foi bem aceito pelos teóricos da área de teoria de decisão, que neste sentido, desenvolveram um gama de trabalhos com o intuito de caracterizar as dependências não lineares nas probabilidades dos funcionais de preferência, dando origem aos chamados “Non-Expected Utility Models”, ou modelos não baseados em utilidade esperada. Alguns exemplos incluem as formas:

- $V(F_R) \equiv \sum_s v(p_s) \cdot u(r_s),$
- $V(F_R) \equiv \sum_s v(p_s) \cdot u(r_s) / \sum_s v(p_{s'}),$
- $V(F_R) \equiv \sum_s p_s \cdot u(r_s) + [\sum_s p_{s'} \cdot g(r_{s'})]^2,$
- $V(F_R) \equiv \sum_s p_s \cdot u(r_s) / \sum_s p_{s'} \cdot g(r_{s'}), \text{ etc.}$

A pesar do intuito destes desenvolvimentos ser o de capturar nos funcionais de preferência o efeito não linear da preferência individual dos agentes por diferentes probabilidades, que passaram também a ser vistas como de propriedade individual de cada agente (probabilidade subjetiva), o trabalho [32] de Mark Machina (1983), mostrou que funcionais mais gerais que o estabelecido por vN-M deveriam comportar mapeamentos tanto do suporte das variáveis aleatórias quanto de suas probabilidades, utilizando-se para isto somente resultados de cálculo. Neste sentido, este mapa poderia ser visto como famílias de utilidades “locais”¹⁹ de vN-M, parametrizadas nas probabilidades. Para exemplificar o argumento de Machina, repetimos no parágrafo abaixo o seu desenvolvimento que evidencia tal fato.

Se R é uma variável aleatória com função de probabilidade acumulada $F_R: \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$, e $V(\cdot)$ é um funcional de preferência, diferenciável nas probabilidades, pode-se fazer a expansão de Taylor deste com relação a F_R nas vizinhanças de uma dada função F_R^0 e obter o seguinte resultado:

$$V(F_R) - V(F_R^0) = \int U(r, F_R) [dF_R(r) - dF_R^0(r)] + o(\|F_R - F_R^0\|). \quad (11-15)$$

Onde fica evidente a dependência de V com F_R através de uma “utilidade generalizada” ou do mapa $U(r, F_R)$.

Assim como Machina, outros autores expressaram tal dependência de diversas formas diferentes, contudo, no que diz respeito aos desenvolvimentos que serão feitos neste trabalho, a idéia por trás do funcional proposto por Machina se encaixará perfeitamente às propriedades verificadas pela utilidade por trás do *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). Isso não significa que tal utilidade seja um caso particular da utilidade de Machina, mas simplesmente que a idéia da dependência da função utilidade com relação à distribuição da v.a. avaliada seja compartilhada entre ambas.

¹⁹O termo “local” utilizado por Machina se refere à existência de uma função utilidade de vN-M para cada dada função de probabilidade $F(\cdot)$ da variável aleatória em questão.

Como notação, será assumido durante todo o corpo deste trabalho que a palavra “utilidade” se refere à função utilidade clássica de vN-M, e quando necessário, será utilizado o termo completo “Utilidade de Machina” ou “Utilidade Generalizada de Machina” para se fazer referência ao mapeamento $U(r, F_R)$ obtido em (11-15).

Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período

Vamos supor um caso simples de dois períodos com apenas uma variável de decisão x (escalar), onde normalmente a função objetivo seria maximizar o valor presente das rendas líquidas, descontadas ao custo de capital. Neste exemplo, vamos assumir que o fator de impaciência será igual a uma taxa (J) a que a utilidade $U(\cdot)$ de cada período será descontada para expressar a preferência temporal do agente. Assim, o objetivo do agente é:

$$\text{Max}_{(x)} E\{U[R_1(x, \xi_1)]\} \cdot (1+J)^{-1} + E\{U[R_2(x, \xi_2)]\} \cdot (1+J)^{-2} \quad (12-1)$$

Neste caso, a decisão ótima é tal que atenda à seguinte equação:

$$f_1'(x^*) \cdot (1+J)^{-1} + f_2'(x^*) \cdot (1+J)^{-2} = 0 \quad (12-2)$$

Onde fazemos $f_i(x) = E\{U[R_i(x, \xi_i)]\}$ para simplificarmos e proporcionarmos mais clareza às expressões. Neste contexto, se definirmos como notação que $f_i'(x) \equiv \partial f_i(x) / \partial x$, podemos escrever a derivada de f com respeito a x como: $f_i'(x) = E\{U'[R_i(x, \xi_i)] \cdot R_i'(x, \xi_i)\}$.

Por outro lado, se buscamos a solução ótima sob o critério dos equivalentes certos de cada período, teremos como função objetivo a seguinte expressão:

$$\text{Max}_{(x)} U^{-1}(E\{U[R_1(x, \xi_1)]\}) \cdot (1+J^{LR})^{-1} + U^{-1}(E\{U[R_2(x, \xi_2)]\}) \cdot (1+J^{LR})^{-2} \quad (12-3)$$

Ou, já utilizando a notação anterior,

$$\text{Max}_{(x)} U^{-1}[f_1(x)] \cdot (1+J^{LR})^{-1} + U^{-1}[f_2(x)] \cdot (1+J^{LR})^{-2} \quad (12-4)$$

É importante notar que neste caso, a taxa de desconto utilizada será o custo de capital do agente livre de risco (J^{LR}), uma vez que este enxerga o fluxo $\{U^{-1}[f_i(x)]\}_{i=1,2}$ como sendo determinístico.

Para encontrar o ótimo que satisfaça este critério, devemos encontrar x^* tal que atenda à seguinte igualdade:

$$f_1'(x^{*EC}) \cdot U^{-1}[f_1(x^{*EC})] \cdot (1+J^{LR})^{-1} + f_2'(x^{*EC}) \cdot U^{-1}[f_2(x^{*EC})] \cdot (1+J^{LR})^{-2} = 0 \quad (12-5)$$

Ao compararmos as expressões (12-2) com a expressão acima (12-5), pode-se constatar que estas diferem, além do fator de desconto, na ponderação do gradiente de cada período. Os “pesos” desta ponderação são justamente as inclinações da função inversa da utilidade, onde as utilidades esperadas da renda de cada período, no ponto ótimo $f_1(x^{*EC})$ e $f_2(x^{*EC})$, se encontram. Para o caso da utilidade linear por partes, esses fatores são justamente os coeficientes $e_{k(1)}$ e $e_{k(2)}$ tal que $f_1(x^{*EC}) \in \Theta_{k(1)}$ e $f_2(x^{*EC}) \in \Theta_{k(2)}$. Onde Θ_k representa a região do domínio da inversa da utilidade relativa ao k-ésimo segmento.

Desta maneira, para que as soluções provenientes das duas abordagens sejam as mesmas, ou seja, $x^* = x^{*EC}$, é necessário que $U^{-1}[f_t(x^{*EC})] \cdot [(1+J)/(1+J^{LR})]^t$ seja igual (constante) para todo t e maior que zero, pois desta forma a expressão (12-5) pode ser simplificada e igualada à expressão (12-2). Um caso particular ocorre ao utilizarmos a taxa de impaciência igual à taxa livre de risco, ou seja, $J = J^{LR}$ e ao utilizarmos uma utilidade linear por partes, as utilidades esperadas de cada período assumem valores nos mesmos segmentos, tendo assim as mesmas inclinações $e_{k(1)} = e_{k(2)}$.

Outra relevante comparação pode ser feita no sentido de compara os equivalentes certos obtidos pelo funcional tradicional baseado em utilidade esperada e no proposto neste trabalho para um mesmo fluxo estocástico $\{R_t\}_t$. Para o primeiro caso, que denominaremos de clássico o equivalente certo poderia ser obtido através da aplicação da seguinte igualdade:

$$EC^{(clássico)} = U^{-1} \{ \sum_t E[U(R_t)] \cdot (1+J)^{-t} \} \quad (12-6)$$

Já para a abordagem proposta no capítulo 3 desta tese, o equivalente certo assume uma forma bastante parecida, porém com a inversa da utilidade sendo aplicada a cada termo do somatório e não ao total deste, conforme a expressão que segue mostra:

$$EC^{(proposto)} = \sum_t U^{-1} \{ E[U(R_t)] \} \cdot (1+J^{LR})^{-t} \quad (12-7)$$

Para efeito de comparação, se $J = J^{LR}$ e J^{LR} fosse tal que $\sum_{t>0} (1+J^{LR})^{-t} = 1$, então através da desigualdade de *Jensen* para funções convexas (no caso de U ser côncava – agente avesso a risco) poder-se-ia verificar a seguinte desigualdade:

$$EC^{(\text{proposto})} \geq EC^{(\text{clássico})} \quad (12-8)$$

Mostrando que, neste caso, o equivalente certo proposto estaria atribuindo mais valor ao fluxo $\{R_t\}_t$ que o clássico. Contudo, este caso nunca ocorre na prática e, portanto, cada caso deve ser analisado especificamente, pois não se pode dizer quando um será superior ao outro.

Assim, uma vez que se adota a abordagem proposta nesta tese, é possível calcular o fator de impaciência do agente J^* que torna os equivalentes certos em ambas as abordagens iguais. Neste sentido, como a abordagem proposta não tem a pretensão de invalidar a abordagem clássica, e sim de propor algo mais prático no que diz respeito à preferência entre períodos, o fator J^* de impaciência de um agente poderia ser “estimado” com base nesta igualdade. Logicamente, devemos ser muito cuidadosos com tal afirmação, pois este fator J^* , fruto da igualdade dos equivalentes certos das duas abordagens, seria dependente da maioria dos parâmetros e elementos envolvidos nas expressões dos equivalentes certos, como por exemplo, da função utilidade $U(\cdot)$, da distribuição conjunta de probabilidade $F_R(\cdot)$ do fluxo $\{R_t\}_t$ e obviamente de J^{LR} .

Anexo E: A utilidade por trás do funcional CVAR

Como visto revisado no item 4.2 desta tese, o CVaR pode ser escrito como um problema de maximização de valor esperado com restrições lineares. Neste sentido, a formulação do CVaR se assemelha à formulação da função utilidade linear por partes (2-2)(2-3). Conforme descrito anteriormente, o $\text{CVaR}_\alpha(R)$ de uma v.a. R pode ser formulado conforme a seguinte expressão:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \sup_{(z)} \{z + E[(R - z)^-]/(1-\alpha)\} \quad (13-1)$$

Onde mostra-se (ver item 4.2) que $z^* = \text{argmax}_{(z)} \{z + E[(R - z)^-]/(1-\alpha)\} = \text{VaR}_\alpha(R)$ e $(\cdot)^-$ é a função truncamento, tal que:

$$(x)^- = x, \text{ se } x \leq 0 \text{ e } (x)^- = 0, \text{ se } x \geq 0 \quad (13-2)$$

Então, podemos supor uma família contínua de funções utilidades (em z) com um parâmetro (α), com a seguinte forma:

$$[U_{(\alpha)}(r)]_z = z + (r - z)^-/(1-\alpha) \quad (13-3)$$

Por conveniência e simplicidade de notação, a família de utilidades será definida e reescrita como $U_{z,(\alpha)}(r) \equiv [U_{(\alpha)}(r)]_z$.

Podemos verificar que $U_{z,(\alpha)}$ é côncava com relação ao espaço da família $\{z \in \mathfrak{R}\}$ e no seu domínio $\{r \in \mathfrak{R}\}$ (renda), para um dado α fixo. Isto fica evidente ao analisarmos diretamente o gráfico desta função em ambas as dimensões (“ z ” e “ r ”).

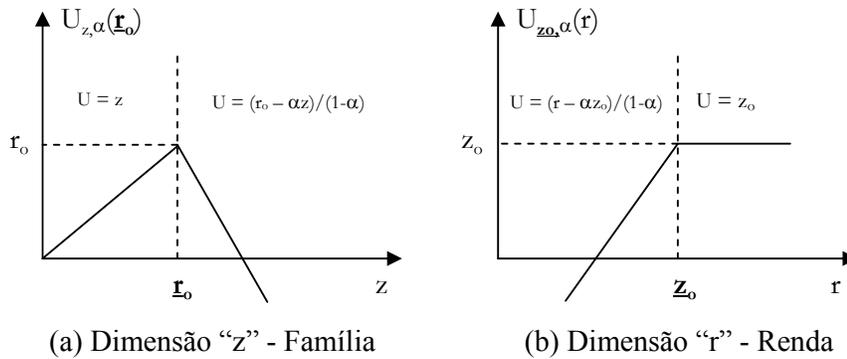


Figura 13-1 – Função de utilidades implícita no CVAR – (a) Análise da função U no domínio da família, fixado o ponto de renda $r = r_0$; e (b) análise da função U no domínio da renda, fixado a utilidade $z = z_0$.

Entretanto, existe apenas uma utilidade de vN-M, dentro da família (13-3), que através do seu valor esperado proporciona o $CVaR_\alpha(R)$. E conforme já visto antes, segundo R.T. Rochafellar et al. [48], essa é tal que $z = z^*(R) = VaR_\alpha(R) = F_R^{-1}(1-\alpha)$, quantil de $1-\alpha\%$ de probabilidade (rever item 4.2 ou [48]). Nesse caso, a função utilidade implícita ao funcional de preferência definido pelo $CVaR_\alpha(\cdot)$ depende explicitamente da função distribuição de probabilidade acumulada (F_R) da v.a. R que está sendo avaliada e pode ser escrita conforme a expressão a seguir:

$$U_{z^*(R),\alpha}(r) = z^* + (r - z^*) / (1 - \alpha) \quad (13-4)$$

Assim, a função utilidade exibida acima pode ser vista como um exemplo de utilidade que exibe dependência com a distribuição da v.a., conceito similar ao obtido pela Utilidade Generalizada de Machina [32]. Entretanto, este não é exatamente o caso da Utilidade de Machina, pois esta última é obtida através da derivada do funcional de preferência com respeito às probabilidades, o que não é bem definido no caso do funcional dado pelo CVAR por se tratar de uma função convexa linear por partes²⁰. Contudo, esta formulação permite uma forma bastante

²⁰Um resultado conhecido de análise de sensibilidade de programação linear é que uma função definida pelos valores que a função objetivo de um problema de otimização linear (maximização) proporciona no ponto ótimo, ao variarmos o lado direito das restrições, é uma função côncava e linear por partes. Para um problema de minimização o resultado análogo é a constatação de uma função convexa. Assim, através da igualdade primal-dual, é fácil constatar que o valor da função objetivo de um problema de maximização é convexo com relação aos coeficientes da função objetivo. Este é justamente o caso das probabilidades na formulação do CVAR.

prática de se obter tal utilidade para um dada distribuição obtida por uma solução intermediária ao processo de otimização. Através do “sup” ou máximo do valor esperado da família de utilidades (13-3), o quantil $z^*(R) = \text{VaR}_\alpha(R) = F_R^{-1}(1-\alpha)$ pode ser selecionado durante a otimização, bastando para isso, incluir um conjunto de restrições lineares adicionais ao problema original. Desta forma, o problema de maximização do funcional de preferência dado pelo $\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x})]$, onde “ \mathbf{x} ” é um vetor de decisão que parametriza a distribuição R com S possíveis realizações de probabilidades $\{R_s(\mathbf{x}), p_s\}$, pode ser definido pelo seguinte problema de otimização:

$$\text{Maximizar}_{(x, \beta, z)} \sum_s p_s \cdot z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \quad (13-5)$$

Sujeito a:

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (13-6)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R_s(\mathbf{x}) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (13-7)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{X} \quad (13-8)$$

Onde \mathfrak{X} é um conjunto de soluções viáveis de serem tomadas pelo agente.

Além disso, pode-se mostrar que o equivalente certo de R de um agente que utiliza a utilidade (13-4) será exatamente igual ao $\text{CVaR}_\alpha(R)$. Isso decorre do fato de que, por definição, o valor esperado desta utilidade resulta no CVaR da v.a. avaliada e o CVaR de uma variável determinística assume o seu próprio valor. Então, segundo esta função utilidade, o valor determinístico que torna o agente indiferente entre este valor e uma renda estocástica R qualquer será o próprio valor esperado da utilidade de R .

O desenvolvimento necessário para se obter o valor do Equivalente Certo (EC^*) de R é exibido a seguir:

$$\sup_{(z)} \{E[U_{z, \alpha}(\text{EC}^*)]\} = \sup_{(z)} \{E[U_{z, \alpha}(R)]\} \quad (13-9)$$

A partir da definição de $U_{z, \alpha}(r)$ em (13-3) o lado esquerdo assume o valor máximo no ponto EC^* (ver Figura 13-1 – (a) onde o domínio “ r ” está fixado a um valor determinístico). De acordo com (13-1) e (13-3), o lado direito de (13-9) assumirá o valor de $\text{CVaR}_\alpha(R)$, originando assim à expressão do equivalente certo:

$$EC^* = E[U_{z^*(R),\alpha}(R)] = CVaR_\alpha(R) \quad (13-10)$$

É interessante ressaltar que a utilidade (13-4) proporciona uma interpretação relativista do perfil de risco do agente, uma vez que este é dependente da própria percepção futura de ocorrências, que vem da distribuição objetiva estimada pelo agente. Isso pode ser evidenciado à medida que, dada uma distribuição, a utilidade proveniente do funcional α -CVaR penaliza somente os resultados abaixo do quantil associado ao α -VaR. Este comportamento pode ser comparado ao comportamento de investidores que projetam os seus fluxos de caixa para um cenário “pessimista” (associado a alguma medida de stress ou pior caso) e ao mesmo tempo o avaliam para um cenário denominado “realista” (normalmente associado ao valor esperado dos fluxos). Geralmente, o investidor somente apresenta uma “descepção” com o projeto se a realização do fluxo se verificar inferior ao cenário pessimista. Caso contrário, o seu retorno já foi assegurado e, portanto, este poderia exibir um perfil indiferente.

Neste sentido, para que a utilidade acima do α -VaR não seja “flat”, exibindo indiferença com relação a valores acima deste, os mesmo desenvolvimentos podem ser realizados para se encontrar a utilidade por trás da combinação convexa entre o CVaR e o valor esperado da v.a. avaliada. Neste caso, a utilidade resultante seria ligeiramente diferente da tratada neste capítulo e carregaria a maioria de suas virtudes, por se tratar de uma composição linear de duas medidas coerentes. Contudo, deixamos este desenvolvimento para pesquisas futuras e possíveis extensões deste trabalho.

13.1

O CVaR e o Equivalente Certo de Ben Tal

De acordo com Bem Tal et al. [7][8], o “valor” de uma dada v.a. R é o máximo que se pode “obter” com ela. Por exemplo, $\sup_{(z)} \{z: z \leq R_s \forall s\}$ poderia ser uma possível valoração para R , entretanto essa atribuição seria demasiadamente avessa a risco, pois o menor valor que R pode assumir pode ser muito improvável. Por isso, foi proposta uma valoração em dois estágios, onde no primeiro estágio atribui-se o valor à v.a. e no segundo, após a realização das incertezas, mede-se a frustração ou sucesso desta atribuição através da uma

função de valor $v(\cdot)$ aplicada a este resultado, $R - z$. O procedimento implícito a esta valoração faz um paralelo com um problema de otimização estocástica de dois estágios com recurso, onde um determinado fluxo de caixa R pode ser “consumido” hoje, através de um valor certo z e em um segundo estágio, quando este terá o seu valor conhecido.

O que Ben Tal propõe é a alocação ótima, que deve ser definida no primeiro estágio (quando o resultado do segundo ainda não é conhecido), do consumo de R entre o primeiro e o segundo estágio. Esta alocação será realizada com base em uma esperança sobre uma função de valor $v(\cdot)$ do indivíduo, referente ao excesso ou déficit de caixa no segundo estágio. Isso é feito em [7] e [8] da seguinte forma:

$$V(R) = \sup_{(z)} z + E\{v(R - z)\} \quad (13-11)$$

O valor $V(R)$ é denominado em [8] de “*Recourse Certainty Equivalent*”, onde a denominação de equivalente certo (“*Certainty Equivalent*”) vem do fato desta medida estar atribuindo um valor equivalente determinístico de indiferença à v.a.. O termo Recurso (“*Recourse*”) é devido à interpretação de recurso dada às violações ou folgas decorrentes das possíveis realizações de $R - z$ conforme feito em problemas de programação estocástica de dois estágios com recurso [27]. Neste mesmo trabalho são vastamente detalhadas as propriedades de coerência da medida (13-11) e de preferência como: translação, aditividade, consistência, subhomogeneidade, convexidade, dominância estocástica de segunda ordem, aversão a risco, etc. Além disso, é abordada a conexão entre este funcional com o funcional de Machina.

Finalmente, podemos fechar o “link” entre este funcional e o CVaR, apenas comparando a expressão (4-3) do CVaR com a expressão (13-11) de Ben Tal et al., na qual se $v(\cdot) = (\cdot)^{1/(1-\alpha)}$, então,

$$V(R) = \sup_{(z)} z + \{E[(R - z)^{1/(1-\alpha)}]\} = \text{CVaR}_{\alpha}(R) \quad (13-12)$$