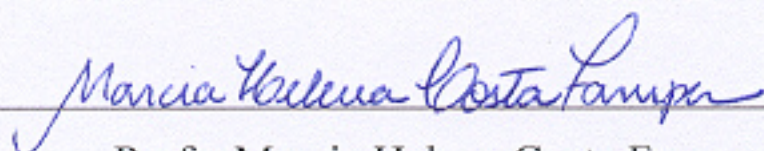


ESTRATÉGIAS DE OFERTAS ÓTIMAS SOB INCERTEZA E CÁLCULOS DE
EQUILÍBRIOS DE NASH DE AGENTES GERADORES EM MERCADOS DE
CURTO PRAZO DE ENERGIA ELÉTRICA: UMA ABORDAGEM POR
PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

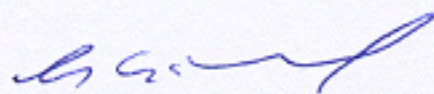
Luiz Augusto Nóbrega Barroso

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



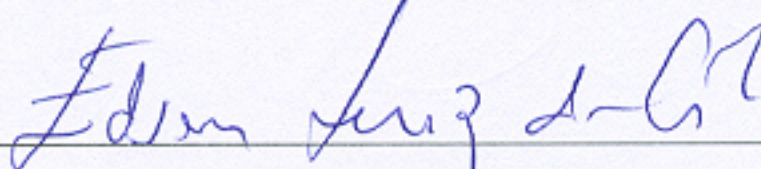
Profa. Marcia Helena Costa Fampa, D.Sc.



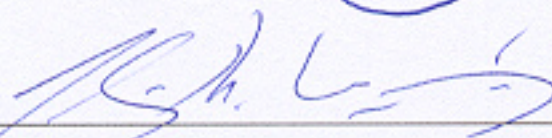
Prof. Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.



Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.



Prof. Edson Luiz da Silva, D.Sc.



Prof. João Lizardo Rodrigues Hermes de Araújo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2006

BARROSO, LUIZ AUGUSTO NÓBREGA

Estratégias de Ofertas Ótimas sob Incerteza e
Cálculos de Equilíbrios de Nash de Agentes
Geradores em Mercados de Curto Prazo de Ener-
gia Elétrica: uma Abordagem por Programação Li-
near Inteira [Rio de Janeiro] 2006

XIII, 143 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2006)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Problema de Dois Níveis
2. Problema de Equilíbrio
3. Teoria dos Jogos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

À Luiz Pereira Barroso, meu pai, pelas diversas discussões em temas afins, alguns abordados nesta tese. A minha mãe, Diana e meu irmão Luiz Henrique pelos incentivos para concluí-la.

À Mario Veiga F. Pereira, por todas as oportunidades, atribuições, confiança e (sobretudo) pelos desafios concedidos em minha carreira acadêmica e profissional. Agradeço também pelo apoio incondicional e sempre *entusiasmado* em todas as etapas de desenvolvimento desta tese e de minhas atividades profissionais, sendo um orientador como amigo e um amigo como orientador. O convívio com o Mario é, sem dúvidas, um privilégio.

À Márcia Fampa e Sérgio Granville, também orientadores, agradeço pelo incentivo, pelas significativas e inúmeras contribuições fornecidas durante este trabalho e em diversas outras ocasiões de minha vida acadêmica e pela incansável motivação para desenvolver trabalhos semelhantes aos desta tese. À Sergio Granville agradeço adicionalmente pela importante participação em minha formação profissional e pelo privilégio de tê-lo como colega de trabalho.

Agradeço aos Professores Nelson Maculan, João Lizardo e Edson Silva pela disposição em participar de minha banca de avaliação e por seus valiosos comentários e contribuições aportadas a este trabalho, todos considerados sem distinção. Ao Prof. Edson Silva agradeço adicionalmente pela minuciosa revisão técnica e pelas diversas discussões correlatas, que contribuíram significativamente para a qualidade desta tese.

Ao amigo Rafael Dix, um dos co-responsáveis por este trabalho, um especial agradecimento pelas intermináveis horas de discussão, horas de sono investidas com revisão de documentos, modelos e resultados, sempre com disposição a ajudar e trabalhar (e mantendo o bom humor).

Aos grandes amigos Alexandre Street, André Resende, Bernardo Bezerra, Bruno Flach, Eduardo Faria, Fernando Porrua, Rafael Kelman e Max Junqueira um também especial agradecimento: pela agradável convivência, pela orientação, pela amizade e companheirismo, pelos comentários, pelas revisões da tese e por nunca deixar a “bola” cair no dia a dia profissional.

Agradeço também a Antonio Conejo, Ben Hobbs, Francisco Galiana, Hugh Rudnick, Marcelino Madrigal e Pedro David pelos comentários e/ou sugestões aportados nos trabalhos relacionados a esta tese, todos incorporados neste documento.

À Priscila Lino, minha grande companheira, agradeço pela paciência, pelo apoio na realização desta tese e em todos os outros momentos que compartilhamos, que foram muito importantes (e sobretudo divertidos).

Finalmente, agradeço a todos os amigos da PSR/Mercados de Energia pelo apoio demonstrado e por nossa agradável convivência e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

ESTRATÉGIAS DE OFERTAS ÓTIMAS SOB INCERTEZA E EQUILÍBRIOS DE
NASH DE AGENTES GERADORES EM MERCADOS DE CURTO PRAZO DE
ENERGIA ELÉTRICA: UMA ABORDAGEM POR PROGRAMAÇÃO LINEAR
INTEIRA

Luiz Augusto Nóbrega Barroso

Setembro/2006

Orientador: Marcia Helena Costa Fampa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O objetivo desta tese é apresentar uma abordagem de solução por programação linear inteira para o problema não linear e não convexo de estratégia de ofertas ótimas de agentes geradores em mercados competitivos de energia. Um esquema de expansão binária é utilizado para transformar os produtos de variáveis deste problema, que é um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio (MPEC), em um problema de programação linear-inteira cuja solução pode ser obtida por métodos do tipo branch and bound. Em seguida, a abordagem é estendida para o caso sob incerteza, onde as ofertas dos concorrentes são representadas por cenários. A segunda parte desta tese estende a abordagem de programação linear inteira para o cálculo de equilíbrios de Nash nestes mesmos mercados, resolvendo um problema de equilíbrio com restrições de equilíbrio. Para todos os casos, a eficiência da metodologia proposta é ilustrada com exemplos e estudos de caso derivados do Sistema Elétrico Brasileiro.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc).

STRATEGIC BIDDING UNDER UNCERTAINTY AND NASH EQUILIBRIA IN
SHORT-TERM ELECTRICITY MARKET: A MIXED INTEGER LINEAR
PROGRAMMING APPROACH

Luiz Augusto Nóbrega Barroso

September/2006

Advisor: Márcia Helena Costa Fampa

Department: Systems and Computation Engineering

The thesis presents a mixed integer linear programming (MILP) solution approach for the problem of strategic bidding in short-term electricity markets. We start with the strategic bidding under uncertainty, i.e., where the price maker agent optimizes its bidding strategy and the uncertainty on the bids of its competitors is represented by a set of scenarios. A binary expansion scheme is used to transform the products of variables in the nonlinear, nonconvex Mathematical Program with Equilibrium Constraints (MPEC) bidding problem into a MILP formulation, which can be solved by existing algorithms. Extensions are presented. We then extend the MILP solution approach for the equilibrium problem of Nash equilibrium in strategic bidding, where a game-theory model represents the dynamic behavior of all agents. A binary expansion scheme is again used to transform the non-convex Nash Equilibrium problem into a MILP, which can be solved by existing algorithms. The BE scheme can be applicable to Cournot, Bertrand or joint price/quantity bidding models. Both approaches are illustrated in case studies with configurations derived from the Brazilian system.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	O PROCESSO DE REFORMA NO SETOR ELÉTRICO	1
1.2	OFERTA DE PREÇOS/QUANTIDADES NO MERCADO DE CURTO PRAZO.....	1
1.3	ALTERNATIVA AO MODELO DE OFERTAS: DESPACHO POR CUSTOS.....	3
1.4	MODELO DE DESPACHO E FORMAÇÃO DE PREÇOS POR CUSTOS VS. MODELO POR OFERTAS.....	3
1.5	ESTRATÉGIA DE OFERTAS DE AGENTES GERADORES EM AMBIENTE DE MERCADO.....	5
1.5.1	<i>Estratégia de oferta para price takers.....</i>	<i>5</i>
1.5.2	<i>Estratégia de oferta para price makers (estratégicos).....</i>	<i>6</i>
1.6	REPRESENTANDO O COMPORTAMENTO SIMULTÂNEO DE TODOS OS AGENTES.....	7
1.6.1	<i>Modelos de Ofertas sob incerteza</i>	<i>8</i>
1.6.2	<i>Modelos baseados em teoria dos jogos</i>	<i>8</i>
1.6.3	<i>Dificuldades e limitações encontradas.....</i>	<i>9</i>
1.7	OBJETIVOS DESTES TRABALHOS	10
1.8	ORGANIZAÇÃO DESTES TRABALHOS	12
2	ESTRATÉGIA DE OFERTAS EM MERCADOS DE CURTO PRAZO DE ENERGIA.....	14
2.1	NOTAÇÃO.....	14
2.2	DESPACHO ECONÔMICO	14
2.3	ESTRATÉGIA DE OFERTA PARA PRICE MAKERS.....	16
2.4	ESTRATÉGIA DE OFERTA.....	17
2.5	FORMULAÇÃO COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR DE UM NÍVEL.....	19
2.6	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	23
3	PARTE I: UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA MISTA.....	27
3.1	MOTIVAÇÃO.....	27
3.2	ABORDAGEM DE SOLUÇÃO: EXPANSÃO BINÁRIA	27
3.2.1	<i>Redefinindo o produto $\pi_d g_j$.....</i>	<i>28</i>
3.2.2	<i>Redefinindo o produto $\lambda_j g_j$.....</i>	<i>29</i>
3.2.3	<i>Redefinindo o produto $\pi_{gj} E_j$.....</i>	<i>30</i>

3.2.4	<i>Formulação inteira-mista final</i>	31
3.3	CRITÉRIOS DE SELEÇÃO PARA AS VARIÁVEIS BINÁRIAS	32
3.4	ESTUDO DE CASO.....	33
4	REPRESENTAÇÃO DE EXTENSÕES	34
4.1	RESTRIÇÕES DE TRANSMISSÃO	34
4.1.1	<i>Despacho econômico com restrições de transmissão</i>	35
4.1.2	<i>Formulação do problema de ofertas com restrições de transmissão</i>	35
4.1.3	<i>Formulação por programação linear-inteira</i>	37
4.2	REPRESENTAÇÃO DE MODELOS DE OFERTAS PURAS DE PREÇO E QUANTIDADE ..	37
4.3	REPRESENTAÇÃO DE INSTRUMENTOS FINANCEIROS.....	38
4.3.1	<i>Representação de Contratos a termo (ou “forward”)</i>	39
4.3.2	<i>Representação de Contratos de Opções</i>	42
4.4	REPRESENTAÇÃO DE DECISÕES DE INVESTIMENTO	46
4.4.1	<i>Formulação</i>	46
4.4.2	<i>Modelagem por programação linear inteira</i>	47
4.5	REPRESENTAÇÃO DE CUSTOS OPERATIVOS NÃO CONVEXOS (CUSTOS DE PARTIDA)	47
5	PARTE II: ESTRATÉGIAS DE OFERTA SOB INCERTEZA	49
5.1	INTRODUÇÃO: OFERTA SOB INCERTEZA X MODELOS BASEADOS EM JOGOS	49
5.2	REPRESENTAÇÃO DE INCERTEZAS NO MODELO DE OFERTAS	50
5.3	FORMULAÇÃO COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE UM NÍVEL NÃO LINEAR	53
5.4	FORMULAÇÃO LINEAR-INTEIRA COM EXPANSÃO BINÁRIA	54
5.5	OBTENÇÃO DOS CENÁRIOS DE OFERTA	56
5.6	EXTENSÕES ADICIONAIS	58
5.7	ESTUDO DE CASO.....	58
5.7.1	<i>Visão Geral do Sistema Elétrico Brasileiro</i>	59
5.7.2	<i>Modelo de oferta utilizado</i>	60
5.7.3	<i>Modelo de despacho por custos</i>	63
5.7.4	<i>Resultados</i>	63
5.7.5	<i>Análise de sensibilidade: ofertas sob incerteza x ofertas determinísticas</i> <i>(“tailor made”) para cenários específicos</i>	68
5.7.6	<i>Resumo das análises</i>	70

6 PARTE III: ESTRATÉGIAS DE OFERTAS COM MODELOS BASEADOS EM TEORIA DOS JOGOS 72

6.1	TEORIA DOS JOGOS E EQUILÍBRIOS DE NASH EM MERCADOS COMPETITIVOS DE ELETRICIDADE	72
6.2	REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO EQUILÍBRIO DE <i>NASH</i>	74
6.3	ABORDAGENS DE SOLUÇÕES USUAIS	76
6.4	ABORDAGEM DE SOLUÇÃO PROPOSTA	78
6.4.1	<i>Enumeração de ofertas</i>	78
6.4.2	<i>Aplicação da expansão binária</i>	80
6.4.3	<i>Formulação linear-inteira final do Equilíbrio de Nash</i>	85
6.5	MULTIPLICIDADE DE EQUILÍBRIOS	87
6.6	EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIOS	88
6.7	REPRESENTAÇÃO DE EXTENSÕES	88
6.7.1	<i>Representação de Modelos de Bertrand e Cournot</i>	89
6.7.2	<i>Representação de múltiplas usinas e custos operativos não convexos</i>	89
6.8	REPRESENTAÇÃO EXPLÍCITA DE AGENTES <i>PRICE TAKERS</i> NA ABORDAGEM PROPOSTA	90
6.9	ESTUDO DE CASO	90
6.9.1	<i>Parâmetros do estudo</i>	90
6.9.2	<i>Modelo de oferta considerado: modelo de Cournot-Nash</i>	92
6.9.3	<i>Modelo de despacho por custos</i>	93
6.9.4	<i>Limites superior e inferior para as ofertas de quantidade</i>	93
6.9.5	<i>Discretização das ofertas de quantidades</i>	94
6.9.6	<i>Resultados</i>	94

7 CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS 98

7.1	CONCLUSÕES	98
7.2	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES	101
7.3	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	103
7.3.1	<i>Representação de extensões adicionais</i>	103
7.3.2	<i>Investigação de esquemas alternativos de solução</i>	105
7.3.3	<i>Aplicações da metodologia proposta em outros problemas de otimização</i>	106

8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	107
9	ANEXO A – O MODELO INTEIRO-MISTO PROPOSTO EM [96].....	117
9.1	MODELO DE OFERTA POR QUANTIDADE.....	117
10	ANEXO B – MODELO DE FLUXO DE POTÊNCIA LINEARIZADO	121
10.1	MODELO BÁSICO.....	121
10.2	DESPACHO ECONÔMICO COM RESTRIÇÕES DE TRANSMISSÃO	122
11	ANEXO C – MODELOS COMPLETOS DAS EXTENSÕES DO	
CAPÍTULO 4	124	
11.1	INTRODUÇÃO.....	124
11.2	REPRESENTAÇÃO DE CONTRATOS A TERMO.....	124
11.3	REPRESENTAÇÃO DE CONTRATOS DE OPÇÕES.....	125
11.4	REPRESENTAÇÃO DE DECISÕES DE INVESTIMENTO	126
12	ANEXO D – COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS DE OFERTA DE	
PREÇO, DE QUANTIDADE E MISTOS (PREÇO/QUANTIDADE)	129	
12.1	INTRODUÇÃO.....	129
12.2	MODELOS DE OFERTA DE PREÇO, DE QUANTIDADE E MISTA.....	129
12.3	CASOS ANALISADOS	130
12.4	RESULTADOS.....	131
12.4.1	<i>Ofertas sob incerteza</i>	<i>131</i>
12.4.2	<i>Ofertas determinísticas.....</i>	<i>133</i>
12.5	CONCLUSÕES.....	135
13	ANEXO E – MODELAGEM DE MÚLTIPLOS GERADORES E FUNÇÕES	
GENÉRICAS DE CUSTOS OPERATIVOS NO MODELO DE EQUILÍBRIO DE		
NASH.....	136	
13.1	INTRODUÇÃO.....	136
13.2	FORMULAÇÃO GERAL DO MODELO	136
13.3	MODELANDO CUSTOS DE MÚLTIPLAS USINAS: LHS DO EQUILÍBRIO DE <i>NASH</i> ..	137
13.4	MODELANDO MÚLTIPLOS CUSTOS OPERATIVOS: RHS DO EQUILÍBRIO DE <i>NASH</i>	138
13.5	VERIFICANDO A OPERAÇÃO DE MÍNIMO CUSTO NO SISTEMA COM MÚLTIPLAS	
USINAS: LHS	140	

13.6	VERIFICANDO A OPERAÇÃO DE MÍNIMO CUSTO NO SISTEMA COM MÚTIPLAS	
	USINAS: RHS.....	140
13.6.1	<i>Garantindo a operação de mínimo custo no RHS: modelo de Cournot...</i>	140
13.6.2	<i>Garantindo a operação de mínimo custo no RHS: caso geral.....</i>	141

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 - Formação de preços e despacho por ofertas.....	2
Figura 2-1 – Custo Operativo total x Despacho do sistema	16
Figura 2-2 – Processo de decisão do agente <i>price maker</i>	18
Figura 4-1 – Lucro Com Opção de Compra	43
Figura 4-2 – Lucro Com Opção de Venda	44
Figura 5-1 – Estratégia de oferta sob incerteza	52
Figura 5-2 – Obtendo os cenários de oferta históricos	57
Figura 5-3 – Curva de oferta acumulada da CESP	64
Figura 5-4 – Preços Spot (despacho por oferta x despacho por custos) por cenário	65
Figura 5-5 – Geração total CESP (despacho por oferta x despacho por custos) por cenário.....	65
Figura 5-6 – Renda líquida Total da CESP (despacho por oferta x despacho por custos) por cenário	66
Figura 5-7 – Diferença entre receita líquida CESP com despacho por oferta x por custos	67
Figura 5-8 - Preço Spot (R\$/MWh) – ofertas sob incerteza x ofertas Tailor-made	69
Figura 5-9 – Diferença entre receita líquida CESP com a estratégia sob incerteza x ofertas “tailor made” para cenário #6	70
Figura 6-1 - Função custo de operação x energia despachada de cada empresa	92
Figura 9-1 – Custo operativo em função da energia ofertada.....	118
Figura 9-2 – Preço spot versus quantidade ofertada.....	118
Figura 9-3 – Remuneração versus quantidade ofertada.....	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1 – Características das usinas da empresa A (CESP).....	60
Tabela 5-2 – Ofertas de Preços x Custo de Operação das usinas da CESP.....	63
Tabela 5-3 – Produção (MWh), Renda (mil R\$) e Preço <i>Spot</i> por cenário (R\$/MWh) .	64
Tabela 6-1 Geradores de Furnas, Cesp e Duke	90
Tabela 6-2 – Limites superior e inferior para as ofertas de quantidade	94
Tabela 6-3 – Equilíbrio de <i>Nash</i> vs solução de mínimo custo (caso base)	95
Tabela 6-4 – Preços Spot (R\$/MWh): Equilíbrio de <i>Nash</i> x Mínimo custo.....	96
Tabela 6-5 – Geração dos agentes estratégicos: Equilíbrio de <i>Nash</i> vs Mínimo Custo para diferentes níveis de demanda	97
Tabela 6-6 – Renda dos agentes estratégicos: Equilíbrio de <i>Nash</i> vs Mínimo Custo para diferentes níveis de demanda	97
Tabela 12-1 – Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de Preço.....	131
Tabela 12-2 – Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de quantidade	131
Tabela 12-3 – Resultado: Modelo de Ofertas Mistas	132
Tabela 12-4 – Preço Spot em cada cenário (\$/MWh)	132
Tabela 12-5 – Comparação entre os modelos.....	133
Tabela 12-6 - Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de Preço	133
Tabela 12-7 – Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de quantidade	134
Tabela 12-8 – Ofertas mistas.....	134
Tabela 12-9 – Preço Spot em cada cenário (\$/MWh)	134
Tabela 12-10 – Comparação entre os modelos.....	135

1 INTRODUÇÃO

1.1 O processo de reforma no setor elétrico

Desde o início dos anos 90, a indústria de eletricidade de muitos países vem passando por um processo de reestruturação [59] com ênfase na introdução de competição em seus segmentos, e, com isso, buscando uma maior eficiência econômica na valoração de recursos e benefícios para o consumidor final. Embora os detalhes do processo de reforma e o desenho institucional sejam diferentes entre os diversos países [23], a organização geral, na maioria dos casos, passa pela substituição do planejamento centralizado, tanto da operação quanto da expansão do sistema, por procedimentos de mercado, onde os agentes geradores são livres para tomar suas decisões de investimento (longo-prazo) e produção (curto-prazo), sendo também responsáveis pelos riscos decorrentes destas decisões.

1.2 Oferta de preços/quantidades no mercado de curto prazo

No que tange à livre tomada de decisão na produção, um dos componentes básicos dos sistemas reestruturados é o mercado atacadista de energia de curto prazo, ou *mercado spot*, onde ocorrem todas as transações diárias de compra e venda de energia elétrica no atacado. De modo simplificado, o mercado de curto prazo funciona da seguinte maneira (um detalhamento maior pode ser encontrado em [23],[30] e [89]):

- a) no final de cada estágio (tipicamente, um dia ou uma semana), os geradores submetem ofertas (ou curvas de ofertas) de quantidade (MWh) e preço¹ (\$/MWh) para cada uma das horas do estágio (dia/semana) seguinte refletindo sua disposição em *vender* energia em cada hora; sendo que em alguns mercados a demanda (consumidores) também participa com ofertas (ou curvas de ofertas) de quantidade e preço, refletindo sua disposição em *comprar* energia em cada hora;
- b) dadas as ofertas dos geradores e consumidores, um operador de mercado busca determinar o despacho econômico dos agentes em cada hora, isto é, como

¹ O *preço* (\$/MWh) ofertado por um agente gerador *não* necessariamente é igual ao seu *custo* variável de produção (\$/MWh).

atender o consumo previsto de energia ao menor custo possível. Para isso, o operador coloca as ofertas dos geradores em ordem crescente de preço - se for o caso, ofertas dos consumidores são colocadas em ordem decrescente – e encontra o preço de equilíbrio no mercado de curto prazo, também conhecido como preço *spot* (\$/MWh), para o qual a oferta total iguala a demanda total. Desta forma, aplicam-se ao Setor Elétrico os fundamentos básicos da teoria microeconômica [101], onde o preço de qualquer mercadoria num ambiente de mercado resulta do equilíbrio entre as curvas de oferta – cuja disposição a produzir aumenta com o preço – e de demanda – cuja disposição a consumir diminui com o preço. O processo é ilustrado na Figura 1-1 a seguir, que mostra curvas de oferta e demanda reais dos mercados da Noruega e Suécia²:

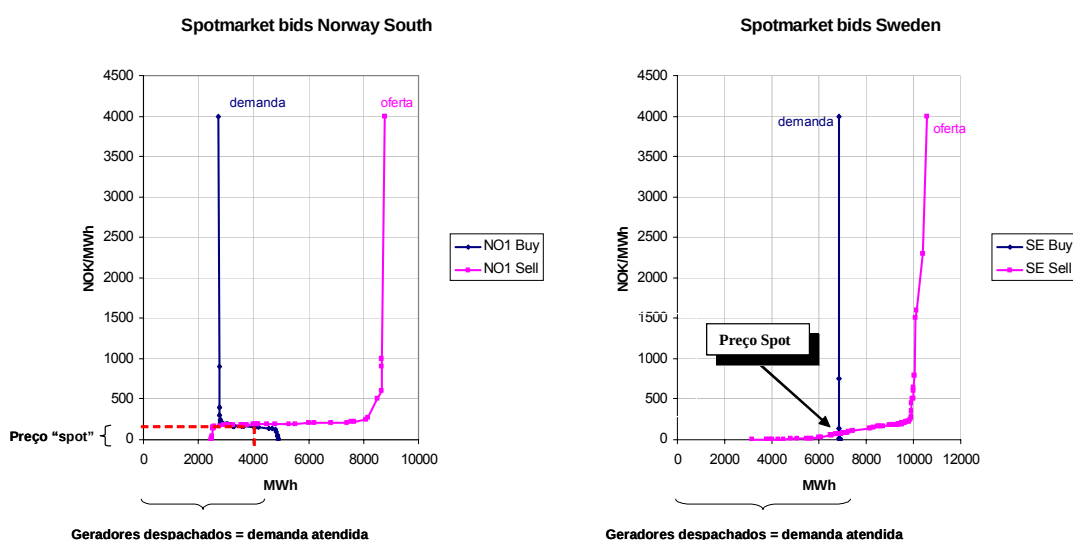


Figura 1-1 - Formação de preços e despacho por ofertas

- c) finalmente, é realizada a contabilização/liquidação das vendas e compras de energia: os geradores (demandas) recebem (pagam) um valor (\$) igual ao produto entre a quantidade produzida (consumida) (MWh) e preço de equilíbrio (\$/MWh). Como no despacho físico a geração e demanda são iguais, a receita total dos geradores é igual ao pagamento total das demandas, isto é, o balanço contábil é igual a zero³.

Este esquema de despacho e formação de preços por ofertas baseado na teoria marginalista de remuneração dos agentes (pagamento *spot*), foi adotado na maioria dos

² Fonte: Nordpool webpage: <http://www.nordpool.no>

países que reestruturaram seus setores elétricos, como por exemplo, Argentina, Colômbia, maioria dos países da América Central, diversos mercados elétricos dos Estados Unidos (PJM, NY, New England, Califórnia, Texas), toda a Europa Ocidental, Países Nórdicos, Austrália e Nova Zelândia [23].

1.3 Alternativa ao modelo de ofertas: despacho por custos

A alternativa tradicional ao esquema de ofertas é o chamado despacho por custo, onde os agentes ofertam seus *custos reais de operação*, que podem ser auditados, ou mesmo estimados pelo operador do sistema. Este processo envolve o recolhimento de informações e eventuais auditorias nos dados dos agentes realizadas pelo regulador ou pelo operador do sistema. O despacho baseado em custos é adotado em alguns países como, por exemplo, o Brasil, o Chile, o Peru, a Bolívia e em alguns países da América Central [23].

Enquanto no modelo de ofertas o preço de mercado é dado pela interseção entre a disposição a produzir e consumir dos agentes, no despacho por custo o preço *spot* é dado pelo *custo marginal de operação* – CMO, que é o custo marginal (variável dual) associado à restrição de atendimento à demanda no problema de operação de mínimo custo. O CMO representa o *custo* de atender um MWh incremental de demanda, ou seja, o CMO é uma estimativa do preço *spot* quando os agentes ofertam seus custos de operação, sem nenhuma estratégia de oferta, nem mesmo considerando seus compromissos contratuais.

1.4 Modelo de despacho e formação de preços por custos vs. modelo por ofertas

É possível demonstrar [50] que, na ausência de poder de mercado, ou seja, quando nenhum agente pode isoladamente controlar o preço *spot*, a estratégia de oferta ótima de uma empresa sob o esquema de pagamento *spot* consiste em ofertar um preço igual ao seu real *custo* variável de operação (ou seu custo de oportunidade). A razão é que qualquer oferta diferente deste custo leva ao risco do gerador não ser despachado quando o preço *spot* excede o custo de operação, e, portanto reduz sua rentabilidade.

³ Ignorando, por simplicidade, perdas e congestionamentos na rede de transmissão.

Adicionalmente, é também possível demonstrar [62] que o esquema de pagamento *spot* induz à expansão ótima do sistema.

Estas duas demonstrações formaram a base para a adoção do despacho por ofertas em muitos países: como é do melhor interesse de cada agente ofertar seu *custo* de operação, não seria necessário “auditar” os preços declarados pelos agentes geradores visando identificar se o real custo havia sido declarado. Além disso, observe que em muitas ocasiões não é uma tarefa simples para o operador do sistema realizar esta auditoria e efetivamente determinar o custo variável de operação de um recurso: por exemplo, alguns agentes térmicos possuem múltiplos contratos de fornecimento de combustível (com preços e características distintas – caso de térmicas bi-combustíveis⁴); outros agentes possuem contratos de produção de vapor adicionalmente à produção de energia elétrica (casos das usinas térmicas com co-geração); além de possuírem um custo de oportunidade indireto associado à oportunidade de utilizar o recurso hoje ou guardá-lo para o futuro, agentes hidroelétricos possuem múltiplos usos para a água; interconexões internacionais representam na verdade o custo “momentâneo” de venda de energia dos países exportadores, etc.

Dessa forma, e como discutido por diversos autores (ver [20],[59][89] e [101]), na ausência de poder de mercado o despacho por ofertas convergiria naturalmente para o despacho por custos sem a necessidade de centralização de informação (intervenção e auditoria nos dados) dos agentes, permitiria incorporar a diversidade de suas percepções de risco e contribuiria para uma operação mais *robusta* do sistema diante de eventos inesperados⁵.

Por outro lado, o despacho por ofertas possui duas desvantagens importantes: (i) potencial para perda de coordenação no despacho por ofertas para usinas hidroelétricas em “cascata” (mesma bacia hidrográfica), que foi analisado em [67] e [78]; e (ii) a presença de monopólios e oligopólios que permitam o exercício de manipulação de mercado por alguns agentes, conforme discutido em [17] e [59]. No Brasil, a possibilidade de implementação de um despacho baseado em ofertas de preços foi intensamente discutida em 2002 [22], mas sua implementação foi postergada.

⁴ Estas são usinas termoeletricas que podem operar com mais de um combustível (por exemplo gás natural e óleo diesel) que possuem custos distintos para estes insumos.

1.5 Estratégia de ofertas de agentes geradores em ambiente de mercado

A existência de um despacho baseado em ofertas e com um esquema marginalista de pagamento (pelo preço *spot*) criou diversos desafios técnicos e institucionais, que tem sido amplamente discutidos e estudados na literatura durante os últimos anos (ver [24] e [30]). Para as empresas geradoras de energia, a questão é como desenvolver estratégias de oferta que maximizem sua rentabilidade; por outro lado, reguladores estariam interessados em estudar estas estratégias de atuação buscando identificar abusos de posição dominante e manipulação de mercado que possam ser danosas ao consumidor final. Este poder está relacionado com a capacidade do gerador manipular, sozinho, o preço *spot* do sistema, seja através do aumento do preço ou da redução do montante ofertado⁶. Ele pode existir, por exemplo, em mercados concentrados (oligopólios), em horários de pico de demanda, e em sistemas com restrições de transmissão.

Geradores com potencial para exercer poder de mercado são usualmente conhecidos como *price makers* (ou *agentes estratégicos*) e os demais, como *price takers* (ou *tomadores de preço*). Será visto a seguir que estes dois tipos de geradores têm diferentes estratégias de oferta.

1.5.1 Estratégia de oferta para *price takers*

Em ambiente de mercado, o objetivo de um gerador é maximizar sua renda líquida, dada pela diferença entre o preço *spot* e seu custo variável de operação, multiplicada pela energia que foi despachada pelo operador de mercado. Uma empresa geradora *price taker* busca maximizar a soma da renda líquida de todos seus geradores, porém ela não é capaz de afetar o preço *spot* com suas ofertas (devido, por exemplo, ao seu tamanho em relação ao mercado).

Para um gerador *price taker*, mostra-se que, tanto para termoeletricas ([26], [50] e [62]) quanto para hidroelétricas [67], a estratégia ótima consiste em ofertar seu *real* custo variável de operação ou seu real custo de oportunidade. A razão é que, como o pagamento é feito pelo preço do gerador mais caro despachado (preço *spot*), qualquer

⁵ A questão essencial é se um único agente deve tomar a decisão em nome de todos (determinando o custo operativo de cada agente), ou se cada agente deve poder tomar sua própria decisão, incorporando sua visão específica sobre seus custos de oportunidade e assim “ofertando” seus preços.

⁶ O exercício de poder de mercado foi identificado em alguns mercados de eletricidade, sendo o caso da Inglaterra e mais recentemente a Califórnia [8] os mais divulgados.

oferta diferente deste custo aumenta o risco do gerador não ser despachado quando o preço *spot* excede o seu real custo de operação, e, portanto reduz sua rentabilidade.

1.5.2 Estratégia de oferta para *price makers* (estratégicos)

Assim como no caso anterior, o objetivo de um agente *price maker* (ou estratégico) é maximizar sua renda líquida. A diferença é que, no caso de um *price maker*, o preço *spot* pode ser afetado pela oferta do próprio gerador, o que torna a estratégia de oferta mais complexa e interessante mesmo em problemas de um único estágio, como o analisado nesta tese. Por exemplo, é possível a redução da quantidade ofertada – o que causa escassez e eleva o preço *spot* – resulte em uma renda líquida maior do que ofertar toda a capacidade disponível.

Este é o tema central desta tese e, como será visto posteriormente, a determinação da estratégia ótima de oferta para um agente *price maker* é um problema de otimização de dois níveis, que por sua vez pode ser transformado em um *problema de programação matemática com restrições de equilíbrio* (ou *Mathematical Program with Equilibrium Constraints* – MPEC, analisado em [53],[54][82] e [104]) através das condições de complementariedade de Karush-Kuhn-Tucker [16]. Como o problema de otimização resultante é não linear e não convexo, tem havido uma busca intensiva por mecanismos eficientes de solução. Entre as metodologias de solução propostas, encontram-se modelos iterativos e heurísticos (ver [74][75] e [84]), algoritmos específicos e modelos de equilíbrio (ver [18],[53]-[57],[82] e [106]). Embora diversas destas abordagens forneçam bons resultados, é reconhecido que usualmente não é possível garantir que a solução ótima global foi encontrada, como discutido em [53],[54] e [69]. Adicionalmente, algumas abordagens não podem ser estendidas com facilidade para incorporar importantes aspectos operativos do problema encontrados na “vida real”, tais como restrições de transmissão, decisões de partida de usinas térmicas e outros.

Para aliviar estas dificuldades, alguns autores têm recentemente proposto o uso de modelos e algoritmos de programação inteira-mista para a resolução do problema. Torre et al [96] foram pioneiros em utilizar um modelo de programação linear-inteira para representar a curva de demanda residual⁷ (não convexa) de uma empresa geradora *price*

⁷ A curva de demanda residual fornece o preço spot de mercado em função da quantidade ofertada pela empresa que se otimiza. É obtida através da subtração da oferta agregada de todos os geradores *price makers* da curva de oferta da demanda.

maker, o que permitiu o cálculo de estratégias de ofertas da mesma no mercado espanhol dadas as ofertas de seus concorrentes (consideradas como “conhecidas” ou “determinísticas”). A metodologia dos autores considera um modelo de ofertas “puras” de quantidades e não representa a rede de transmissão. Devido ao seu pioneirismo e importância, este modelo é descrito no Anexo A.

1.6 Representando o comportamento simultâneo de todos os agentes

A complexidade do problema de otimização da oferta de um agente *price maker* aumenta quando observamos que a formação do preço *spot*, e conseqüentemente de sua receita, dependem não só da oferta realizada por este agente, mas das ofertas realizadas por *todos* os demais agentes *price makers* (seus concorrentes ou “rivals”). Desta forma, passa a ser necessário representar no problema de ofertas do agente estratégico o processo de competição entre os demais agentes na formação de preços no mercado de curto prazo.

Existem essencialmente duas formas clássicas de representar o comportamento estratégico dos concorrentes:

- (i) abordagem por “incerteza”, onde apenas o problema de otimização de ofertas do agente estratégico é representado e as ofertas dos concorrentes são representadas através de *cenários*. Neste caso, a empresa estratégica busca determinar sua estratégia de oferta que maximize sua receita esperada ao longo de todos os cenários;
- (ii) abordagem por “teoria dos jogos”: neste caso os problemas de otimização de cada os agentes *price-makers* são representados conjuntamente e a reação dinâmica de todas as empresas às ofertas dos demais é representada por um jogo não cooperativo e cada empresa busca determinar sua estratégia de oferta que seja sua melhor resposta (maximizando sua receita) dadas às reações dos seus concorrentes.

Estes modelos serão discutidos a seguir.

1.6.1 Modelos de Ofertas sob incerteza

Os modelos de oferta por incerteza vêm sendo o foco de trabalho de alguns autores apenas mais recentemente, desde 2002 (ver [1],[4] e [19]). Nestes modelos as ofertas dos concorrentes são representadas por cenários, que passam a conter toda a informação sobre a “reação” dos demais agentes de mercado às ofertas da empresa estratégica que se otimiza. Nesta abordagem apenas o modelo de otimização de ofertas da empresa estratégica é representado explicitamente.

Por exemplo, o modelo de Torre et al [96] discutido anteriormente presume que as ofertas dos “demais” agentes são conhecidas, o que torna o problema determinístico. Para aliviar esta hipótese, Baillo em [1] e [4] também propõe um modelo de programação linear-inteira para o problema, porém considerando incertezas nas ofertas dos demais agentes. Sua abordagem é baseada em cenários para as curvas de demanda residual e fornece uma “curva de oferta” como estratégia de oferta resultante. A abordagem também é ilustrada em aplicações e exemplos derivados do sistema espanhol. Por sua vez, Candal e Fampa et al. em [19] e [34] propõe o uso de heurísticas primais-duais (baseadas naquelas propostas para o problema de dois níveis de tarifação apresentadas em Labbé, Marcotte e Savard [43][65]) para o problema de ofertas sob incerteza. O bom desempenho destas heurísticas é verificado através dos resultados de um modelo de programação inteira-mista, também proposto no trabalho.

1.6.2 Modelos baseados em teoria dos jogos

Por outro lado, os modelos para estratégias de oferta baseados em teoria dos jogos vêm sendo aplicados mais intensamente. Neste caso o processo de competição é simulado através da representação da maximização de lucros simultânea de todas as empresas estratégicas até a ocorrência de um equilíbrio, geralmente o Equilíbrio de *Nash* [41], que corresponde ao ponto onde nenhuma empresa consegue elevar seus lucros dados as ofertas dos seus concorrentes. Dessa forma, toda a informação sobre a reação dos demais agentes de mercado é obtida dinamicamente na medida em que o processo de competição entre os mesmos é simulado.

Como será mostrado nesta tese, as condições de Equilíbrio de *Nash* correspondem matematicamente a encontrar a solução viável de um conjunto de desigualdades, que, para o problema em estudo, são desigualdades não lineares e não convexas. A maioria

das soluções propostas para o problema de equilíbrios de Nash em mercados competitivos de eletricidade utiliza ou (i) processos iterativos (ver [74],[75] e [84]), onde as ofertas de todos os demais agentes são “congeladas” e o problema de ofertas é resolvido para o agente remanescente (o processo é repetido iterativamente até não ocorrer mudanças de solução); ou (ii) aplicam-se as condições de complementariedade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para cada subproblema de equilíbrio (MPEC) de um agente, para transformá-lo num conjunto de problemas não lineares de equilíbrio com restrições de equilíbrio, e em seguida resolver este conjunto de restrições de equilíbrio simultaneamente, utilizando algoritmos especializados (ver [31],[53] e [56]). Um problema de equilíbrio com restrições de equilíbrio é conhecido na literatura como *Equilibrium Problem with Equilibrium Constraints*, ou EPEC.

Todos os esquemas anteriores têm sido aplicados em diversas situações. Por exemplo, em [7],[10] e [63] apresenta-se um processo iterativo para calcular equilíbrios de Nash em mercados hidrotérmicos competitivos, foco de pesquisa do autor desta tese em sua dissertação de mestrado e de outros trabalhos publicados por pesquisadores brasileiros ([20],[21],[36], [38] e [108]).

1.6.3 Dificuldades e limitações encontradas

Algumas limitações também vêm sendo identificadas por pesquisadores em ambas abordagens anteriores: no caso de ofertas sob incerteza, a limitação do esforço computacional com o aumento linear do número de variáveis inteiras conforme a quantidade de cenários simulados no problema é uma importante dificuldade. Já nos modelos baseados em teoria dos jogos, as maiores dificuldades reportadas são relacionadas à convergência dos processos iterativos para equilíbrios de Nash e a dificuldade para identificar a existência de múltiplos equilíbrios.

Finalmente, em ambas as abordagens, não há garantia de otimalidade global com as condições KKT devido à não-convexidade do problema.

1.7 Objetivos deste Trabalho

O objetivo desta tese é propor uma abordagem alternativa de solução para o problema de determinar a estratégia de oferta ótima global de uma empresa geradora de energia elétrica *price maker* atuando em um mercado *spot* de curto prazo de energia. Esta estratégia deve ser determinada de forma a maximizar sua receita líquida sujeito às diversas restrições operativas das unidades geradoras da empresa. Como o interesse do trabalho é analisar estratégias de ofertas em mercados diários de energia (curto prazo), o acoplamento temporal para horizontes de análise mais extensos não é considerado.

Como mencionado anteriormente, as grandes dificuldades deste problema residem em:

- (i) mesmo em seu caso mais simples⁸, o problema de otimização associado é do tipo “dois níveis” e cujo equivalente em um nível é não linear e não convexo, o que dificulta a utilização eficiente de métodos de programação não linear convencionais; e
- (ii) o preço *spot* da energia, componente principal da remuneração da empresa, depende das ofertas realizadas pela empresa e por todos os seus concorrentes. Como estas ofertas não estão disponíveis para nenhuma empresa no momento em que a estratégia é elaborada, é necessário levar em consideração o comportamento simultâneo de todos os concorrentes ao agente que se otimiza ou a incerteza nas ofertas destes.

Desta forma, visando aliviar as dificuldades anteriores, esta tese divide-se em três partes principais: na Parte I, é proposto um modelo de programação inteira mista, baseada na expansão binária das principais variáveis de decisão, para resolver o problema de determinar a estratégia de oferta ótima de uma empresa geradora em mercados de eletricidade (item (i) anterior). Este modelo, que não utiliza a abordagem usual de curva de demanda residual, é uma extensão do modelo inteiro-misto proposto em [19] e [34] para ofertas “puras” de preços, também baseado em decomposição binária de variáveis. Porém, o modelo proposto na presente tese difere do modelo de [19] e [34] em alguns aspectos importantes e fundamentais visando torná-lo computacionalmente eficiente, como, por exemplo, na forma de aplicação da expansão

⁸ Onde as ofertas dos concorrentes são conhecidas, não há rede de transmissão e unit commitment, por exemplo.

binária. Além disso, o modelo proposto nesta tese é aplicado ao caso geral do problema de ofertas, onde a otimização simultânea de preços e quantidades é realizada, e são representadas diversas extensões do modelo para incorporar vários aspectos operativos relevantes do problema, como por exemplo, restrições de transmissão, custos operativos não convexos (decisões de start-up de unidades), critérios de risco e decisões de investimento em nova capacidade e em instrumentos financeiros.

Em seguida, na Parte II da tese, se considerará a incerteza das ofertas realizadas pelos concorrentes (item (ii)) no modelo proposto. Inicialmente o mesmo será estendido para um modelo estocástico, onde o problema de otimização do agente estratégico é representado e a incerteza em torno das ofertas dos concorrentes é modelada através de cenários. A “explosão” do número de variáveis inteiras com o número de cenários considerados, observada em [19] e [34], é aliviada neste trabalho. Todos os modelos inteiro-mistos são resolvidos por algoritmos do tipo Branch and Bound. A utilização *prática* do modelo sob incerteza seria através de uma empresa atuante em um mercado atacadista de energia, visando elaborar suas estratégias de ofertas. Para demonstrar tal aplicabilidade, um estudo de caso completo com a metodologia proposta é apresentado.

Finalmente, na Parte III da tese, o modelo é estendido para (alternativamente) representar a dinâmica da reação dos concorrentes através de um jogo não cooperativo, onde o problema de otimização de cada agente estratégico é simultaneamente representado e os mesmos “reagem” dinamicamente às ofertas de seus concorrentes. Neste caso, a solução buscada é uma situação de equilíbrio competitivo, conhecido como Equilíbrio de *Nash*, e representado por um conjunto de desigualdades que buscam a solução na qual todos os agentes estão “satisfeitos” dadas as ofertas dos seus demais competidores. Desta forma, o modelo de programação inteira mista apresentado nesta tese será estendido para o cálculo de equilíbrios de Nash em mercados spot de energia elétrica. Em termos de aplicação *prática*, este modelo pode ser utilizado, por exemplo, por reguladores interessados em análise e identificação de poder de mercado em mercados atacadistas de energia com despacho por ofertas. Serão discutidas e apresentadas diversas particularidades de modelos baseados em teoria dos jogos, como por exemplo, procedimentos para, com o modelo proposto, identificar e enumerar múltiplos equilíbrios de Nash.

1.8 Organização deste Trabalho

Esta tese está organizada em três partes principais da seguinte forma:

O Capítulo 2 apresenta uma introdução e visão geral do problema de estratégia de ofertas ótimas em mercados atacadistas de energia. Em seguida apresenta-se o problema de estratégias de ofertas de uma empresa price maker e a formulação de um nível não linear é discutida. Por simplicidade de apresentação, neste capítulo discutimos uma versão simples do problema: sem restrições de transmissão, sem unit commitment e uma única etapa.

Conforme será visto no Capítulo 2, o problema de estratégias de ofertas ótimas, mesmo em sua versão mais simples, é de difícil solução devido às não linearidades na função objetivo, nas restrições e sua não-convexidade.

O Capítulo 3 apresenta a Parte I desta tese e introduz uma abordagem de solução por programação inteira-mista capaz de aliviar as dificuldades discutidas no Capítulo 2.

O Capítulo 4 apresenta diversas extensões do modelo de ofertas, incluindo representação de restrições de transmissão, custos de partida, decisões financeiras, decisões de expansão de capacidade e modelos de ofertas puras de preço e quantidade.

O Capítulo 5 apresenta a Parte II deste trabalho e estende o modelo apresentado na Parte I para representar o processo de competição entre os agentes no processo de formação de ofertas no mercado de curto prazo. Neste modelo, o comportamento dos concorrentes é definido por cenários, e um modelo de ofertas sob incerteza é apresentado.

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta a Parte III desta tese e estende mais uma vez os modelos até então apresentados para agora representar explicitamente a *dinâmica* da competição entre os agentes utilizando uma abordagem pela “teoria dos jogos”.

O Capítulo 7 relaciona as conclusões desta tese, resume as principais contribuições e sugere os desenvolvimentos futuros.

Complementa esta tese um conjunto de cinco anexos, onde foram colocados todos os principais modelos e desenvolvimentos complementares aos apresentados no corpo

principal do documento e também todas as análises computacionais adicionais realizadas durante o desenvolvimento desta tese.

2 ESTRATÉGIA DE OFERTAS EM MERCADOS DE CURTO PRAZO DE ENERGIA

Este Capítulo apresenta uma visão geral do problema de estratégia de ofertas ótimas em mercados de curto prazo de energia. Inicialmente o despacho econômico executado pelo operador do sistema (ou operador do mercado, em alguns países) é exposto, em seguida apresenta-se o problema de estratégias de ofertas de uma empresa price maker e o modelo de complementariedade não linear é discutido. Por simplicidade de apresentação, neste capítulo discutimos uma versão simples do problema: sem restrições de transmissão, sem unit commitment e uma única etapa. Posteriormente estas simplificações serão relaxadas.

2.1 Notação

O sistema em análise é composto de J geradores, indexados por $j = 1, \dots, J$. Alguns deles pertencem à empresa price maker cuja oferta estamos otimizando, denominada de empresa (ou agente) A , e são indicados por $j \in A$; os demais geradores são indicados por $j \notin A$.

As ofertas de $j \in A$ são as principais variáveis de decisão do Problema de estratégia de ofertas da empresa A . Estas ofertas são caracterizadas por preços $\{\lambda_j, j \in A\}$ (\$/MWh) e quantidades $\{E_j, j \in A\}$ (MWh). Neste Capítulo as ofertas de preço e quantidade dos demais geradores $j \notin A$ são assumidas como conhecidas e são representadas no Problema de ofertas por $\{\lambda_j^0, j \notin A\}$ e $\{E_j^0, j \notin A\}$. Por facilidade de notação, supõe-se que a demanda não faz ofertas (ou seja, é inelástica a preços) e que cada estágio de comercialização tem duração de uma hora.

2.2 Despacho Econômico

A produção de cada gerador pelo esquema de ofertas é determinada como em um leilão: para cada estágio do horizonte de estudo (que pode ser cada hora do dia seguinte ou cada hora da semana corrente), o operador do sistema recebe ofertas de quantidade e preço de energia que cada agente de geração está disposto a vender⁹. De posse destas

⁹ No despacho por custos, os agentes ofertam suas capacidades totais e seus custos reais de produção (que muitas vezes são calculados pelo operador do sistema). Note que, no despacho por ofertas, as ofertas de preço podem ser distintas do real custo de produção das usinas.

ofertas e a partir de uma previsão da demanda d do sistema, o operador define o despacho econômico de mínimo custo e o preço do mercado, resolvendo o seguinte Problema (linear) de programação matemática:

$$z = \text{Min} \sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j \quad \text{variável dual}$$

sujeito a: (2.1)

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad \pi_d \quad (2.1a)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j \quad \forall j \in A \quad \pi_{gj} \quad (2.1b)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j^0 \quad \forall j \notin A \quad \pi_{gj} \quad (2.1c)$$

onde:

z Custo operativo do sistema (\$)

g_j Energia produzida pelo gerador j (MWh)

d Demanda (MWh)

No Problema (2.1), a equação (2.1a) representa o atendimento à demanda; as restrições (2.1b) e (2.1c) definem os limites de geração.

A solução do Problema (2.1) pode ser obtida ordenando-se crescentemente os preços das ofertas, “acumulando” as quantidades ofertadas, até que a demanda total seja atendida. A Figura 2-1 ilustra um exemplo do custo operativo total (função objetivo de (2.1)) em um despacho de mínimo custo com três geradores, considerados em ordem crescente de ofertas de preços. Observa-se que os geradores 1 e 2 estão produzindo toda a respectiva capacidade, enquanto o gerador 3 produz parcialmente, o suficiente para fechar o balanço geração x demanda.

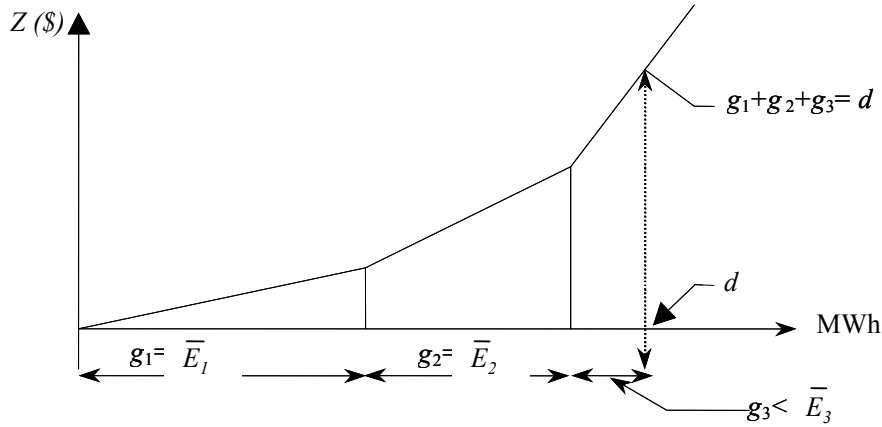


Figura 2-1 – Custo Operativo total x Despacho do sistema

Associado às restrições (2.1a)-(2.1c) do despacho de mínimo custo, existe um conjunto de variáveis duais. Pela teoria de dualidade em programação linear, na solução ótima do problema, o valor da variável dual π_d , associada à restrição de atendimento a demanda, representa a derivada do custo z de operação do sistema em relação à variação na demanda d ($\partial z / \partial d$). Em outras palavras, assumindo não degenerescência, a variável dual π_d representa o incremento do custo operativo z se houver um aumento unitário na demanda. Este valor é conhecido como custo marginal de curto prazo ou preço *spot* do mercado de curto prazo, que é o preço de mercado que remunerará todos os geradores.

Na Figura 2-1, pode-se observar que o custo marginal é igual ao preço ofertado pelo último gerador despachado, no caso, o gerador 3. Por esta razão, este último gerador despachado é conhecido como “gerador marginal do sistema”.

2.3 Estratégia de oferta para price makers

Como observado anteriormente, o despacho econômico fornece a produção de cada usina $\{g_j, j \in A\}$ (MWh), assim como o preço *spot* do sistema (\$/MWh), dado pela variável dual π_d associada à restrição de atendimento a demanda.

Cada usina $j \in A$ recebe uma remuneração bruta dada pelo produto do preço *spot* do sistema π_d , e sua produção, g_j . A remuneração líquida de cada gerador (\$) corresponde à diferença entre a remuneração bruta $\pi_d g_j$ e seu custo operativo $c_j g_j$. A remuneração líquida total da empresa A, proprietária de vários geradores, é denotada por R e dada pela soma das remunerações líquidas de todos seus geradores:

$$R = \sum_{j \in A} [\pi_d - c_j] g_j \quad (2.2)$$

2.4 Estratégia de oferta

O objetivo da empresa A é determinar a combinação de oferta de preço e quantidade $\{\lambda_j; E_j, j \in A\}$ que maximiza sua renda operacional líquida total¹⁰ (R):

$$\begin{aligned} \text{Max } R = & \sum_{j \in A} [\pi_d(\lambda_j, E_j)_{j \in A}, (\lambda_j^0, E_j^0)_{j \notin A} - c_j] g_j(\lambda_j, E_j)_{j \in A}, (\lambda_j^0, E_j^0)_{j \notin A} \\ \text{sujeito a:} & \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad \forall j \in A \quad (2.3a)$$

onde $\bar{g}_j$ é a capacidade máxima de produção da usina j . É implicitamente assumido nesta tese que *todas* as variáveis de decisão devem ser positivas ou iguais a zero.

A notação $\pi_d(\cdot)$ e $g_j(\cdot)$ na função objetivo do problema lembra que o preço *spot* e a produção de cada usina resultam da solução de um outro problema de otimização, o despacho de mínimo custo (2-1). A solução do despacho de mínimo custo, por sua vez, depende das ofertas de preço e quantidade de todos os geradores, não apenas daqueles pertencentes à empresa A, e que não estão disponíveis no momento que esta empresa realiza sua oferta. Neste primeiro momento, vamos assumir que as ofertas destas outras empresas (concorrentes) são conhecidas.

A Figura 2-2 abaixo ilustra o processo de decisão.

¹⁰ Observe que este problema de otimização é limitado, pois sempre é possível encontrar, no problema seguidor (2.1) um conjunto de geradores que atendam a totalidade da demanda com a exceção daqueles pertencentes à empresa A. No caso extremo, teremos um déficit, que é representado por um gerador “fictício” cuja oferta de preço é o custo de déficit e cuja capacidade de produção é infinita.

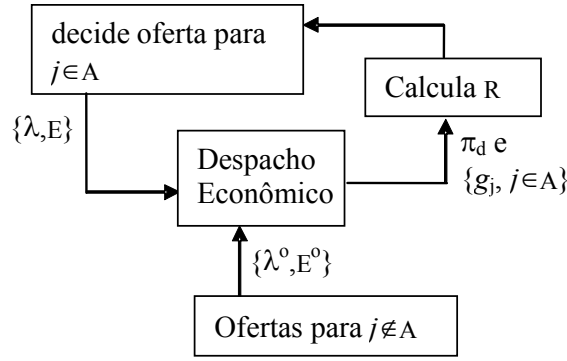


Figura 2-2 – Processo de decisão do agente *price maker*

Como discutido em [19][54][57][98][100], os problemas de otimização como os apresentados na Figura 2-2, onde as variáveis de decisão dependem da solução de outro problema de otimização, são conhecidos como problemas de otimização de dois níveis. O primeiro nível, dado pelo Problema (2.3) é chamado “líder” e representa os interesses da empresa A, que busca maximizar seus lucros. O segundo nível, dado pelo Problema (2.1) é chamado de “seguidor” e representa os interesses do operador do sistema, interessado em realizar o despacho operativo do sistema e atender a demanda de forma a minimizar o custo de operação do sistema. O modelo (2.4) abaixo apresenta o problema de dois níveis correspondente ao processo da Figura 2-2:

$$\text{Max}_{j \in A} R = \sum_{j \in A} [\pi_d(\lambda_j, E_j)_{j \in A}, (\lambda_j^0, E_j^0)_{j \notin A} - c_j] g_j(\lambda_j, E_j)_{j \in A}, (\lambda_j^0, E_j^0)_{j \notin A} \quad (2.4)$$

sujeito a:

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j \in A \quad (2.4a)$$

$$\text{Min} \quad \sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j \quad (2.4b)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad (2.4c)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j \quad \forall j \in A \quad (2.4d)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j^0 \quad \forall j \notin A \quad (2.4e)$$

Também como discutido em [19] e [96] e mostrado no Anexo A, o problema de otimização anterior é não linear e não convexo e, portanto, de difícil solução. Usualmente, algumas simplificações são realizadas para estudar propostas de solução, como por exemplo, considerar apenas ofertas de quantidades (oferta de preço = zero),

como analisado em [96], ou apenas ofertas de preços (quantidades = capacidade total), como analisado em [19]. O Anexo A ilustra a aplicação de um modelo de ofertas por quantidades.

2.5 Formulação como um problema de otimização não linear de um nível

Como visto, no problema de otimização (2.3) a função objetivo (remuneração operacional líquida) envolve variáveis primais – g_j – e duais – π_d – associadas à solução do problema de despacho de mínimo custo (problema seguidor) e formando assim um problema de otimização de dois níveis.

Uma maneira de representar explicitamente ambas as variáveis em um único problema de otimização é utilizar as condições de otimalidade do problema de despacho econômico (2.1), obtendo assim um problema de otimização num único nível. Como mencionado, a região viável do problema de despacho de mínimo custo (problema seguidor) é limitada e não vazia. O problema seguidor é linear, portanto, convexo e, com isso, podemos substituí-lo por suas condições de otimalidade. Assim, escrevendo as condições de complementariedade de (2.1) em conjunto com suas restrições primais e duais no problema de oferta (2.3) podemos obter uma formulação em um único nível:

$$\text{Max } R = \sum_{j \in A} [\pi_d - c_j] g_j \quad (2.5)$$

sujeito a:

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad (2.5a)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad (2.5b)$$

$$g_j - E_j \leq 0 \quad j \in A \quad (2.5c)$$

$$g_j \leq E_j^0 \quad j \notin A \quad (2.5d)$$

$$\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j \leq 0 \quad j \in A \quad (2.5e)$$

$$\pi_d + \pi_{gj} \leq \lambda_j^0 \quad j \notin A \quad (2.5f)$$

$$\pi_{gj} \leq 0 \quad \forall j \quad (2.5g)$$

$$(\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j) g_j = 0 \quad j \in A \quad (2.5h)$$

$$(\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j^0) g_j = 0 \quad j \notin A \quad (2.5i)$$

$$(E_j - g_j) \pi_{gj} = 0 \quad j \in A \quad (2.5j)$$

$$(E_j^0 - g_j) \pi_{gj} = 0 \quad j \notin A \quad (2.5k)$$

As restrições (2.5a) são as restrições do problema de ofertas (“líder” no problema de dois níveis). Os conjuntos de restrições (2.5b)-(2.5d) e (2.5e)-(2.5g) são (respectivamente) as restrições primais e duais do problema “seguidor”, que é o problema de despacho econômico (2.1). Finalmente, as restrições (2.5h)-(2.5k) são as condições de complementariedade entre restrições do dual do problema seguidor e suas variáveis primais e vice-versa.

Assim, observe que o conjunto de restrições (2.5b) – (2.5k) *substitui* o problema de otimização do despacho econômico (2.1). Ou seja, qualquer par de ofertas $(\lambda_j, E_j, j \in A)$ que seja viável do conjunto de restrições de (2.5), estará automaticamente satisfazendo ao despacho econômico de mínimo custo do sistema.

Problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio

O Problema (2.5) é um problema de programação não linear com restrições de complementariedade (também conhecidas como restrições de “equilíbrio”). As não linearidades decorrem da existência de produtos de variáveis de decisão na função objetivo - $\pi_d g_j$ - e nas restrições de complementariedade ($\pi_d g_j$, $\pi_{gj} g_j$, $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$), que introduzem não convexidades.

Este problema é uma instância de uma classe de problemas de programação matemática conhecida na literatura como “Problemas de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio” (ou MPEC – Mathematical Program with Equilibrium Constraints) [69], que vêm sendo largamente estudada e aplicada para a solução de problemas de equilíbrios de mercado e equilíbrio econômico, como o problema de estratégias de ofertas [53][54] que é analisado e estudado nesta tese. Conforme [69] um MPEC é formalmente definido como um problema de programação não linear

A maior dificuldade para a solução deste problema está nos produtos de variáveis na função objetivo e nas restrições de complementariedade, que introduzem não linearidades e não convexidades. Estas dificuldades decorrentes de MPEC¹¹ para a programação não linear são bem conhecidas (como discutido em [1] e [69]) e uma grande variedade de algoritmos específicos têm sido desenvolvidos e aplicados para este tipo de problemas nos últimos anos, como, por exemplo, os métodos de pontos

interiores, algoritmos baseados em funções de penalidades (por exemplo a função de Fischer-Burmeister) e algoritmos de programação quadrática seqüencial combinados com métodos de penalidades ([14][40][53][56][66]). A maior característica destas abordagens de solução é a inexistência de garantia de otimalidade global, como visto em [53][56][96][33][34,37,71]. Em alguns casos são utilizados procedimentos heurísticos para verificar a otimalidade global. Por exemplo [53] utiliza um MPEC para estudar ofertas estratégicas em mercados elétricos e apresenta um procedimento de geração aleatória de pontos iniciais para um método de pontos interiores até ter “confiança” de que a solução ótima (supostamente) global foi atingida. Uma observação importante é que, adicionalmente à limitação de otimalidade global, algumas abordagens não podem ser necessariamente estendidas para incorporar aspectos importantes do problema como restrições de transmissão, custos de partida das usinas e unit commitment.

Uma alternativa para resolver o Problema (2.5) é utilizar pacotes específicos de programação não linear, como o MINOS [70] ou LOQO [68]. Entretanto, resultados experimentais apresentados em [33], que compara a aplicação do pacote LOQO (que utiliza um algoritmo de otimização de pontos interiores primal-dual) contra a metodologia proposta nesta tese para a solução do MPEC (2.5), o problema é não convexo e ótimos locais são frequentes.

Em tentativas para aliviar estas dificuldades, algumas abordagens recentes utilizando programação inteira tem sido propostas para a resolução de MPECs no setor elétrico, como por exemplo [1][4][19][34][96]. Nesta tese é proposto um modelo baseado em programação inteira alternativo aos anteriores, o qual será discutido no próximo capítulo. Como será visto nos próximos Capítulos, um aspecto bastante atrativo do modelo proposto é a não explosão do número de variáveis binárias quando for considerado o problema de oferta sob incerteza, diferente do que ocorre no modelo proposto em [19] e [34]. Adicionalmente, serão apresentadas diversas extensões, incluindo o cálculo de equilíbrios de Nash.

Para o restante dos desenvolvimentos desta tese, vamos utilizar um modelo de otimização que representa as restrições de complementariedade por sua forma equivalente, isto é, através da igualdade prima-dual do problema seguidor:

¹¹ Esta nomenclatura é equivalente à MPCC (*Mathematical program with complementarity constraints*) ou problema de programação matemática com restrições de complementariedade [83].

Como $g_j \geq 0 \forall j$, (2.5h) e (2.5i) implicam que:

$$(\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j)g_j \leq 0 \quad j \in A \quad (2.6)$$

$$(\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j^0)g_j \leq 0 \quad j \notin A \quad (2.7)$$

A partir de (2.5c), (2.5d) e (2.5g), temos:

$$(E_j - g_j)\pi_{gj} \leq 0 \quad j \in A \quad (2.8)$$

$$(E_j^0 - g_j)\pi_{gj} \leq 0 \quad j \notin A \quad (2.9)$$

Como cada termo acima é não-positivo, as restrições de complementariedade (2.5h) – (2.5k) são então equivalentes a:

$$\sum_{j \in A} (\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j)g_j + \sum_{j \notin A} (\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j^0)g_j + \sum_{j \in A} (E_j - g_j)\pi_{gj} + \sum_{j \notin A} (E_j^0 - g_j)\pi_{gj} = 0 \quad (2.10)$$

Reordenando os termos e utilizando a igualdade (2.5b), a expressão (2.10) é equivalente à igualdade prima-dual do problema seguidor:

$$\sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j - \pi_d d - \sum_{j \in A} \pi_{gj} E_j - \sum_{j \notin A} \pi_{gj} E_j^0 = 0 \quad (2.11)$$

Em outras palavras, podemos *reescrever* as restrições de complementariedade de forma *equivalente* à igualdade primal-dual entre as funções objetivo do problema seguidor e seu dual. Este é um conhecido resultado da teoria de programação linear [29] e será utilizado nesta tese.

Assim, a forma final do problema de otimização de um nível que consideramos para os desenvolvimentos desta tese consiste em substituir o problema seguidor (2.1) - despacho econômico - pelas suas condições de otimalidade, que consistem em: suas viabilidades primais e duais e igualdade entre as funções objetivo dos seus problemas primal e dual.

Incorporando as restrições primais-duais e as condições de complementariedade de (2.1) no problema de oferta (2.3), e movendo para o lado esquerdo as variáveis de decisão (ofertas de preços, quantidades das usinas da empresa A – lembrando que as ofertas dos demais agentes são assumidas até o momento como conhecidas), temos a formulação num único nível do problema de ofertas:

$$\begin{aligned}
\text{Max } R = & \sum_{j \in A} [\pi_d - c_j] g_j \\
\text{sujeito a:} & \quad \quad \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Restrições do problema de oferta	{	$E_j \leq \bar{g}_j$	$j \in A$	(2.12a)
Restrições primais do despacho econômico	{	$\sum_{j=1}^J g_j = d$		(2.12b)
		$g_j - E_j \leq 0$	$j \in A$	(2.12c)
		$g_j \leq E_j^0$	$j \notin A$	(2.12d)
Restrições duais do despacho econômico	{	$\pi_d + \pi_{gj} - \lambda_j \leq 0$	$j \in A$	(2.12e)
		$\pi_d + \pi_{gj} \leq \lambda_j^0$	$j \notin A$	(2.12f)
		$\pi_{gj} \leq 0$	$\forall j = 1, \dots, J$	(2.12g)
Igualdade Primal-Dual	{	$\sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j - \pi_d d - \sum_{j \in A} \pi_{gj} E_j - \sum_{j \notin A} \pi_{gj} E_j^0 = 0$		(2.12h)

O vetor de ofertas de preços $\{\lambda_j\}$ e quantidades $\{E_j\}$ para as usinas pertencentes à empresa A são variáveis de decisão e, portanto, estão colocadas no lado esquerdo das restrições de (2.12). Supõem-se que são conhecidas as ofertas das demais usinas $\{\lambda_j^0, j \notin A\}$ e $\{E_j^0, j \notin A\}$, representadas no lado direito das restrições primais e duais de (2.12).

Como visto anteriormente, o Problema (2.12) é equivalente ao Problema (2.5) e, portanto, um Problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio. A maior dificuldade para sua solução está nos produtos de variáveis na função objetivo - $\pi_d g_j$ - e na igualdade primal-dual - $(\lambda_j g_j + \pi_{gj} E_j)$, que introduzem não linearidades e não convexidades. Entretanto, observe que temos no Problema (2.12) *três* tipos distintos de produtos de variáveis ($\pi_d g_j$, $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$), enquanto no Problema (2.5) temos *quatro* produtos ($\pi_d g_j$, $\pi_{gj} g_j$, $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$). Este aspecto será uma vantagem para os modelos desenvolvidos nesta tese e, portanto, o modelo (2.12) é o modelo principal para os demais desenvolvimentos a partir deste Capítulo.

2.6 Revisão Bibliográfica

Nesta tese a revisão bibliográfica é realizada conforme os distintos assuntos são abordados. Nesta seção será realizado um breve resumo dos trabalhos mais importantes

relacionados a esta tese, outros trabalhos serão referenciados ao decorrer do texto e conforme a ocasião.

Com o “boom” da reestruturação do setor elétrico em diversos países e a criação do despacho baseado em ofertas, muitos trabalhos têm sido escritos nos últimos anos sobre estratégias de ofertas de agentes geradores, como visto em [30]. Estes trabalhos visam, sobretudo, subsidiar comitês de monitoramento de mercado com metodologias e modelos para identificar comportamento estratégico ou o exercício de poder de mercado e são em sua grande maioria desenvolvidos para sistemas térmicos, como o desenvolvimento desta tese.

Como visto nas seções anteriores, mesmo em sua situação mais simples, em que se procura otimizar a oferta de um único estágio, o problema de determinar a estratégia de ofertas é bastante complexo por ser não linear e não convexo.

Na literatura, este problema é usualmente formulado como um problema de otimização do tipo “dois níveis” (onde o produtor deseja maximizar sua receita e o operador do mercado deseja minimizar o custo de operação do sistema), que por sua vez é transformado em um modelo não linear de “equilíbrio¹²” (MPEC) através da aplicação das condições de otimalidade ao problema de minimização de custos do operador do sistema, formando assim um problema de otimização de apenas “um nível”. Esta é a abordagem apresentada em diversos trabalhos, como [18][56][53][54][82] e [83]. Quando o processo competitivo simultâneo de todos os agentes price-makers é modelado, as condições de maximização de cada agente são escritas “simultaneamente”, formando assim um sistema de equações, que são resolvidas de forma conjunta para todos os agentes e determinam um Equilíbrio de *Nash*. Este modelo é conhecido como “Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio” (ou EPEC – *Equilibrium Problem with Equilibrium Constraints*), será discutido na Parte III desta tese e é a abordagem apresentada em diversos trabalhos, como [56][57][59][99] e [104].

Entretanto, este sistema de equações é não linear (conforme visto anteriormente), dando origem a um problema de complementariedade não linear (NCP¹³). Esta é a abordagem adotada por alguns autores, como em [106]. Outros autores trabalham com a curva de “demanda residual” aos price makers, que é uma curva relacionando o preço do

¹² Como já mencionado, é também conhecido como “modelo de complementariedade”.

mercado à oferta do agente price maker, obtida subtraindo-se da demanda total as ofertas dos concorrentes. Muitos autores assumem que esta relação é linear, o que assegura a linearidade do problema de complementariedade associado (formando um problema de complementariedade linear - ou LCP¹⁴), que pode ser resolvido utilizando pacotes comerciais específicos. Esta é a abordagem utilizada em [18], [54] e [55].

Uma terceira abordagem de solução é o chamado “equilíbrio pela curva de oferta”, ou Supply Function Equilibria (SFE), introduzido em [64]. Esta abordagem consiste em modelar a curva de oferta de um agente (e não somente a oferta de um par quantidade-preço) e tem sido utilizada em análises de equilíbrio em mercados competitivos de eletricidade. Em particular, o modelo *linear* de equilíbrio pela curva de oferta (LSF) tem atraído alguns pesquisadores ([6] e [31]).

Finalmente, algumas abordagens baseadas em programação linear-inteira têm aparecido na literatura mais recentemente, voltadas essencialmente para a otimização da estratégia de uma específica empresa price maker [4][19], [34] e [96].

Para agentes hidroelétricos, a incerteza na hidrologia e a possibilidade do “armazenamento” da energia sob a forma de estoque de água em reservatórios somam-se às complexidades anteriormente descritas do problema de ofertas. Com isso, modelos de programação inteira tornam-se inviáveis e modelos baseados em programação dinâmica estocástica vêm sendo mais utilizados.

Diversos trabalhos vêm sendo publicados recentemente para determinar estratégia de ofertas de agentes hidroelétricos price takers, sobretudo inspirados no desenho do mercado Nórdico de eletricidade (Nordpool). Nestes trabalhos [37][45][67][81], o preço de mercado é uma variável exógena, cuja incerteza é modelada através de cenários. Assim, a estratégia de oferta do agente é modelada num enfoque multi-estágio e estocástico, onde cenários de preços de mercado e vazões são informados e técnicas de programação dinâmica estocástica (PDE) são utilizadas para criar funções de benefício futuro para os agentes e, desse modo, representar o impacto das decisões de uma etapa em etapas subsequentes.

¹³ Non linear complementarity problem.

¹⁴ Linear complementarity problem.

Esta abordagem foi estendida em [88] para estudar estratégias de ofertas de agentes price-makers, que propuseram um modelo para analisar manipulação de mercado no sistema da Nova Zelândia com um modelo multi-estágio, e novamente estendida em [7] e [63], que modelou o processo de competição entre agentes hidroelétricos no sistema Brasileiro num enfoque multi-estágio e estocástico, onde a cada estado da recursão de PDE é encontrado um Equilíbrio de Nash-Cournot entre os agentes. Este trabalho também analisa os efeitos de contratos bilaterais como mecanismos para mitigar o exercício de poder de mercado. Esta é a abordagem também adotada em [84], que assume as funções de benefício futuro já calculadas e analisa o problema de curto prazo para o sistema Chileno por um procedimento heurístico. Mais recentemente, [108] apresentou um procedimento de programação dinâmica determinística com uma representação linear-inteira da função de benefício futuro e [74] apresentou procedimentos heurísticos/iterativos para verificar exercício de poder de mercado, ambos aplicados ao sistema Brasileiro. Os trabalhos [21] e [36] estendem para o caso estocástico o modelo apresentado em [108] e também representam a elasticidade da demanda, em uma análise do exercício de poder de mercado em sistemas hidrotérmicos.

Como amplamente discutido, a desvantagem dos algoritmos baseados em programação dinâmica reside no fato de que o número de estados cresce exponencialmente com o número de usinas – a chamada “maldição da dimensionalidade”. Assim sendo, apenas problemas de dimensão reduzida (com poucas usinas price makers) podem ser resolvidos na prática, como foi o caso de todas as referências anteriores.

Para aliviar esta dificuldade, em [37], é apresentado um procedimento para determinar a oferta estratégica de uma empresa geradora com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluências. A abordagem proposta é procurar superar as dificuldades da PDE com a aplicação da metodologia de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), até então utilizada em problemas de minimização de custo, ao problema de otimização da oferta. O núcleo da metodologia proposta consiste em “concavizar” a função de remuneração (que é não-concava) e aproximar esta concavização por uma função linear por partes usando um esquema de decomposição. Em [20] esta abordagem é estendida para múltiplas empresas price makers, múltiplas etapas, múltiplos cenários e num modelo de teoria dos jogos.

3 PARTE I: UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA MISTA

Conforme visto no Capítulo anterior, o problema de estratégias de ofertas ótimas, mesmo em sua versão mais simples, é de difícil solução devido às não linearidades na função objetivo, nas restrições e sua não-convexidade. Este Capítulo inicia a Parte I desta tese, que introduz uma abordagem de solução por programação inteira-mista capaz de aliviar estas dificuldades.

3.1 Motivação

A motivação por trás da formulação que será proposta a seguir está no reconhecimento que as empresas de geração de energia ofertam, na prática, preços e quantidades em mercados de curto-prazo dentro de “intervalos” de oferta discretos pré-estabelecidos. Por exemplo, a oferta de preços de uma usina térmica é limitada inferiormente pelo seu custo real de produção (não faz sentido ofertas inferiores ao custo), ofertas de quantidade de hidroelétricas são limitadas inferiormente pelo volume mínimo operativo da usina (a partir do qual a operação das máquinas não é mais possível) e limites superiores para ambas as variáveis também são observados (a maior oferta de preços realizada é o “limite superior”, ou *price cap*, adotado por reguladores, etc). Além disso, o mecanismo de aprendizado observado no mercado atacadista de energia resulta em ofertas realizadas entre intervalos que realmente garantam uma estratégia eficiente.

De um modo geral, a experiência prática mostra que as ofertas são sempre realizadas através de valores limitados dentro de um intervalo discreto, cuja definição é de responsabilidade da empresa. Isto nos que motiva propor a abordagem descrita a seguir.

3.2 Abordagem de solução: expansão binária

A abordagem de solução proposta nesta tese é transformar os produtos de variáveis π_d , g_j , $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$ em uma formulação linear-inteira através de uma decomposição (ou discretização) binária das variáveis de decisão. Esta formulação foi introduzida no escopo desta tese [77], em seguida utilizada em [19] para um modelo linear-inteiro exato de ofertas “puras” de preços (as ofertas de quantidades são fixas e iguais à capacidade máxima das usinas). Formulações discretas têm sido comum na literatura no escopo de problemas de ofertas. Neste sentido destaca-se o trabalho de Zhang e Birge,

que em [95] propõe uma abordagem discreta simples para calcular equilíbrios em mercados competitivos.

A seguir apresentamos uma proposta alternativa para a aplicação da expansão binária e para um ambiente de ofertas conjuntas de preços e quantidades.

3.2.1 Redefinindo o produto $\pi_d g_j$

Inicialmente, eliminamos o produto $\pi_d g_j$ reescrevendo-o em função dos outros dois produtos de variáveis já existentes. Para isto, utilizamos as condições de complementariedade associadas à solução ótima do problema de despacho econômico (2.1) apresentado no capítulo anterior e repetido abaixo por conveniência:

$$z = \text{Min} \quad \sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j \quad \text{variável dual}$$

sujeito a: (3.1)

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad \pi_d \quad (3.1a)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j \quad \text{para } j \in A \quad \pi_{gj} \quad (3.1b)$$

$$0 \leq g_j \leq E_j^0 \quad \text{para } j \notin A \quad \pi_{gj} \quad (3.1c)$$

Pelo teorema forte das folgas complementares, temos:

$$(\lambda_j - \pi_d - \pi_{gj})g_j = 0 \quad (3.2)$$

$$\pi_{gj}(E_j - g_j) = 0 \quad (3.3)$$

Onde π_d e π_{gj} são as variáveis duais associadas às restrições (3.1a) e (3.1b) e (3.1c) respectivamente.

Combinando estas duas equações, obtemos:

$$(\pi_d - \lambda_j) g_j = -\pi_{gj} E_j \quad (3.4)$$

Reorganizando os termos em (3.4), chegamos à relação abaixo, que reescreve o produto $\pi_d g_j$ como função dos demais:

$$\pi_d g_j = \lambda_j g_j - \pi_{gj} E_j \quad (3.5)$$

Assim, agora passamos a trabalhar com apenas *dois* produtos não lineares: $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$.

3.2.2 Redefinindo o produto $\lambda_j g_j$

Em seguida, lidamos com o produto $\lambda_j g_j$. Como discutido anteriormente, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que a estratégia de oferta de preços de uma empresa de geração de energia está estabelecida em base discreta em um intervalo pré-estabelecido pela empresa.

Neste caso, a proposta de solução consiste em aproximar as variáveis de decisão contínuas λ_j por um conjunto de valores discretos $\{\lambda_{jm}, m = 0, 1, \dots, M_1\}$, onde $M_1 = 2^{K_1}$ para algum inteiro não negativo K_1 .

Por exemplo, supondo que um intervalo plausível para as decisões de oferta λ_j esteja no intervalo $[\underline{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j]$, podemos escrever a aproximação discreta de λ_j da seguinte forma:

$$\lambda_j = \underline{\lambda}_j + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \quad (3.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda_j} &= (\underline{\lambda}_j - \bar{\lambda}_j)/M_1 \\ M_1 &= 2^{K_1} \text{ para algum inteiro não negativo } K_1 \\ x_{kj} &\text{ variável binária } \{0, 1\} \end{aligned}$$

A expressão (3.6) é denominada *expansão binária* e requer $\log_2(M_1) + 1$ variáveis binárias para sua representação.

Multiplicando ambos os lados de (3.6) por g_j e definindo uma nova variável $z_{kj} = x_{kj} g_j$ para $k = 1, \dots, K_1$, obtemos:

$$\lambda_j g_j = \underline{\lambda}_j g_j + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj} \quad (3.7)$$

A equação (3.7) nos permite substituir o produto $\lambda_j g_j$ pela expressão linear-inteira do lado direito da equação. Entretanto, ainda temos que lidar com um novo produto de variáveis z_{kj} , dado por $x_{kj} g_j$. Este produto pode ser substituído por expressões lineares se observarmos que ele representa a seguinte relação SE-ENTÃO:

$$\text{se } x_{kj} = 0, \text{ então } z_{kj} = 0; \text{ se } x_{kj} = 1, \text{ então } z_{kj} = g_j \quad (3.8)$$

Esta relação, por sua vez, pode ser modelada pelo seguinte conjunto de restrições (assumindo que $g_j \geq 0$):

$$0 \leq g_j - z_{kj} \leq G(1 - x_{kj}) \quad (3.9)$$

$$0 \leq z_{kj} \leq G x_{kj} \quad (3.10)$$

Onde G é um escalar grande o suficiente para as restrições (3.9) e (3.10) serem relaxadas quando $x_{kj} = 0$ e $x_{kj} = 1$ respectivamente. Por exemplo, G poderia ser a capacidade do gerador $\bar{g}_j$, evitando assim a necessidade de uma constante “muito grande” que possa resultar em dificuldades numéricas na solução do problema de otimização.

3.2.3 Redefinindo o produto $\pi_{gj} E_j$

Finalmente, podemos aplicar o mesmo procedimento ao produto de variáveis ainda existente: $\pi_{gj} E_j$. Novamente, assumindo que uma faixa de ofertas plausíveis encontra-se no intervalo $[E_j, \bar{E}_j]$ e aplicando o esquema de expansão binária similar ao descrito anteriormente, temos:

$$E_j = \underline{E}_j + \Delta_{Ej} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \quad (3.11)$$

$$\pi_{gj} E_j = \pi_{gj} \underline{E}_j + \Delta_{Ej} \sum_{k=0}^K 2^k w_{kj} \quad (3.12)$$

$$0 \leq w_{kj} - \pi_{gj} \leq \Pi_g(1 - y_{kj}) \quad (3.13)$$

$$0 \leq -w_{kj} \leq \Pi_g y_{kj} \quad (3.14)$$

onde:

$$\Delta_{Ej} = (\bar{E}_j - \underline{E}_j)/M_2$$

$$M_2 = 2^{K_2}, \text{ para algum inteiro não negativo } K_2$$

$$y_{kj} \text{ variável binária } \{0,1\}$$

Π_g valor escalar, grande o suficiente para as restrições (3.13) e (3.14) serem relaxadas quando $y_{kj}=0$ e $y_{kj}=1$ respectivamente. Por exemplo, Π_g poderia ser $\max_j \{c_j, \lambda_j^o\}$.

3.2.4 Formulação inteira-mista final

Aplicando todas as transformações anteriores ao problema de ofertas (2.3), chegamos à sua formulação linear-inteira final:

$$\text{Max} \quad \sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_j g_j + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj}] - [\pi_{gj} \underline{E}_j + \Delta_{Ej} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kj}] - c_j g_j \quad (3.15)$$

sujeito a:

$$\underline{E}_j + \Delta_{Ej} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \leq \bar{E}_j \quad j \in A \quad (3.15.a)$$

$$\underline{\lambda}_j + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \leq \bar{\lambda}_j \quad j \in A \quad (3.15.b)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad (3.15.c)$$

Restrições
primais do desp.
econômico

$$g_j - \underline{E}_j - \Delta_{Ej} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \leq 0 \quad j \in A \quad (3.15.d)$$

$$g_j \leq E_j^0 \quad j \notin A \quad (3.15.e)$$

Restrições duais
do despacho
econômico

$$\pi_d + \pi_{gj} - \underline{\lambda}_j - \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \leq 0 \quad j \in A \quad (3.15.f)$$

$$\pi_d + \pi_{gj} \leq \lambda_j^0 \quad j \notin A \quad (3.15.g)$$

$$\pi_{gj} \leq 0 \quad \forall j \quad (3.15.h)$$

Igualdade primal-
dual

$$\sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_j g_j + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj}] - [\pi_{gj} \underline{E}_j + \Delta_{Ej} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kj}] + \sum_{j \notin A} [\lambda_j^0 g_j - \pi_{gj} E_j^0] - \pi_d d = 0 \quad (3.15.i)$$

Variáveis
específicas da
expansão binária

$$0 \leq g_j - z_{kj} \leq G(1-x_{kj}) \quad j \in A; \forall k \quad (3.15.j)$$

$$0 \leq z_{kj} \leq G x_{kj} \quad j \in A; \forall k \quad (3.15.k)$$

$$0 \leq w_{kj} - \pi_{gj} \leq \Pi_g(1-y_{kj}) \quad j \in A; \forall k \quad (3.15.l)$$

$$0 \leq -w_{kj} \leq \Pi_g y_{kj} \quad j \in A; \forall k \quad (3.15.m)$$

$$x_{kj}, y_{kj} \in \{0, 1\} \quad j \in A; \forall k \quad (3.15.n)$$

O Problema (3.15) é um problema de programação inteira-mista e que pode ser resolvido por algoritmos conhecidos de programação linear-inteira, como por exemplo, os métodos de Branch and Bound. Além disso, observe que o modelo (3.15) poderia desprezar as restrições (3.15a) e (3.15b) - limites na quantidade e preços ofertados - pois os intervalos de “quantidades e preços a ofertar” $[\underline{E}_j, \bar{E}_j]$ e $[\underline{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j]$ já atendem automaticamente a esta restrição.

Um aspecto importante do modelo é que a acurácia da solução depende diretamente nos valores de M_1 e M_2 , cuja responsabilidade de escolha é da empresa que se otimiza. Quanto maiores forem estes valores, mais preciso será o modelo em relação ao espectro

possível de ofertas da empresa. Entretanto, o modelo fornece a solução ótima global nos limites M_1 e M_2 . Adicionalmente, podemos observar que, como M_1 é uma potencia de 2, o conjunto de valores discretos para λ_j utilizando M_1 está contido no conjunto de valores discretos λ_j quanto se utiliza um valor $M_1' > M_1$. Com isto, na medida em que o valor de M_1 é aumentado, o valor da função objetivo não decresce. Por simetria, o mesmo raciocínio é válido para E_j e M_2 .

Esta é uma diferença importante em relação ao modelo inteiro proposto em [19] e [34], que busca representar todas as possíveis ofertas inteiras de uma empresa visando obter a solução *exata* do problema de ofertas. Na abordagem deste trabalho, o que fazemos é buscar a solução ótima global dentro dos limites de ofertas dados por M_1 e M_2 . Na opinião do autor, esta abordagem é mais vantajosa, pois na prática, as empresas sempre ofertam dentro de limites pré-estabelecidos e o custo computacional de representar a solução exata pode ser muito elevado, como de fato foi mostrado em [19], e sem fortes benefícios pois examinaríamos soluções que nunca ocorreriam na prática por estratégia própria da empresa. Além disso, o mecanismo de aprendizado do próprio mercado atacadista de energia (ofertas são usualmente realizadas horariamente para cada dia da semana e para cada semana do ano) induz as ofertas a ser realizada dentro de intervalos especificados. Por fim, ressalta-se que a definição destes parâmetros é arbitrária e de responsabilidade da empresa, ou seja, em tese é possível representar todas as possíveis ofertas inteiras.

Um outro aspecto importante do modelo proposto neste trabalho em relação ao modelo inteiro proposto nas referencias anteriores consiste no critério de seleção para as variáveis binárias, discutido a seguir.

3.3 Critérios de seleção para as variáveis binárias

Existe uma grande flexibilidade na abordagem anteriormente proposta com relação à escolha dos produtos de variáveis $\pi_d g_j$, $\lambda_j g_j$, $\pi_{gj} E_j$ a serem “reescritos”. Por exemplo, poderíamos ter discretizado a variável π_d , a variável g_j (como feito em [19] e [34]), ou outra variável qualquer. Entretanto, na opinião do autor, é mais natural discretizar λ_j e E_j , pois elas são as variáveis que estão sob *controle direto* da empresa ofertante A, enquanto os valores π_d e g_j são o resultado do problema de otimização associado ao despacho econômico. Além disso, como será visto no Capítulo 5, a discretização de

variáveis que estão sob o controle direto do agente fornecem uma vantagem computacional importante quando o caso estocástico for considerado.

3.4 Estudo de caso

A aplicação do modelo anterior para um estudo de caso realista será apresentada no Capítulo 5, como sub-produto da análise para o caso de ofertas sob incertezas.

4 REPRESENTAÇÃO DE EXTENSÕES

Como o esquema de expansão binária é aplicado “genericamente” a produtos de variáveis de decisão, ele pode também ser utilizado para modelos de oferta mais complexos, por exemplo, incluindo representação de restrições de transmissão, custos de partida, decisões financeiras e decisões de expansão de capacidade. Pode também ser aplicado para modelos de ofertas puras de preço e quantidade e combinações de todas as extensões anteriores. Cada uma destas extensões será discutida a seguir.

4.1 Restrições de transmissão

No modelo apresentado no capítulo anterior, considera-se que não há qualquer restrição de “transporte” de energia entre o local de produção e consumo de energia elétrica no sistema analisado. Entretanto, como é de conhecimento geral, as redes de transmissão possuem capacidade de transporte limitada, ou seja, os sistemas elétricos possuem restrições de transmissão entre locais de produção e consumo [71].

Uma primeira hipótese para a modelagem de restrições de transmissão entre regiões consiste em adotar um modelo tradicional de "fluxos em redes", onde são representadas restrições de capacidade máxima entre duas regiões num sistema elétrico e as restrições de "conservação de massa". Entretanto, em sistemas de transmissão bastante “malhados” (fortemente interligados), como por exemplo, o caso do sistema Brasileiro, Norte-Americano e europeu, essa abordagem pode não ser muito adequada, exigindo-se uma modelagem mais realista. Como uma modelagem detalhada dos sistemas de potência apresenta dificuldades de ordem prática, por se tratar de um problema não linear, frequentemente adota-se um modelo mais simplificado, conhecido como modelo de fluxo de potencia linearizado (ver apêndice B e [71] para detalhes). Esse modelo incorpora uma terceira restrição ao problema dos fluxos em rede conhecida como 2ª. Lei de Kirchoff, que diz que o fluxo de potência ativa em um determinado circuito é proporcional à diferença angular entre os nós formadores do mesmo e inversamente proporcional à reatância desse circuito.

Nesta seção incorporamos as restrições de transmissão elétrica ao problema. Será considerado o caso onde a rede de transmissão é representada por um modelo de fluxo de potencia linearizado. Por simplicidade de notação, assumimos que existe apenas um

gerador e uma demanda conectados em cada nó (ou barra) da rede de transmissão e que estão indexados da mesma maneira, isto é, gerador j está localizado na barra j .

4.1.1 Despacho econômico com restrições de transmissão

Dadas as ofertas de preço e quantidade da empresa A $\{\lambda_j, E_j, j \in A\}$ e dos demais geradores do sistema $\{\lambda_j^0, E_j^0, j \notin A\}$, o despacho econômico com restrições de transmissão é formulado como (ver Anexo B para mais detalhes):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j && \text{variável dual} \\ \text{sujeito a:} & && (4.1) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = \sum_{j=1}^J d_j \quad \pi_d \quad (4.1a)$$

$$g_j \leq E_j \quad j \in A \quad \pi_{gj} \quad (4.1b)$$

$$g_j \leq E_j^0 \quad j \notin A \quad \pi_{gj}^0 \quad (4.1c)$$

$$-\sum_{j=1}^J \beta_{kj} g_j \leq -\sum_{j=1}^J \beta_{kj} d_j + \bar{f}_k \quad k = 1, \dots, K \quad \pi_f^1 \quad (4.1d)$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_{kj} g_j \leq \sum_{j=1}^J \beta_{kj} d_j + \bar{f}_k \quad k = 1, \dots, K \quad \pi_f^2 \quad (4.1e)$$

onde:

k indexa os circuitos (K é o numero de circuitos)

β_{kj} é a matriz de sensibilidade, com os fatores de sensibilidade do fluxo no circuito k com respeito a uma injeção na barra j

$\bar{f}_k$ limite de fluxo no circuito k

O Problema (4.1) é conhecido como fluxo de potencia linearizado.

4.1.2 Formulação do problema de ofertas com restrições de transmissão

O preço *spot* por barra e a receita liquida da empresa A são calculados como:

$$\pi_{dj} = \pi_d - \sum_{k=1}^K \beta_{kj} (\pi_{fk}^1 - \pi_{fk}^2) \quad (4.2)$$

$$R = \sum_{j \in A} [\pi_{dj} - c_j] g_j \quad (4.3)$$

Aplicando as condições de otimalidade e mantendo a função objetivo de maximização da renda líquida, chegamos a um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio similar ao (2.12) apresentado no Capítulo 2:

$$\text{Max } \sum_{j \in A} [\pi_{dj} - c_j] g_j \quad (4.4)$$

Sujeito a

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad j \in A \quad (4.4a)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j = \sum_{j=1}^J d_j \quad (4.4b)$$

$$g_j \leq E_j \quad j \in A \quad (4.4c)$$

$$g_j \leq E_j^0 \quad j \notin A \quad (4.4d)$$

$$-\sum_{j=1}^J \beta_{kj} g_j \leq -\sum_{j=1}^J \beta_{kj} d_j + \bar{f}_k \quad k = 1, \dots, K \quad (4.4e)$$

$$\sum_{j=1}^J \beta_{kj} g_j \leq \sum_{j=1}^J \beta_{kj} d_j + \bar{f}_k \quad k = 1, \dots, K \quad (4.4f)$$

$$\pi_{gj} \leq 0 \quad j \in A \quad (4.4g)$$

$$\pi_{gj}^0 \leq 0 \quad j \notin A \quad (4.4h)$$

$$\pi_{fk}^1 \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \quad (4.4i)$$

$$\pi_{fk}^2 \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \quad (4.4j)$$

$$\pi_d + \pi_{gj} - \sum_{k=1}^K \beta_{kj} (\pi_{fk}^1 - \pi_{fk}^2) - \lambda_j \leq 0 \quad j \in A \quad (4.4k)$$

$$\pi_d + \pi_{gj}^0 - \sum_{k=1}^K \beta_{kj} (\pi_{fk}^1 - \pi_{fk}^2) \leq \lambda_j^0 \quad j \notin A \quad (4.4l)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in A} \lambda_j g_j + \sum_{j \notin A} \lambda_j^0 g_j - \pi_d \left(\sum_{j=1}^J d_j \right) - \sum_{j \in A} \pi_{gj} E_j - \sum_{j \notin A} \pi_{gj}^0 E_j^0 - \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \beta_{kj} (\pi_{fk}^2 - \pi_{fk}^1) \\ & - \sum_{k=1}^K [\pi_{fk}^1 \bar{f}_k + \pi_{fk}^2 \bar{f}_k] = 0 \end{aligned} \quad (4.4m)$$

4.1.3 Formulação por programação linear-inteira

Observa-se que o problema de ofertas com restrição de transmissão (4.4) possui o mesmo conjunto de produtos de variáveis ($\pi_{dj}g_j, \lambda_j g_j$ e $\pi_{gj}E_j$) observado no caso sem rede de transmissão (modelo (2.12)).

A única diferença diz respeito ao produto do preço *spot* e geração, pois o primeiro agora varia de acordo com a localização do gerador (nó) na rede de transmissão. A relação (3.1), utilizada para reescrever aquele produto em termos de $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$, também se aplica no caso com restrição de transmissão, sendo apenas modificada para o caso em que o preço *spot* varia por barra da rede elétrica:

$$\pi_{dj}g_j = \lambda_j g_j - \pi_{gj} E_j \quad (4.5)$$

Por outro lado, os produtos $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$ são os mesmos que os do caso sem rede de transmissão. Desta forma, o esquema de expansão binária da seção (3.2) do Capítulo 3 aplica-se diretamente.

4.2 Representação de Modelos de ofertas puras de preço e quantidade

Os modelos de oferta pura de preços ou pura de quantidades, que são amplamente utilizados na literatura, podem ser representados como casos especiais do modelo de oferta conjunta de preços/quantidade descrito anteriormente:

No modelo de oferta pura de quantidades, os preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são fixos em valores pré-determinados (usualmente zero) e apenas as quantidades ofertadas $\{E_j, j \in A\}$ são otimizadas. Modelos de oferta pura de quantidade são similares aos modelos pertencentes à classe do conhecido “modelo de Cournot”, extensivamente aplicado na microeconomia em modelos baseados em teoria dos jogos (conforme o modelo apresentado no Capítulo 6). Entretanto, a utilização da nomenclatura “modelo de Cournot” usualmente implica que algum tipo de equilíbrio está sendo atingido, o que não é o caso neste momento. Por este motivo, optamos por denominar este modelo como de “oferta pura de quantidades”.

No modelo de oferta pura de preços, as quantidades ofertadas $\{E_j, j \in A\}$ são fixas em valores pré-determinados (usualmente iguais às capacidades máximas $\{\bar{g}_j\}$) e apenas os

preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são otimizados. Modelos de oferta pura de quantidade são similares aos modelos pertencentes à classe do conhecido “modelo de Bertrand”, extensivamente aplicado na microeconomia em modelos baseados em teoria dos jogos (como o que será apresentado no Capítulo 6). Assim como no caso anterior, a utilização da nomenclatura “modelo de Bertrand” usualmente implica que algum tipo de equilíbrio está sendo atingido, o que, novamente, não é o caso neste momento. Por este motivo, optamos por denominar este modelo como de “oferta pura de preços”.

4.3 Representação de instrumentos financeiros

Um tópico de bastante interesse no setor de eletricidade é a possibilidade de agentes geradores utilizarem instrumentos financeiros de gerência de risco, como contratos bilaterais ou opções de energia. Estes instrumentos, que não alteram o despacho físico, atuam como mecanismos para a redução de volatilidade da receita e criam uma nova oportunidade de comercialização de energia.

Nesta seção mostraremos a representação de decisões de firmar contratos a termo e opções de compra de energia no modelo de ofertas discutido, tal como sugerido em [91]. Por simplicidade de notação e para ilustrar uma aplicação da extensão discutida no tópico anterior, será utilizado um modelo de ofertas “puras” de preços, isto é, onde apenas os preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são variáveis de decisão e as quantidades ofertadas são fixas e iguais à capacidade máxima. É considerada apenas uma etapa de decisão t .

Neste caso, o problema de programação matemática com restrições de equilíbrio resultante para a etapa t é:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{j \in A} [\pi_{dt} - c_j] \times g_{tj} \\ & \text{sujeito a:} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \tag{4.6a}$$

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j = 1, \dots, J \tag{4.6b}$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj} \leq 0 \quad \text{para } j \in A \tag{4.6c}$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A \tag{4.6d}$$

$$\sum_{j \in A} \lambda_{tj} \times g_{tj} + \sum_{j \notin A} \lambda_{tj}^* \times g_{tj} - \pi_{dt} \times d_t - \sum_{j=1}^J \pi_{gtj} \times \bar{g}_j = 0 \tag{4.6e}$$

O problema de otimização (4.6) tem componentes não lineares na função objetivo (produtos $\pi_{dt} \times g_{tj}$) e na restrição (4.6e) (produtos $\lambda_{tj} \times g_{tj}$). Aplicando o esquema de expansão binária descrito no Capítulo anterior, chega-se à formulação inteira mista final:

$$\text{Max} \quad \sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_{tj} g_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k - \pi_{gtj} \bar{g}_j - c_j g_{tj}]$$

sujeito a

(4.7)

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t$$
(4.7a)

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j = 1, \dots, J$$
(4.7b)

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj}^* \leq 0 \quad \text{para } j \in A$$
(4.7c)

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A$$
(4.7d)

$$\sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_{tj} g_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k] + \sum_{j \notin A} \lambda_{tj}^* g_{tj} - \pi_{dt} d_t - \sum_{j=1}^J \pi_{gtj} \bar{g}_j = 0$$
(4.7e)

$$\lambda_{tj} = \underline{\lambda}_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k x_{tjk} \quad \text{para } j \in A$$
(4.7f)

$$0 \leq g_{tj} - y_{tj}^k \leq M(1 - x_{tjk}) \quad \text{para } j \in A$$
(4.7g)

$$y_{tj}^k \leq M x_{tjk} \quad \text{para } j \in A$$
(4.7h)

$$\text{para } k = 1, \dots, K$$

4.3.1 Representação de Contratos a termo (ou “forward”)

Os contratos bilaterais de suprimento de energia (ou contratos a termo ou contratos forward) têm sido tradicionalmente utilizados como medida de evitar exposição à volatilidade da renda resultante da venda de energia no mercado de curto prazo [46][80].

Um contrato bilateral de venda de energia corresponde à venda de uma quantidade (fixa) de energia a um consumidor por um preço (fixo) pré-estabelecido. O contrato pode ser um acordo físico ou financeiro. No acordo físico, adotado em muitos países (como Estados Unidos), o vendedor do contrato (gerador) precisa fisicamente produzir e entregar a quantidade contratada, ou seja, o contrato afeta o despacho do sistema. No acordo financeiro, adotado em muitos outros países (também nos Estados Unidos, Europa, América do Sul, etc), apenas há uma responsabilidade financeira do vendedor onde, em troca de um preço fixo pré-estabelecido, o mesmo se responsabiliza pela “compra” no mercado *spot* da quantidade contratada pelo consumidor. Observe que o

contrato não altera o despacho do sistema, mas pode alterar a estratégia de oferta do gerador. Este é o tipo de contrato a ser analisado nesta seção.

Suponha, por exemplo, que um gerador vende hoje um contrato financeiro de E_c MWh de energia a um preço de contrato de π_c R\$/MWh, com vencimento no estágio t . Nesta data, suponha que a produção do gerador é de G MWh (função de sua oferta de preço), o consumo da demanda é D MWh e o preço “spot” do sistema é π_d R\$/MWh. A renda líquida do gerador e o pagamento líquido da demanda são dados por:

$$R_g = \pi_d \times G + (\pi_c - \pi_d) \times E_c \quad (4.8a)$$

$$P_d = \pi_d \times D + (\pi_c - \pi_d) \times E_c \quad (4.8b)$$

As expressões acima contêm duas parcelas: na primeira, o gerador (demanda) vende (compra) sua produção G (consumo D) no “spot”, da maneira tradicional. Na segunda, o gerador (demanda) recebe (pagam) o produto da diferença entre o preço contratado e o “spot” pela quantidade E_c contratada.

Suponha que o preço de contrato π_c seja 35 R\$/MWh e que o preço spot π_d seja baixo, por exemplo 10 R\$/MWh. Neste caso, a remuneração correspondente à primeira parcela da expressão (4.8a) – venda da geração no spot – é reduzida. Por outro lado, a segunda parcela é positiva, isto é, o gerador recebe uma remuneração adicional à remuneração “spot”. Em outras palavras, o contrato protege o gerador contra preços “spot” reduzidos. Por sua vez, se o preço spot for alto (por exemplo, 50 R\$/MWh), a demanda tem gastos elevados de compra no “spot” (primeira parcela de (4.8b)). Estes gastos são parcialmente compensados na segunda parcela, que tem valor negativo. Conclui-se, portanto, que o contrato protege a demanda contra preços “spot” altos.

Em resumo, os contratos são instrumentos financeiros e não afetam o despacho. Sob o ponto de vista do gerador, é apenas realizada uma liquidação (ou “clearing”) no mercado de curto prazo entre quantidade produzida (fruto das ofertas de preços e quantidades realizadas) e quantidade contratada: caso $G > E_c$, o gerador vende a diferença ($G - E_c$) no mercado ao preço spot π_d , caso $G < E_c$, o gerador compra esta mesma diferença ao preço spot. Em ambos os casos, o gerador recebe o pagamento fixo $E_c \times \pi_c$, onde π_c é o preço do contrato estabelecido entre ambas as partes.

Suponha agora que, num ambiente de ofertas de preços, a empresa A tem a possibilidade de vender um contrato bilateral de suprimento de energia para um comprador qualquer (uma distribuidora, um comercializador, etc). A representação de contratos de energia com quantidades (fixas) E_c (MWh) e preços (fixos) π_c (\$/MWh) conhecidos é imediata e não apresenta grandes dificuldades pois consiste apenas na mudança da expressão de receita do agente (expressão 4.8).

Por outro lado, uma questão adicional é: dadas as oportunidades de venda no mercado de curto prazo (função das ofertas de preços, despacho e preço *spot* resultantes) e dadas as oportunidades no mercado de contratos, qual montante (fixo) E_c que esta empresa deve contratar considerando seu portfolio de geradores de forma a maximizar seu lucro assumindo que a disposição a pagar dos consumidores por um contrato é π_c e que este contrato tem a duração de t períodos? Este é o problema a ser apresentado a seguir.

4.3.1.1 Formulação

O problema de ofertas “puras” de preço com contratos a termo é formulado como:

$$\text{Max} \sum_{t=1}^T \{ \sum_{j \in A} [\pi_{dt} - c_j] \times g_{tj} + [\pi_c - \pi_{dt}] \times E_c \}$$

$$\text{sujeito a:} \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \tag{4.9a}$$

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j = 1, \dots, J \tag{4.9b}$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj} \leq 0 \quad \text{para } j \in A \tag{4.9c}$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A \tag{4.9d}$$

$$\sum_{j \in A} \lambda_{tj} \times g_{tj} + \sum_{j \notin A} \lambda_{tj}^* \times g_{tj} - \pi_{dt} \times d_t - \sum_{j=1}^J \pi_{gtj} \times \bar{g}_j = 0 \tag{4.9e}$$

$$E_c \leq \bar{g}_j \tag{4.9f}$$

$$\text{para } t = 1, \dots, T$$

Observa-se que o Problema (4.9) é similar ao Problema (4.6), com a exceção da expressão da renda na função objetivo (ajustada para considerar a energia contratada como ilustrado em (4.8)) e a restrição adicional (4.9f), que limita a quantidade a ser contratada na capacidade máxima do gerador. No Problema (4.9), as variáveis de

decisão são as ofertas de preço a cada etapa t e para cada gerador j (λ_{tj}) e a energia a ser contratada E_c .

Além dos mesmos produtos de variáveis do Problema (4.6) - $\pi_{dt} \times g_{tj}$ e $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ – o modelo de oferta com contratos tem um produto a mais na função objetivo: $\pi_{dt} \times E_c$ (E_c é uma variável de decisão adicional). Portanto, o esquema de expansão binária pode ser diretamente aplicado a mais este produto. A formulação completa é apresentada no Anexo C.

4.3.2 Representação de Contratos de Opções

Contratos a termo são acordos para entregar uma quantidade fixa por um preço fixo, independentemente do preço do mercado *spot*, ou seja, constitui-se numa obrigação. Contudo, muitos negociantes preferem ter um certo grau de flexibilidade com relação aos preços de mercado e gostariam de ter o direito (mas não o dever) de comprar ou vender energia no futuro. Os contratos de opção permitem a um negociante ter esta flexibilidade [80], mantendo as características de instrumento puramente financeiro (sem afetar o despacho) conforme descrita anteriormente. Contratos de opção podem ser de compra (call options) ou de venda (put options), ambos serão discutidos a seguir.

A opção de compra dá ao portador o direito (e não o dever) de adquirir determinado ativo por um preço de exercício específico, em data futura. O preço de um contrato de opção compõe-se de dois elementos:

- preço de exercício (ou strike price) – preço pago quando a opção é exercida, isto é, quando o comprador exerce seu direito assegurado pelo contrato. Este pode ser muito diferente do preço do mercado *spot* da energia, que prevalecerá quando o contrato for exercido;
- prêmio é a quantia (fixa) paga pelo contratante (comprador) para ter este direito.

O período no qual se pode exercer a opção pode ser definido de diversas maneiras. Se for européia, a opção de compra só poderá ser exercida num determinado dia (por ex., o último dia útil de agosto); se for americana, a opção de compra poderá ser exercida a qualquer momento até aquele dia.

O exemplo seguinte ilustra como poderia funcionar uma opção de compra. Suponhamos que esteja para vencer uma opção de compra de energia com um preço de exercício de \$50/MWh. Se o preço da energia estiver, em \$40/MWh a opção não é exercida (pois é mais barato comprar no “spot” a \$40/MWh que comprar o contrato a \$50/MWh). Neste caso, a opção não possui valor. Se, por outro lado, o preço da energia no mercado *spot* for \$60/MWh, valerá a pena *exercer* a opção para adquirir o direito de compra de energia por \$50/MWh através de um contrato e podemos dizer que a opção “vale” \$10/MWh, isto é, a diferença entre o preço *spot* de \$60/MWh e os \$50/MWh a serem pagos para comprar a energia pelo contrato. Para ter este direito, o consumidor deverá pagar um prêmio (\$). Em resumo, uma opção financeira funciona como um seguro.

A Figura 4-1 mostra o lucro associado a uma opção de compra com preço de exercício de \$ 50 como função do preço da energia no mercado *spot*, levando consideração seu prêmio, estipulado em \$ 5, por exemplo. Novamente, se o preço no mercado *spot* for de \$ 70 o investidor exerce a opção, comprando a energia por \$ 50. Neste caso ele tem um “benefício” de \$ 20 (diferença entre o preço de exercício da opção e o preço do mercado *spot*) menos o valor do prêmio da opção o que resulta em lucro final de \$ 15. Se por outro lado o preço *spot* é \$ 20 a opção não é exercida e o prejuízo se resume no valor do prêmio da opção: - \$ 5.

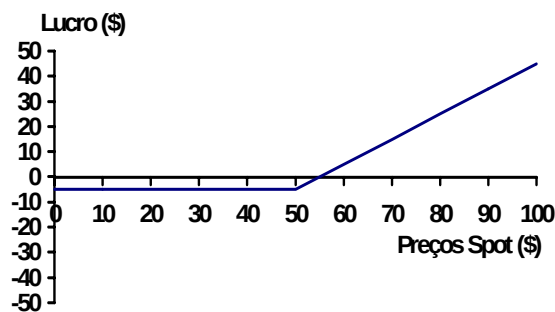


Figura 4-1 – Lucro Com Opção de Compra

Observe que, para uma empresa geradora de energia, o contrato de opção não deixa de ser um “contrato financeiro” e portanto o gerador precisa comprar energia no mercado *spot* sempre que não tiver produzido fisicamente o suficiente para atender o contrato (caso a produção seja superior ao montante contratado, o excedente é comercializado).

Uma opção de venda possui o mesmo conceito anterior, mas na direção simétrica: o dono de uma opção de venda tem o direito de vender energia por um preço de exercício determinado a qualquer momento; paga-se determinado preço ou prêmio por esse direito, tal como na opção de compra.

A Figura 4-2 mostra o lucro associado a uma opção de venda com preço de exercício de \$ 50 como função do preço da energia no mercado *spot*, levando consideração seu prêmio, \$ 5 por exemplo. Novamente, se o preço no mercado *spot* for de \$ 70 o investidor não exerce a opção e o prejuízo se resume no valor do prêmio da opção. Se o preço no *spot* for \$ 20 o investidor exerce a opção e vende o ativo por \$ 50. Neste caso ele tem um lucro de \$ 30 menos o valor do prêmio da opção o que resulta em lucro final de \$ 25.

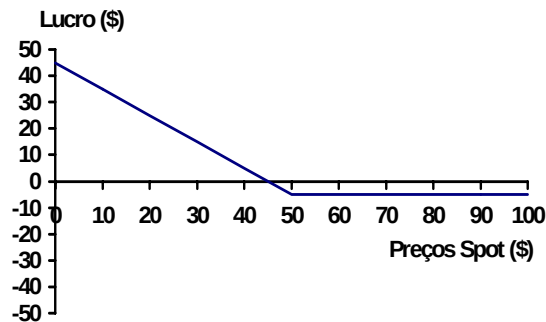


Figura 4-2 – Lucro Com Opção de Venda

Desta forma, suponha agora que, num ambiente de ofertas de preços, a empresa A tem a possibilidade de vender um contrato de opção de compra de energia para um comprador qualquer (uma distribuidora, um comercializador, etc). Similarmente ao caso anterior, a questão que surge é, dadas as oportunidades de venda no mercado de curto prazo (função das ofertas de preços, despacho e preço *spot* resultantes) e no mercado de contratos de opções, qual montante esta empresa deve vender em opções de compra de seu portfolio de geradores? Portanto, neste caso, supõe-se que o agente A tem a possibilidade de vender uma opção de compra de E_0 MWh com preço de exercício (conhecido) de π_x (\$/MWh), que se aplica a cada estágio t , ao longo de T estágios. E_0 é portanto uma variável de decisão. O prêmio da opção π_0 (\$), refletindo a disposição a pagar dos consumidores, é conhecido. Este é o problema a ser apresentado a seguir.

4.3.2.1 Formulação

O problema de ofertas “puras” de preço com contratos de opção de compra pode ser formulado como:

$$\text{Max } \sum_{t=1}^T \{ \sum_{j \in A} [\pi_{dt} - c_j] \times g_{tj} + \pi_o \times E_o - P_{ot} \}$$

sujeito a:

(4.10)

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad (4.10a)$$

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (4.10b)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj}^* \leq 0 \quad \text{para } j \in A \quad (4.10c)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A \quad (4.10d)$$

$$\sum_{j \in A} \lambda_{tj}^* \times g_{tj} + \sum_{j \notin A} \lambda_{tj}^* \times g_{tj} - \pi_{dt} \times d_t - \sum_{j=1}^J \pi_{gtj} \times \bar{g}_j = 0 \quad (4.10e)$$

$$P_{ot} \geq (\pi_{dt} - \pi_x) \times E_o \quad (4.10f)$$

$$P_{ot} \geq 0 \quad (4.10g)$$

$$E_o \leq \bar{g}_j \quad (4.10h)$$

$$\text{para } t = 1, \dots, T$$

A função objetivo de (4.10) descreve a renda do gerador quando um contrato de opção de compra é vendido¹⁵: a primeira parcela representa a renda líquida no mercado *spot*, a segunda parcela ($\pi_o \times E_o$) representa a receita (fixa) com o prêmio da opção e a variável P_o representa a perda financeira para o agente se a opção for exercida. As restrições (4.10f) e (4.10g) mostram que esta perda financeira é igual à diferença entre o preço *spot* e o preço de exercício da opção se esta diferença for positiva: neste caso a opção de compra foi exercida pelo comprador ($\pi_d > \pi_x$) e o gerador “perdeu” a possibilidade de vender energia por um valor superior ao “comprometido” no preço de exercício. Caso contrário ($\pi_d < \pi_x$), a opção de compra não é exercida pelo comprador e a perda do gerador devido à opção é igual a zero: a renda do mesmo é formada apenas pela venda de sua energia no mercado *spot*. Observe que estas restrições representam exatamente a “responsabilidade” do gerador pelo pagamento no mercado *spot* da energia contratada, assim como mostrado anteriormente na expressão (4.8) para o caso de contratos bilaterais.

¹⁵ Observe que não é necessário o uso de variáveis inteiras para representar contratos de opções.

No Problema (4.10), as variáveis de decisão são as ofertas de preço a cada etapa t e para cada gerador j (λ_{tj}) e a energia a ser vendida em opções de compra E_o .

Além dos mesmos produtos de variáveis do Problema (4.6) - $\pi_{dt} \times g_{tj}$ e $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ - o modelo de oferta com contratos tem um produto a mais na restrição (4.10f): $\pi_{dt} \times E_o$ (E_o é uma variável de decisão adicional). Portanto, o esquema de expansão binária pode ser diretamente aplicado a mais este produto. A formulação completa deste problema com a aplicação da expansão binária é apresentada no Anexo C.

4.4 Representação de Decisões de Investimento

Suponha agora que, no modelo de ofertas “puras” de preço discutido, a empresa A tem a possibilidade de investir em nova capacidade de geração $\{\bar{g}_j, j \in A\}$, como sugerido em [92]. Cada gerador j “candidato” a ser construído tem um custo de investimento (conhecido) δ_j (\$/MW) e um custo variável de operação (conhecido) c_j (\$/MWh). Em outras palavras, este representa o clássico problema de decisões de investimento em nova capacidade, estudado em detalhes em [47] num enfoque de “mínimo custo”. Vamos estendê-lo aqui para a representacao conjunta com o problema de ofertas. Por simplicidade de notação, vamos supor que todos os investimentos são realizados no primeiro estágio, $t=1$.

4.4.1 Formulação

O problema pode ser formulado como:

$$\text{Max } \sum_{t=1}^T \{ \sum_{j \in A} [\pi_{dt} - c_j] \times g_{tj} \} - \sum_{j \in A} \delta_j \times \bar{g}_j$$

sujeito a: (4.11)

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad (4.11a)$$

$$g_{tj} - \bar{g}_j \leq 0 \quad \text{para } j \in A \quad (4.11b)$$

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j^* \quad \text{para } j \notin A \quad (4.11c)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj} \leq 0 \quad \text{para } j \in A \quad (4.11d)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A \quad (4.11e)$$

$$\sum_{j \in A} [\lambda_{tj} \times g_{tj} - \pi_{gtj} \times \bar{g}_j] - \pi_{dt} \times d_t + \sum_{j \notin A} [\lambda_{tj}^* \times g_{tj} - \pi_{gtj} \times \bar{g}_j^*] = 0 \quad (4.11f)$$

para $t = 1, \dots, T$

O problema de investimentos possui duas variáveis de decisão principais: as ofertas de preço a cada etapa t e para cada gerador j (λ_{tj}) e a capacidade $\bar{g}_j$ a ser investida.

4.4.2 Modelagem por programação linear inteira

O problema de investimento (4.11) tem dois grupos de produtos de variáveis iguais aos do problema de oferta de preços (4.6): $\pi_{dt} \times g_{tj}$ e $\lambda_{tj} \times g_{tj}$. Estes produtos serão tratados como nos casos anteriores: substituição de $\pi_{dt} \times g_{tj}$ por $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ e transformação do produto $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ em restrições lineares inteiras através da discretização de λ_{tj} por um esquema de expansão binária. Por sua vez, o produto de variáveis $\pi_{gtj} \times \bar{g}_j$ é específico deste problema (restrição (4.11f)) e pode ser transformado em restrições lineares inteiras através da discretização de $\bar{g}_j$ em variáveis binárias. A formulação completa linear-inteira deste problema é apresentada no Anexo C.

4.5 Representação de custos operativos não convexos (custos de partida)

Em todas as discussões anteriores, foi assumido que o custo operativo da central (no cálculo da receita líquida) é uma função linear da energia produzida:

$$\begin{aligned} \text{Max } R = & \sum_{j \in A} [\pi_d - c_j] g_j \\ \text{Sujeito a} & \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j \in A \quad (4.12a)$$

Entretanto, muitas centrais hidro e termoeletricas possuem os chamados “custos de partida”, que são custos fixos associados a cada “partida” da central. Estes custos introduzem uma não convexidade ao problema de decisão adicional, que é o problema de decidir se vale a pena ou não acionar a central tendo em vista a possibilidade de receitas no mercado de curto prazo (por exemplo, mesmo que o preço *spot* seja superior ao custo variavel da central, a receita obtida pode não ser suficiente para cobrir os custos fixos de partida). Adicionalmente, algumas usinas possuem restrições do tipo “degrau” para níveis mínimos de geração no despacho: caso seja despachada, precisa gerar um mínimo de x MWh; ou restrições de ramp-up (tempo mínimo de partida) e ramp-down (tempo mínimo de desligamento). Este problema completo é conhecido

como *unit commitment* e descrito em detalhes em [32] e em [90], que o analisa para o caso hidroelétrico.

Como observado em [96], o ambiente de programação inteira-mista permite facilmente a representação de funções de custos operativos não convexas.

Supondo, por exemplo, que o gerador j tenha um custo de partida (ou “custo de start-up”) de \$ u_j . Neste caso, o custo operativo do gerador e a restrição de inflexibilidade na geração podem ser modelados através das seguintes relações linear-inteiras:

$$u_j \delta_j + c_j g_j \quad (4.13a)$$

$$\delta_j \geq g_j / \bar{g}_j \quad (4.13b)$$

$$\delta_j \in \{0,1\} \quad (4.13c)$$

As expressões (4.28) anteriores podem ser diretamente incorporadas no modelo de ofertas e na sua formulação final após a aplicação da expansão binária. As demais restrições de unit commitment, conforme descrito em [32] podem ser diretamente incorporadas, mas introduzirão um acoplamento temporal entre as decisões que não é escopo de análise deste trabalho.

5 PARTE II: ESTRATÉGIAS DE OFERTA SOB INCERTEZA

Como observado ao longo dos dois Capítulos anteriores, o problema de estratégia de ofertas mesmo em sua versão determinística é de difícil solução. Entretanto, sua complexidade é ainda aumentada pelo fato do cálculo de $\pi_d(\cdot)$ e $g_j(\cdot)$ em (2.3) depender do conhecimento do vetor de ofertas de todas as empresas, assim como das disponibilidades de geração das usinas e do valor da demanda. Entretanto, esta informação não está disponível para nenhuma empresa no momento de sua oferta. Portanto, a estratégia de ofertas da empresa estratégica deve considerar a incerteza destas variáveis.

A segunda parte desta tese apresenta a primeira abordagem proposta neste trabalho para modelar este problema, que é definir um conjunto de cenários para estas variáveis aleatórias, e maximizar o valor esperado da remuneração líquida do agente estratégico, calculada para todos os cenários de ofertas dos rivais ou incerteza na demanda. Desta forma, este Capítulo estende a formulação até então apresentada para representar incertezas.

5.1 Introdução: oferta sob incerteza x modelos baseados em jogos

Num despacho baseado em ofertas, a formação do preço *spot* depende da oferta realizada por *todos* os agentes *price makers*. Desta forma, a representação do processo de competição entre os agentes na formação das ofertas no mercado de curto prazo passa a ser necessário para estabelecer as estratégias destas ofertas. Como discutido no Capítulo 1, existem essencialmente duas formas de representar esta dinâmica:

- (i) abordagem por “incerteza”, onde apenas o problema de otimização de ofertas do agente estratégico é representado e as ofertas dos concorrentes são representadas através de *cenários*. Neste caso, a empresa estratégica busca determinar sua estratégia de oferta que maximize sua receita esperada ao longo de todos os cenários;
- (iii) abordagem por “teoria dos jogos”: neste caso todos os problemas de otimização de os agentes *price-makers* são representados conjuntamente e a reação dinâmica de todas as empresas às ofertas dos demais é representada por um jogo

não cooperativo e cada empresa busca determinar sua estratégia de oferta que seja sua melhor resposta (maximizando sua receita) dadas às reações dos seus concorrentes, como em uma situação de equilíbrio.

Nesta tese, ambos os modelos serão discutidos e este Capítulo apresenta o modelo de ofertas sob incerteza. O modelo baseado em jogos será discutido posteriormente.

Utilização prática de modelos de oferta sob incerteza x modelos por teoria dos jogos

Os modelos de ofertas sob incerteza baseiam-se em cenários de ofertas para as empresas concorrentes da empresa cuja estratégia de oferta está sendo formulada. Estes modelos permitem representar cenários distintos de ofertas, demanda, de falhas de geradores, de disponibilidade de todos os geradores (não há distinção entre *price makers* e *price takers*, a representação destes dois tipos de agentes é realizada por cenários) e possuem a vantagem adicional de não dependerem de hipóteses de *racionalidade coletiva*, que é uma hipótese forte e que forma a base dos modelos baseados em teoria dos jogos. Por isto, os modelos de oferta sob incerteza são geralmente escolhidos pelos agentes ao estabelecerem suas estratégias de ofertas. Como será discutido posteriormente, a obtenção dos cenários de ofertas dos concorrentes é geralmente feita através da informação histórica.

Já os modelos baseados em teoria dos jogos geralmente são preferidos por agentes reguladores para identificar abuso de poder de mercado. A motivação é verificar se comportamentos abusivos se verificariam mesmo em condições de racionalidade

5.2 Representação de incertezas no modelo de ofertas

A formulação (2.3) do Capítulo 2 pode ser estendida para o caso onde as ofertas dos geradores $j \notin A$ e a demanda são incertas e representadas por cenários:

$$\text{Max} \quad \sum_{s=1}^S p^s \left\{ \sum_{j \in A} [\pi_d^s((\lambda_j, E_j)_{j \in A}, (\lambda_j^{os}, E_j^{os})_{j \notin A}) - c_j] g_j^s((\lambda_j, E_j)_{j \in A}, (\lambda_j^{os}, E_j^{os})_{j \notin A}) \right\}$$

sujeito a:

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j \in A \quad (5.1a)$$

onde:

s indexa os cenários de ofertas dos concorrentes (S é o numero de cenários)
 p^s probabilidade do cenário s

g_j^s produção da usina j no cenário s
 π_d^s preço *spot* de curto prazo (decorrente do despacho econômico) para o cenário s

Na formulação (5.1) a empresa “A” busca maximizar o valor esperado de suas receitas nos “S” cenários simulados, correspondendo portanto a uma abordagem neutra em relação ao risco (“risk neutral”). Nesta abordagem, a empresa está “satisfeita” com o ganho “médio” ao longo dos cenários, sem preocupar-se com a volatilidade e resultados nos cenários individuais. A incorporação de outras atitudes frente ao risco será discutida adiante.

Analogamente ao caso determinístico, a produção de cada usina em *cada* cenário g_j^s e o preço *spot* correspondente π_d^s resultam do problema de despacho econômico para o cenário s , apresentado a seguir na sua versão sob incerteza:

$$z^s = \text{Min} \quad \sum_{j \in A} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin A} \lambda_j^{\text{os}} g_j^s \quad \text{variável dual} \quad (5.2)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^J g_j^s = d^s \quad \pi_d^s \quad (5.2a)$$

$$g_j^s \leq E_j \quad \forall j \in A \quad \pi_{gj}^s \quad (5.2b)$$

$$g_j^s \leq E_j^{\text{os}} \quad \forall j \notin A \quad \pi_{gj}^s \quad (5.2c)$$

Em outras palavras, o problema de oferta sob incerteza é também um problema de dois níveis. A

Figura 5-1 a seguir ilustra o processo de decisão de ofertas sob incerteza.

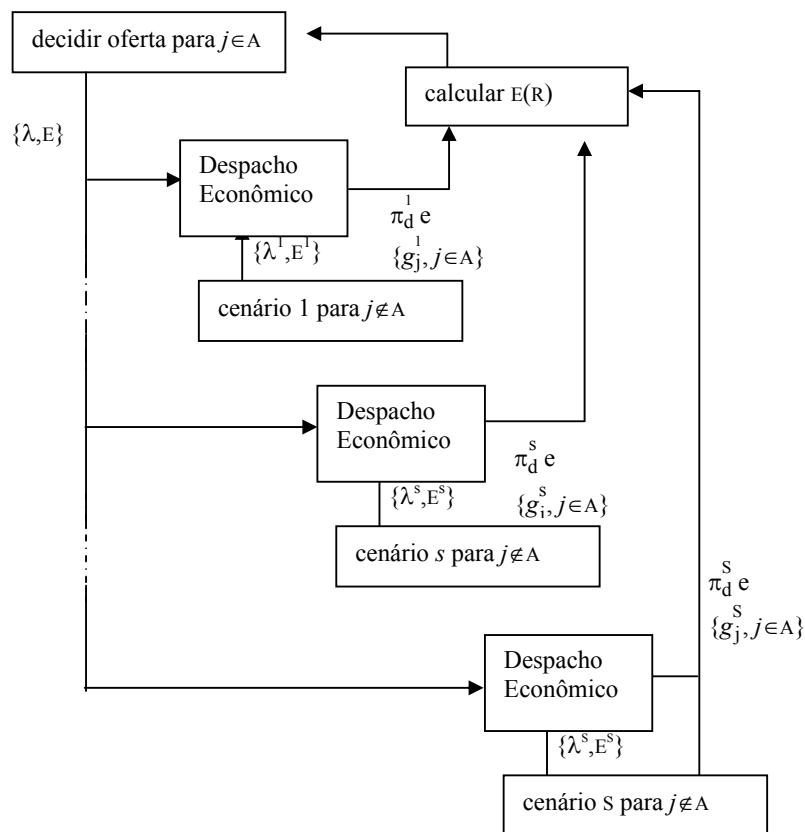


Figura 5-1 – Estratégia de oferta sob incerteza

Observe que, no processo de ofertas sob incerteza, as decisões de oferta de preço e quantidade para a empresa A no Problema (5.1) são as *mesmas* para todos os cenários (*non-anticipativity*) ; *apenas* o conjunto de ofertas de preços quantidades dos geradores concorrentes é alterado em cada cenário. Em outras palavras, o modelo de ofertas sob incerteza busca a estratégia de ofertas que maximiza a receita para o conjunto de cenários considerado.

Esta abordagem é distinta daquela onde o problema sob incerteza é decomposto em s sub-problemas independentes entre si e as ofertas são otimizadas separadamente para cada cenário. Estes tipos de modelos *não* constituem modelos de oferta sob incerteza e sim formam uma seqüência de decisões *determinísticas* e desacopladas.

5.3 Formulação como um problema de otimização de um nível não linear

O problema de otimização de ofertas sob incerteza pode ser formulado como um problema de dois níveis, conforme abaixo¹⁶:

$$\text{Max} \quad \sum_{s=1}^S p^s \sum_{j \in A} [\pi_d^s - c_j] g_j^s \quad (5.3)$$

Sujeito a:

$$E_j \leq g_j \quad \forall j \in A$$

$$\text{Min} \quad \sum_{s \in S} \sum_{j \in A} \lambda_j^s g_j^s + \sum_{j \notin A} \lambda_j^{\text{os}} g_j^s$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J g_j^s = d^s \quad \forall s \in S$$

$$g_j^s \leq E_j \quad \forall j \in A, \forall s \in S$$

$$g_j^s \leq E_j^{\text{os}} \quad \forall j \notin A, \forall s \in S$$

Da mesma forma que no Capítulo 3, o Problema (5.3) pode ser reescrito como um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio através da substituição do problema seguidor (despacho econômico) por suas condições de otimalidade. Esta formulação é apresentada abaixo:

¹⁶ Voltamos a lembrar que é implicitamente assumido nesta tese que todas as variáveis devem ser positivas ou iguais a zero e por isto estes limites não serão representados explicitamente nos modelos apresentados.

(5.4)

$$\text{Max}_{\{\lambda_j, E_j\}} \sum_{s=1}^S p_s \sum_{j \in A} [\pi_d^s - c_j] g_j^s$$

sujeito a :

$$E_j \leq \bar{g}_j \quad j \in A$$

$$\sum_{\forall j} g_j^s = d_s \quad s = 1, \dots, S$$

$$g_j^s \leq E_j \quad j \in A, s = 1, \dots, S$$

$$g_j^s \leq E_j^{os} \quad j \notin A, s = 1, \dots, S$$

$$\pi_d^s + \pi_{gj}^s - \lambda_j \leq 0 \quad j \in A, s = 1, \dots, S$$

$$\pi_d^s + \pi_{gj}^s \leq \lambda_j^{os} \quad j \notin A, s = 1, \dots, S$$

$$\pi_{gj}^s \leq 0 \quad \forall j, s = 1, \dots, S$$

$$\sum_{j \in A} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin A} \lambda_j^{os} g_j^s - \pi_d^s d_s - \sum_{j \in A} \pi_{gj}^s E_j - \sum_{j \notin A} \pi_{gj}^s E_j^{os} = 0 \quad s = 1, \dots, S$$

Uma vez mais, a maior dificuldade para a solução do Problema (5.4) está nos produtos de variáveis na função objetivo - $\pi_d g_j$ - e na igualdade primal-dual - $(\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j)$, que além de introduzem não linearidades e não convexidades e agora variam por cenário de oferta s .

A abordagem de solução proposta nesta tese é a aplicação da expansão binária e a conseqüente transformação do problema não linear (5.4) num problema inteiro misto.

5.4 Formulação linear-inteira com expansão binária

Aplicando as mesmas transformações de variáveis e restrições apresentadas no Capítulo 3 para o caso determinístico, o modelo (5.5) a seguir apresenta a formulação inteira-mista final para o caso estocástico:

$$\text{Max} \quad \sum_{s=1}^S p^s [\sum_{j \in A} \lambda_j g_j^s + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj}^s - \pi_{gj}^s E_j + \Delta_{E_j} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kj}^s - c_j g_j^s] \quad (5.5)$$

Sujeito a:

$$E_j + \Delta_{E_j} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \leq \bar{E}_j \quad j \in A \quad (5.5a)$$

$$\lambda_j + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \leq \bar{\lambda}_j \quad j \in A \quad (5.5b)$$

$$\sum_{j=1}^J g_j^s = d^s \quad \forall s \quad (5.5c)$$

$$g_j^s - E_j - \Delta_{E_j} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kj} \leq 0 \quad j \in A; \forall s \quad (5.5d)$$

$$g_j^s \leq E_j^{\text{os}} \quad j \notin A; \forall s \quad (5.5e)$$

$$\pi_d^s + \pi_{gj}^s - \lambda_j - \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kj} \leq 0 \quad j \in A; \forall s \quad (5.5f)$$

$$\pi_d^s + \pi_{gj}^s \leq \lambda_j^{\text{os}} \quad j \notin A; \forall s \quad (5.5g)$$

$$\pi_{gj}^s \leq 0 \quad \forall j; \forall s \quad (5.5h)$$

$$\sum_{j \in A} [\lambda_j g_j^s + \Delta_{\lambda_j} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kj}^s] - [\pi_{gj}^s E_j + \Delta_{E_j} \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kj}^s] + \sum_{j \notin A} [\lambda_j^{\text{os}} g_j^s - \pi_{gj}^s E_j^{\text{os}}] - \pi_d^s d^s = 0 \quad \forall s \quad (5.5i)$$

$$0 \leq g_j^s - z_{kj}^s \leq G(1-x_{kj}) \quad j \in A; \forall k; \forall s \quad (5.5j)$$

$$0 \leq z_{kj}^s \leq G x_{kj} \quad j \in A; \forall k; \forall s \quad (5.5k)$$

$$0 \leq w_{kj}^s - \pi_{gj}^s \leq \Pi_g(1-y_{kj}) \quad j \in A; \forall k; \forall s \quad (5.5l)$$

$$0 \leq -w_{kj}^s \leq \Pi_g y_{kj} \quad j \in A; \forall k; \forall s \quad (5.5m)$$

$$x_{kj}, y_{kj} \in \{0,1\} \quad j \in A; \forall k \quad (5.5n)$$

Observa-se do Problema (5.2) e do problema final (5.5) que as decisões de ofertas de preço e quantidade para a empresa A são as *mesmas* para todos os cenários, apenas as ofertas dos concorrentes e a demanda é distinta em cada cenário. Como consequência, embora o tamanho do problema cresça com o número de cenários, o número de variáveis inteiras na expansão binária aplicada para obter o Problema (5.5) permanece o *mesmo* do caso determinístico. Este aspecto é particularmente importante para garantir um bom desempenho computacional do modelo inteiro.

Em outras palavras, como a expansão binária é bastante flexível e pode ser aplicada a qualquer produto de variáveis, diferentes aplicações podem resultar em diferentes formulações e performances computacionais do modelo inteiro-misto resultante. Por exemplo, em [19] e [34], a expansão binária é aplicada na variável $g_j(\cdot)$ – resultado da solução do problema de otimização (5.2) – o que eleva significativamente o número de

variáveis inteiras pois esta variável é representada *para cada usina* da empresa A e *para cada cenário* simulado. Conseqüentemente, o desempenho do modelo inteiro tende a ser inferior e torna-se inviável, como de fato foi observado naquele trabalho.

Neste trabalho optou-se por aplicar a expansão binária nas variáveis λ_j e E_j , pois estas são as variáveis que estão sob controle direto da empresa ofertante A e, ademais, fornecem uma vantagem computacional importante quando o caso estocástico é considerado (o número de variáveis inteiras no caso sob incerteza é análogo ao do caso determinístico).

Como já mencionado, não existem muitos trabalhos publicados analisando estratégia de oferta sob incerteza com modelos de programação inteira-mista. Kelman em [62] foi um dos primeiros autores a propor um modelo linear-inteiro para ofertas sob incerteza. Porém, naquele trabalho a formulação do problema apresenta um elevado número de variáveis inteiras em cada cenário devido à abordagem considerada (linearizar uma aproximação logarítmica dos produtos de variáveis). Por esta razão, Kelman apresenta heurísticas para a solução direta do Problema (5.1). García em [42] apresenta um modelo de ofertas sob incerteza baseado em técnicas heurísticas. Baillo em [1] e [4] apresenta uma formulação linear-inteira para o problema estudado em [42]. Esta formulação é baseada na curva de demanda residual das empresas concorrentes e sua estratégia de oferta é uma “curva” de oferta, ao invés de uma oferta única de preço/quantidade como feito neste trabalho. Finalmente, Candal em [19] apresentou uma abordagem heurística para a resolução de um modelo de ofertas sob incerteza através da penalização da igualdade primal-dual na função objetivo, com bons resultados obtidos e validados através de um modelo inteiro-misto.

5.5 Obtenção dos cenários de oferta

Um aspecto importante e pouco discutido na literatura é a obtenção dos cenários de oferta para os demais agentes concorrentes para que o modelo (5.5) possa ser aplicado de forma realista com êxito.

A incerteza das ofertas dos concorrentes pode ser modelada de diversas maneiras, como por exemplo, através do sorteio de cenários de ofertas por uma distribuição de probabilidades assumida ou utilização de modelos estocásticos (como modelos auto-

regressivos, que tentam modelar o processo estocástico subjacente) para produzir cenários de ofertas. Entretanto, uma pesquisa realizada pelo autor durante 2003 e 2004 junto a empresas e pesquisadores nas Américas, Europa e Oceania concluiu que o uso da informação histórica ainda é o método mais utilizado.

Neste contexto, uma abordagem utilizada é através de um procedimento típico de “reconhecimento de padrões”: a idéia seria realizar a previsão da demanda do dia em estudo e, através de um método de clusterização, selecionar uma amostra de dias históricos cuja demanda tenha sido suficientemente similar à demanda deste dia. Desta forma, as ofertas realizadas pelos agentes em cada hora de cada um destes dias selecionados formaria um possível cenário de preço e quantidade (equiprovável) para o dia em estudo.

Por exemplo, assumindo que a demanda do dia em estudo seja 100 MWh, o método buscaria o número de dias no passado cuja demanda foi próxima a 100 MWh. Assumindo que 45 dias foram selecionados, teríamos 45 cenários de ofertas de preço e quantidade (ou indisponibilidades, ou demandas) para cada uma das horas do dia seguinte para as quais poderíamos aplicar o modelo (5.5) para fornecer a estratégia de oferta da empresa A. Este é um método bastante utilizado na vida real. A Figura abaixo ilustra o processo:

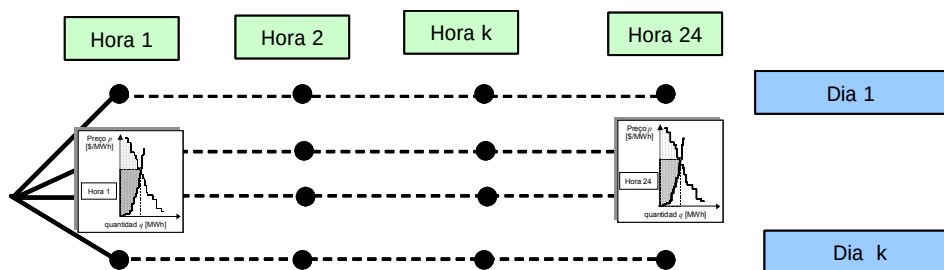


Figura 5-2 – Obtendo os cenários de oferta históricos

A discussão subsequente ao método proposto anterior consiste em saber se a informação das ofertas de preço/quantidade de todos os agentes é um dado público nos mercados de eletricidade. Nesta mesma pesquisa, o autor, concluiu que esta informação está de fato disponível nos principais mercados. Por exemplo, na Espanha, no antigo mercado da Califórnia, no pool PJM, no mercado de Ontário, no mercado Australiano, Norueguês, Neozelandês e em El Salvador, a informação da oferta de preço-quantidade de cada agente é disponibilizada após o fechamento do mercado. É verdade, porém, que esta

informação é disponibilizada (na maioria das vezes) apenas para os agentes do mercado e, em alguns casos, alguns dias (ou semanas) após o fechamento do mercado.

5.6 Extensões adicionais

As mesmas extensões apresentadas no Capítulo 4 para o problema determinístico (rede de transmissão, otimização de contratos e opções, ofertas de preços e/ou quantidade, custos de partida e curva de oferta) podem ser diretamente incorporadas no modelo sob incerteza (5.5).

Uma extensão adicional no modelo de ofertas sob incerteza consiste na representação do perfil de risco da empresa A ao decidir sua oferta. Nos modelos apresentados até o momento, a empresa A otimiza o “valor esperado” de suas receitas, sem preocupação com o risco associado a sua decisão nos cenários desfavoráveis. Esta é uma abordagem “neutra” em relação ao risco. Porém, a representação de perfis diferentes de risco da empresa pode ser importante no seu processo de tomada de decisão.

O ambiente de programação inteira proposto permite a incorporação imediata de diversos tipos de restrições de risco, como restrições de Value at Risk [86] (modelado através de restrições lineares inteiras), Conditional Value at Risk [85] [87] (modelado através de restrições lineares) e representação de funções utilidades linear por partes (modelado através de restrições lineares), como utilizado em [91].

5.7 Estudo de caso

A aplicação do modelo linear-inteiro proposto nesta tese para o problema de ofertas será ilustrada a partir de um estudo de caso derivado do sistema elétrico Brasileiro. Para ter uma apresentação mais clara e didática, será apresentado o modelo de ofertas puras de preços sob incerteza e, como parte da discussão, o modelo determinístico será abordado. Exemplos de aplicações de modelos de ofertas mais complexos, como a comparação entre ofertas conjuntas de preços e quantidades com modelos de ofertas “puras” de preços ou “puras” de quantidade são apresentadas e discutidas em detalhes no Anexo D.

5.7.1 Visão Geral do Sistema Elétrico Brasileiro

O Setor Elétrico Brasileiro possui uma capacidade instalada para geração de energia elétrica de 96.000 MW (2006). A participação hidroelétrica é bastante elevada, responsável por 85% da capacidade instalada do sistema, com cerca de 110 usinas hidro localizadas em uma complexa topologia através de diversas bacias hidrográficas. A participação térmica (38 usinas) inclui usinas nucleares, a gás natural (ciclo simples e combinado), carvão e óleo diesel. O sistema possui desde usinas de grande porte (como as hidroelétricas de Itaipu, com 14.000 MW; Tucuruí, com 8.000 MW e diversas outras entre 500 e 2.000 MW) até usinas de pequeno e médio porte, como as térmicas a gás natural (em sua grande maioria inferior a 500 MW) e óleo. O sistema elétrico encontra-se todo interconectado (no nível de alta tensão) por cerca de 80,000 km de linhas de transmissão. Uma descrição completa do Sistema e Setor Elétrico Brasileiro pode ser encontrada em [9].

A reforma do setor elétrico foi iniciada em meados dos anos 90, com a privatização da maioria das distribuidoras, a criação da agência reguladora, do operador do sistema e do mercado de curto prazo de energia.

Como parte da “segunda” fase do processo de reforma desenvolvido em 2003, o Ministério de Minas e Energia e a Agência Reguladora investigaram a possibilidade de implementar um esquema de despacho por ofertas. Neste contexto, foram desenvolvidas ferramentas e metodologias para a simulação deste mercado visando identificar, sobretudo, a possibilidade de exercício de poder de mercado pelos geradores. Entre estas metodologias e ferramentas, incluíram análises do esquema de ofertas para usinas hidroelétricas em uma mesma cascata [67], simulação da competição de hidroelétricas utilizando modelos de teoria dos jogos [7][63], simulação da metodologia de oferta de preços sugerida pelo Ministério [20], entre outros.

5.7.2 Modelo de oferta utilizado

5.7.2.1 Empresa Estratégica (“empresa A”)

O sistema elétrico brasileiro é composto por cerca de 15 empresas principais de geração, que se encontram em quatro “submercados” (cujas fronteiras são identificadas por restrições de transmissão de caráter estrutural). Neste estudo de caso, escolhemos como agente estratégico a empresa CESP¹⁷, que controla cinco agentes hidroelétricos com uma capacidade instalada de 6900 MW (cerca de 8% da capacidade total do sistema) no estado de São Paulo. A Tabela 5-1 a seguir apresenta a lista de suas usinas, seus custos operativos variáveis e capacidades.

Usina	Capacidade (MW)	Custo Variável de Operação (R\$/MWh)
Paraíbuna	76	23.0
Jaguari	30	163.0
P. Primavera	1149	177.0
Jupiá	1480	224.0
I. Solteira	4186	279.0

Tabela 5-1 – Características das usinas da empresa A (CESP)

A etapa considerada neste estudo de caso é de uma hora. Os custos variáveis das usinas hidroelétricas da Tabela 5-1 correspondem ao “valor da água” de cada usina, que correspondem ao custo de oportunidade destas usinas entre produzir energia “hoje” ou armazenar água para geração no futuro. O valor da água de cada usina por sua vez foi calculado a partir de um modelo de despacho hidrotérmico estocástico [49], similar ao utilizado pelo Operador Nacional do Sistema na operação do sistema elétrico Brasileiro. Para obtermos valores da água em base horária, o tradicional estudo integrado de longo→ médio→ curto prazo foi realizado, onde uma cadeia de modelos computacionais de despacho hidrotérmico é aplicada a cada horizonte de análise com o grau de detalhe na modelagem apropriado [89]. O “link” entre duas etapas distintas é fornecido pela conhecida “função de custo futuro”, conforme descrito em [78] e em [89].

¹⁷ Companhia Energética do Estado de São Paulo, <http://www.cesp.com.br>.

5.7.2.2 *Modelo de estratégia de ofertas sob incerteza*

Para efeitos deste estudo de caso, utilizamos um modelo de ofertas de preços “pura”, isto é, apenas as ofertas de preço são variáveis de decisão para a CESP (as quantidades ofertadas de cada gerador são suas capacidades instaladas). As decisões de ofertas de preços de cada usina foram discretizadas em 128 segmentos no intervalo [100%; 300%] do respectivo valor da água de cada usina.

5.7.2.3 *Incerteza na oferta dos competidores: abordagem por cenários*

Como visto nas seções anteriores, a incerteza na oferta dos competidores da CESP é representada através de cenários de ofertas de preço e quantidade para cada uma das 133 usinas restantes¹⁸. Estes cenários podem ser ainda combinados com cenários de demanda.

Neste estudo de caso desta tese, dez cenários de oferta para os competidores da CESP foram criados através de um sorteio aleatório dos seguintes parâmetros:

- oferta de quantidade: foi sorteada a partir de uma distribuição binomial de falhas de cada gerador. Desta forma, a oferta de cada gerador competidor da CESP consiste em estar ou não disponível em sua capacidade máxima em cada cenário. As usinas da CESP foram assumidas como sempre disponíveis em todos os cenários;
- oferta de preço: foram mantidas constantes em todos os cenários e iguais aos valores da água de cada usina, no caso de hidroelétricas, ou ao custo operativo, no caso de termoeletricas. Os valores da água destas usinas foram calculados com a mesma abordagem de cálculo aplicada para as usinas da CESP.

Adicionalmente, o nível de demanda em cada cenário foi sorteado de uma distribuição normal truncada com desvio padrão de 10% ao redor da demanda prevista (50.000 MW).

Assim, os dez cenários representando a incerteza nas ofertas dos competidores da CESP são formados por dez vetores com três componentes principais [demanda sorteada,

¹⁸ Estas usinas são capazes de atender a demanda na ausência da CESP, o que significa que, sob o ponto de vista da empresa estratégica CESP, o problema de otimização é limitado.

disponibilidade de cada gerador sorteada, custo operativo variável de cada gerador]. Dada esta amostra de cenários, a CESP realiza sua otimização de ofertas sob incerteza através de um modelo de ofertas “puras” de preços.

Observe que existe grande flexibilidade para utilizar outras abordagens para representar as ofertas dos competidores. Por exemplo, nesta tese optou-se por representar a “incerteza” na disponibilidade dos demais agentes e na demanda. Como discutido anteriormente, uma abordagem alternativa consiste em sortear ofertas de preços e quantidades baseado no conjunto histórico de informações disponibilizadas pelo operador do mercado. Neste contexto, uma abordagem consiste em prever a demanda a ser realizada no dia a ser estudado e usar um método de classificação (“clustering”) para escolher dias no histórico que sejam similares ao dia a ser estudado. Com isto, as ofertas de preços e quantidades realizadas nestes dias seriam utilizadas como cenários para o dia sob análise.

Obviamente, a utilização de diferentes amostras (ou técnicas de amostragem) de ofertas de preços/quantidades para os demais agentes produz diferentes resultados do modelo de oferta sob incerteza proposto nesta tese. Em outras palavras, as ofertas ótimas resultantes são compatíveis com a amostra utilizada.

5.7.2.4 *Modelo inteiro-misto implementado*

O modelo de programação inteira-mista para o problema de ofertas foi implementado e resolvido utilizando um algoritmo do tipo Branch and Bound. O pacote de otimização X-press (v14) [37] foi utilizado como “solver” para o problema.

O modelo estocástico (5.5) possui $\log_2(128) + 1 = 8$ variáveis binárias para cada uma das cinco usinas da empresa CESP, totalizando 40 variáveis binárias para o problema. O número total de variáveis contínuas é 2694 (preço *spot* e geração de cada usina em cada cenário, outras variáveis duais, etc) e 2545 restrições. O tempo de processamento para a resolução do problema foi de 120 segundos em um PC com processador Pentium IV 2.4 GHz e 512 Mbytes RAM.

Observe que este não é um problema de programação inteira de grande porte. Esta é a vantagem da abordagem utilizada, que reduz significativamente o número de variáveis

binárias, permitindo assim trabalhar numa formulação linear inteira que garanta o ótimo global do problema não linear de ofertas.

5.7.3 Modelo de despacho por custos

A fim de avaliar o resultado da estratégia de ofertas produzida pelo modelo anterior, foi também simulado um despacho onde as ofertas dos geradores da CESP é o próprio custo operativo variável, isto é, onde não há incentivos para a empresa ofertar estrategicamente. Este modelo é chamado de modelo de despacho por custos.

5.7.4 Resultados

A receita líquida esperada da CESP com as ofertas do modelo (5.5) foi de R\$ 545,000, contra uma receita líquida esperada de R\$ 477,000 obtida caso a mesma tivesse ofertado seus custos reais para cada usina. Ou seja, houve um ganho de R\$ 68,000 (14%) na estratégia determinada. A Tabela 5-2 compara as ofertas resultantes do modelo com os custos operativos reais da Tabela 5-1 e apresenta as capacidades ofertadas (iguais às capacidades máximas). Observe que apenas dois geradores – Jaguari e I. Solteira – tiveram ofertas de preço distintas de seus custos operativos.

Usina	Oferta de Preço (R\$/MWh)	Custo Variável de Operação (R\$/MWh)	Capacidade Ofertada (MW)
Paraíbuna	23.0	23.0	76
Jaguari	366.8	163.0	30
P. Primavera	177.0	177.0	1149
Jupiá	224.0	224.0	1480
I. Solteira	370.5	279.0	4186

Tabela 5-2 – Ofertas de Preços x Custo de Operação das usinas da CESP

As ofertas de preço da Tabela 5-2 formam a *curva de oferta acumulada* (quantidade e preços ofertados) que a CESP oferece ao mercado, que apresenta o formato discreto e “degrau” e é apresentada na Figura 5-3 abaixo. Na mesma figura é apresentada a *curva de oferta acumulada* da CESP caso a mesma ofertasse os reais *custos variáveis* de operação de suas usinas. Observa-se que quantidades semelhantes são oferecidas pela empresa por preços diferentes dependendo da estratégia de ofertas adotada.

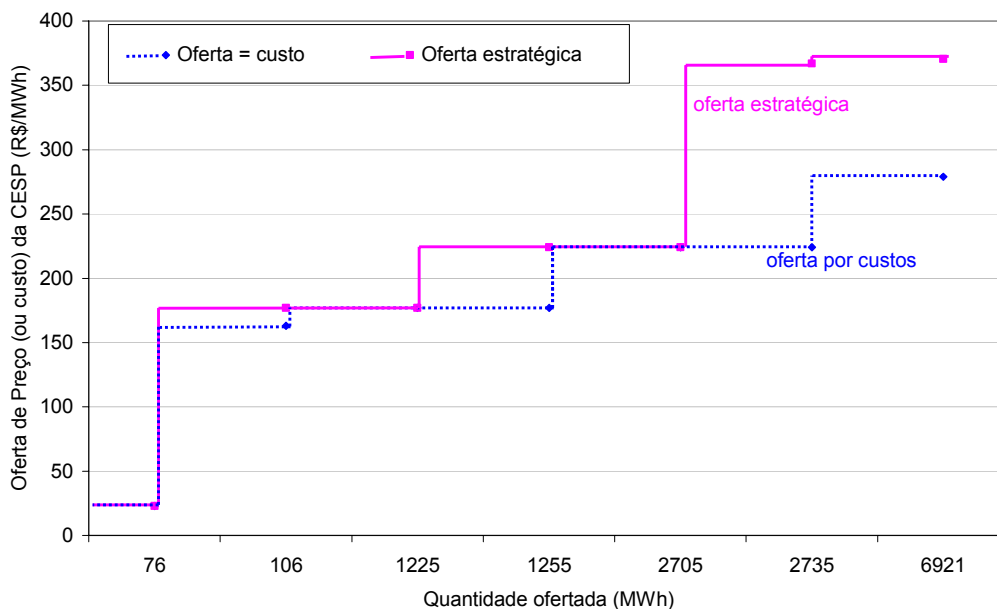


Figura 5-3 – Curva de oferta acumulada da CESP

A Tabela 5-3 a seguir mostra a produção de energia de cada usina, o preço *spot* e a renda total da CESP em cada um dos dez cenários utilizados na otimização.

Cenário → Usina ↓	Unidade	1	2	3	4	5
Paraibuna	MWh	76	76	76	76	76
Jaguari	MWh	0	0	30	30	0
P. Primavera	MWh	1149	1149	1149	1149	1149
Jupiá	MWh	1480	1480	1480	1480	1480
I. Solteira	MWh	0	0	1875	1741	0
Preço spot	R\$/MWh	346.0	238.0	370.5	370.5	238
Renda total	10 ³ R\$	399.3	107.1	643.6	631.3	107.1
Cenário → Usina ↓	Unidade	6	7	8	9	10
Paraibuna	MWh	76	76	76	76	76
Jaguari	MWh	30	30	30	30	0
P. Primavera	MWh	1149	1149	1149	1149	1149
Jupiá	MWh	1480	1480	1480	1480	1480
I. Solteira	MWh	4186	4186	3440	662	0
Preço spot	R\$/MWh	383.0	371.0	370.5	370.5	361.0
Renda total	10 ³ R\$	941.3	858.3	786.8	532.5	439.9

Tabela 5-3 – Produção (MWh), Renda (mil R\$) e Preço Spot por cenário (R\$/MWh)

A Figura 5-4 a seguir compara (em cada cenário) os preços *spot* resultantes com aqueles que seriam obtidos no despacho baseado em custos.

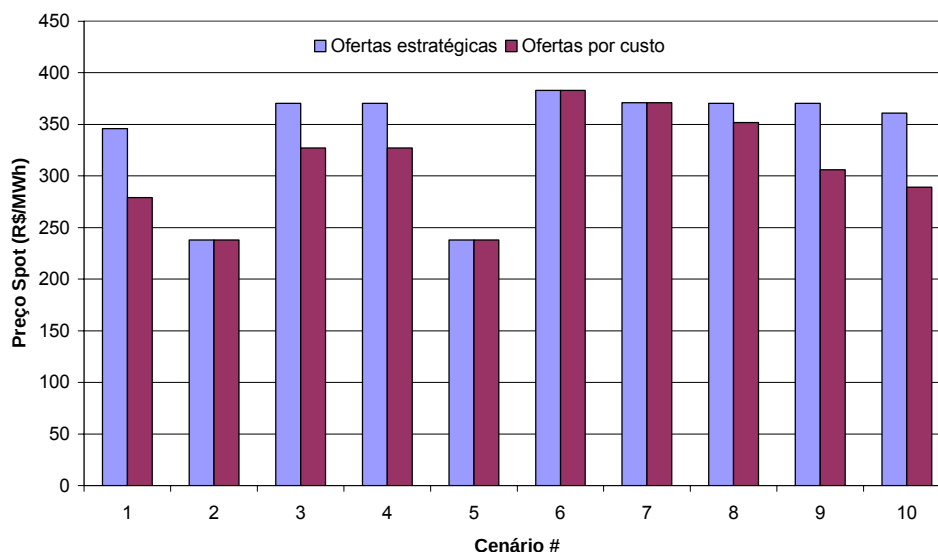


Figura 5-4 – Preços Spot (despacho por oferta x despacho por custos) por cenário

Observe que os preços *spot* resultantes do despacho por ofertas são mais elevados que os resultantes do despacho por custos em seis dos dez cenários simulados. A Figura 5-5 e Figura 5-6 a seguir comparam, respectivamente, a produção de energia total da CESP e a renda líquida total da empresa em cada um dos cenários simulados para ambas as estratégias de oferta.

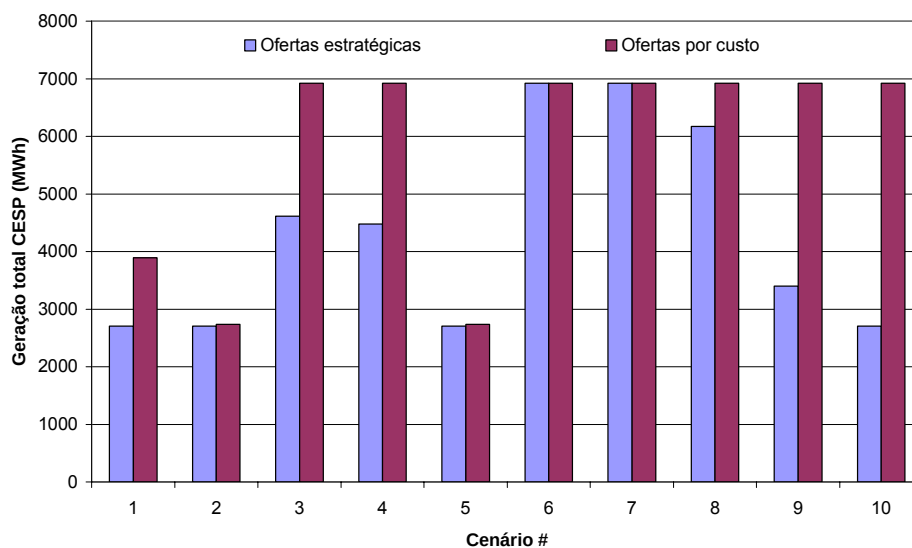


Figura 5-5 – Geração total CESP (despacho por oferta x despacho por custos) por cenário

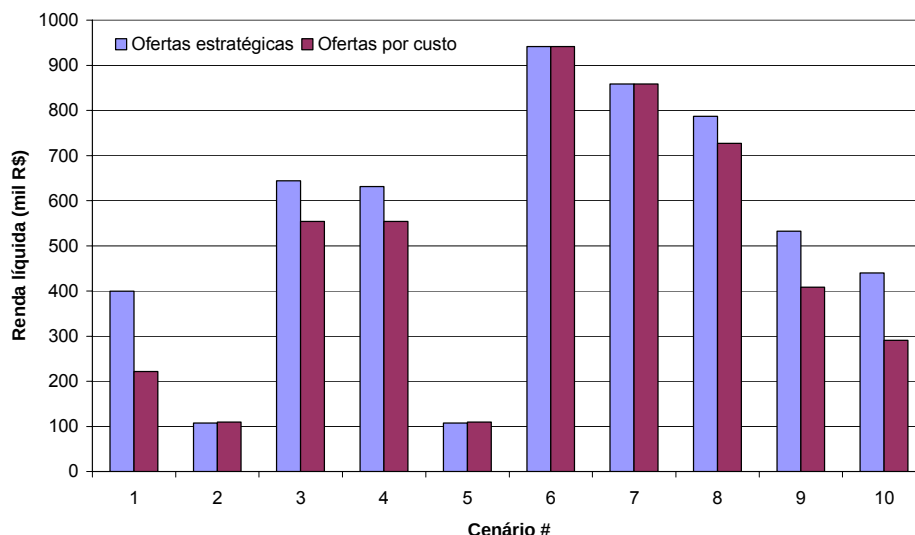


Figura 5-6 – Renda líquida Total da CESP (despacho por oferta x despacho por custos) por cenário

Pode-se observar na Tabela 5-3 que a CESP teve o controle do gerador marginal (I.Solteira) nos cenários #3, 4, 8 e 9, o que naturalmente resultou em níveis de produção inferiores aos obtidos no despacho por custos porém cuja oferta de preço realizada (superior ao custo variável) resulta em ganhos nestes cenários. Já nos cenários #1 e 10 a CESP não teve o controle do gerador marginal, e inclusive a usina Jaguari foi deslocada na ordem de mérito, mas a estratégia de oferta assegurou uma receita positiva. Nestes dois cenários a CESP “sacrifica” um dos seus geradores na ordem de mérito (a oferta muito elevada de Jaguari a desloca no despacho), mas induz o despacho de outros geradores mais “caros” no sistema, o que resulta em um aumento do preço *spot* e da receita total da CESP com os demais geradores despachados.

Uma análise interessante consiste em comparar a diferença (em cada cenário) entre a receita da CESP obtida quando a empresa oferta estrategicamente e quando a empresa oferta os seus reais custos de produção. A Figura 5-7 a seguir apresenta a diferença entre as receitas obtidas pela CESP no despacho por ofertas e no despacho por custo para cada cenário (diferença por cenário entre os valores da Figura 5-6; valores *positivos* indicam *melhor* performance do modelo de *ofertas estratégicas*, valores *negativos* indicam *melhor* performance de ofertas por *custos*).

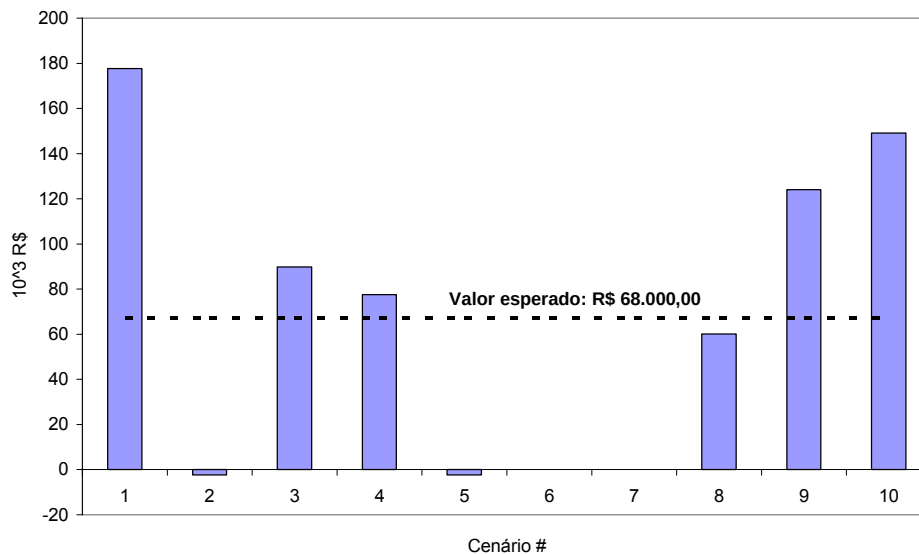


Figura 5-7 – Diferença entre receita líquida CESP com despacho por oferta x por custos

Observa-se que nos cenários #6 e 7 as duas estratégias de oferta (por custos e por preços) resultariam em receitas semelhantes. A razão é que o preço *spot* destes cenários excede a oferta realizada por I. Solteira. Como consequência, a estratégia de oferta da CESP não teve efeito na sua renda líquida.

Por sua vez, a diferença na renda líquida dos cenários #2 e 5 é negativa, indicando que o despacho por custos foi superior à estratégia de oferta estabelecida nestes cenários. A razão é que, nestes cenários, o preço *spot* encontra-se entre o custo variável de Jaguari e sua oferta de preço (Tabela 5-2 e Tabela 5-3). Consequentemente, esta usina não despachou e perdeu a oportunidade de produzir e gerar um lucro para a CESP caso tivesse ofertado o real custo operativo.

Entretanto, como visto na Figura 5-7, esta perda foi compensada por elevados ganhos em todos os outros cenários, o que fez com que a receita líquida média considerando ofertas estratégicas fosse superior à estratégia de ofertar custos em R\$68.000 e mantendo a coerência com o critério de otimização do modelo (5.5): maximizar o retorno na média dos cenários.

5.7.5 Análise de sensibilidade: ofertas sob incerteza x ofertas determinísticas (“tailor made”) para cenários específicos

O estudo de caso analisado até o momento assume um modelo de ofertas sob incerteza, isto é, o “futuro” é desconhecido e determina-se uma estratégia *única* que maximize a receita para a amostra de “possíveis futuros” considerada. Uma questão interessante consiste em comparar o resultado da otimização sob incerteza em um cenário específico (como realizado anteriormente) com uma estratégia de oferta específica que seria obtida caso o “futuro” fosse conhecido com exatidão para este mesmo cenário, isto é, fosse determinístico. De maneira simétrica, outra questão interessante seria analisar como a estratégia determinada especificamente para um cenário se comporta na ocorrência de outros cenários.

Estes são os tópicos analisados nesta seção.

5.7.5.1 Sensibilidade 1: otimização sob incerteza e otimização determinística em cada cenário

Assim, vamos assumir inicialmente que a CESP soubesse antecipadamente que o cenário #6 ocorreria na vida real. Neste caso, o modelo (5.5) pode ser aplicado deterministicamente para apenas o cenário #6. Como resultado, o gerador marginal seria I. Solteira, com uma oferta de preço de 385.0 \$/MWh, que também é o preço *spot*. Em outras palavras, sua estratégia de oferta ótima no caso determinístico consiste em tentar controlar o gerador marginal, de modo a controlar o preço *spot* deste cenário e com isso aumentar os seus lucros¹⁹.

Este procedimento foi então estendido para todos os cenários, isto é, foram calculadas as estratégias de ofertas ótimas determinísticas para cada um dos dez cenários anteriormente simulados através do modelo (5.5). Com isto, obtém-se uma estratégia de oferta “tailor-made” (específica) para *cada* um dos cenários isoladamente.

A Figura 5-8 a seguir compara o preço *spot* obtido por cenário de acordo com as estratégias de oferta “tailor-made” para cada cenário e a estratégia de oferta sob incerteza da Tabela 5-2.

¹⁹ Observe que na seção anterior, quando há incerteza nos cenários de ofertas dos rivais, a oferta de I. Solteira é de 370.5 \$/MWh.

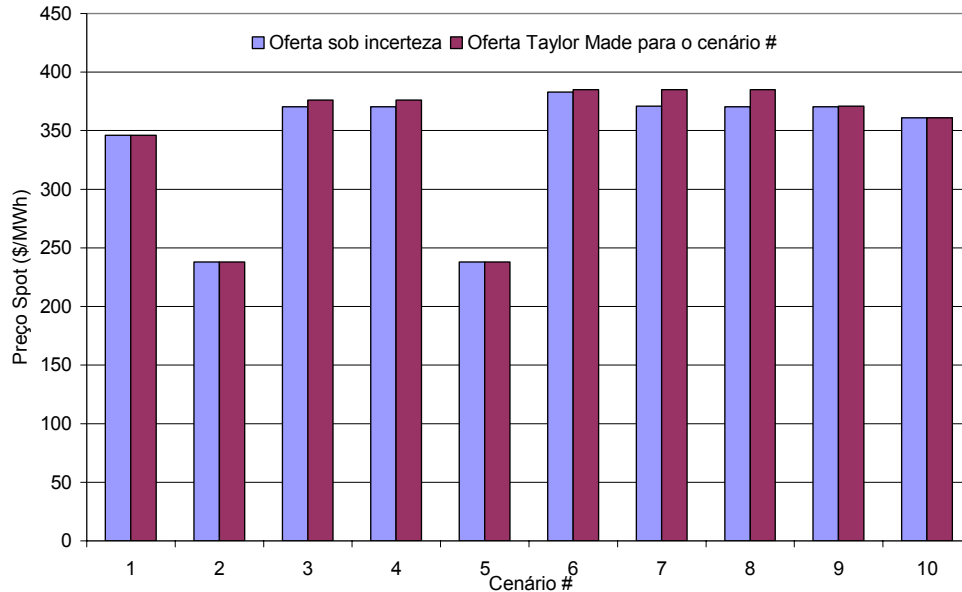


Figura 5-8 - Preço Spot (R\$/MWh) – ofertas sob incerteza x ofertas Taylor-made

Como esperado, observa-se que os preços *spot* por cenário na estratégia “tailor-made” são sempre iguais ou superiores aos preços *spot* por cenário resultantes da estratégia “sob incerteza”. A razão para isto é imediata e esperada: a oferta tailor-made a estratégia é otimizada especificamente para cada cenário (ofertas dos concorrentes são assumidas como conhecidas) e por construção é a melhor possível. Em alguns cenários, a oferta sob incerteza chega a ser tão boa quanto à “tailor-made”.

5.7.5.2 Sensibilidade 2: otimização determinística e o impacto da incerteza

Um outro exercício interessante é a análise do tipo “what-if”, que é bem conhecida na teoria de decisão sob incerteza quando analisamos estratégias determinísticas. Neste tipo de análise, verifica-se o resultado de uma estratégia determinística na ocorrência de um outro cenário (distinto ao utilizado para elaborar a estratégia).

Por exemplo, vamos assumir que a estratégia da CESP “tailor made” para o Cenário #6 foi utilizada como estratégia de oferta também para os demais cenários. A pergunta trivial seria o que ocorreria com a renda da empresa nos demais cenários.

A Figura 5-9 a seguir apresenta, para cada cenário, a diferença entre a receita líquida obtida com o modelo de ofertas sob incerteza (Figura 5-6) e as obtidas quando a oferta estratégica específica para o cenário #6 é aplicada.

Valores *positivos* significam que a renda líquida da *oferta sob incerteza* foi *superior* no cenário em análise e valores *negativos* significam que a renda líquida da *oferta do cenário #6* foi *superior*.

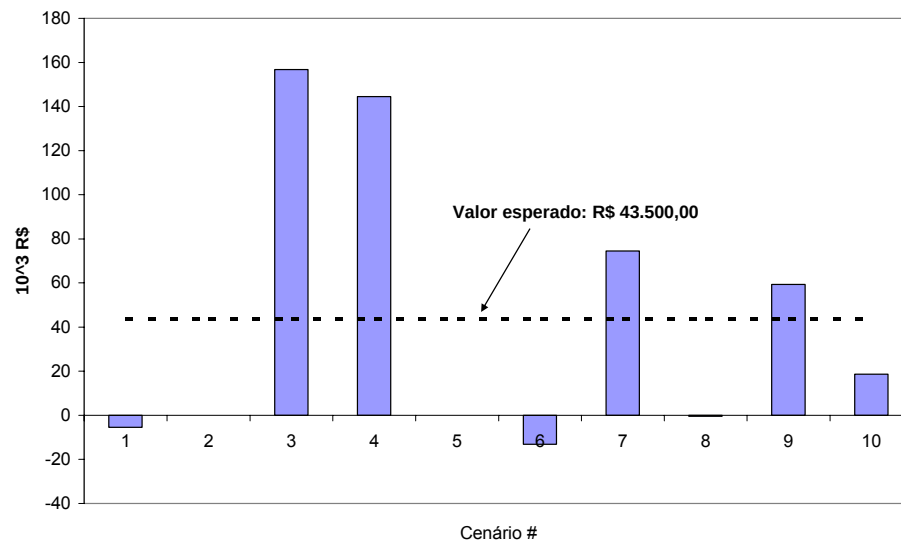


Figura 5-9 – Diferença entre receita líquida CESP com a estratégia sob incerteza x ofertas “tailor made” para cenário #6

Observa-se que para o cenário 6 em específico a estratégia de oferta determinística leva a um ganho (valor negativo) de \$13.000,00 em relação ao modelo de oferta sob incerteza. Entretanto, quando os demais cenários são considerados, observamos que a renda obtida em cada cenário com a oferta sob incerteza é superior (valor positivo). Isto pode ser observado claramente nos cenários #3, 4, 7, 9 e 10. Nestes cenários a oferta específica do cenário #6 seria um “desastre”. Nenhuma diferença seria observada nos cenários #2 e #5 e a estratégia “tailor made” forneceria até um ganho também no cenário #1 (além do cenário #6).

Dado que todos os cenários são equiprováveis, o ganho médio do modelo sob incerteza comparado com a estratégia “tailor made” é de \$43.500,00 (linha pontilhada da Figura 5-9).

5.7.6 Resumo das análises

As análises anteriores refletem o ganho que a otimização sob incerteza apresenta quando comparada com a oferta baseada em custos e com a otimização determinística para um cenário específico.

Embora existam ganhos e perdas individualmente nos cenários quando comparamos a estratégia de ofertas com a oferta por custos e com a oferta determinística para um dado cenário, o resultado da estratégia de oferta sob incerteza é melhor que as alternativas em média. Isto reflete justamente o critério de otimização do modelo: não ser necessariamente melhor nos cenários individuais, mas ser melhor na média dos cenários, sem considerar eventuais downsides devido ao risco em cenários específicos.

6 PARTE III: ESTRATÉGIAS DE OFERTAS COM MODELOS BASEADOS EM TEORIA DOS JOGOS

Como discutido no Capítulo 1, a complexidade do problema de otimização da oferta de um agente *price maker* aumenta quando observamos que a formação do preço *spot*, e consequentemente de sua receita, dependem não só da oferta realizada por este agente, mas das ofertas realizadas por *todos* os demais agentes *price makers* (seus “concorrentes” ou “rivals”).

No Capítulo anterior, utilizamos uma abordagem de representar as ofertas concorrentes através de cenários. Naquele caso, a empresa sendo otimizada busca determinar a estratégia de oferta que maximize sua receita esperada em todos os cenários, onde cada cenário continha uma hipótese de ofertas dos demais agentes (*price makers* e *price takers*).

Uma abordagem alternativa e bastante utilizada na prática é representar a lógica estratégica dos agentes. Nesta abordagem, os problemas de otimização de todos os agentes *price makers* são representados simultaneamente e cada agente reage dinamicamente às ofertas de seus rivais, “conjecturando” sobre o comportamento *racional* dos demais agentes até obter uma solução de equilíbrio.

O objetivo da terceira parte desta tese, e deste Capítulo, é, portanto, estender mais uma vez os modelos até então apresentados para agora representar explicitamente a *dinâmica* da competição entre os agentes no processo de determinar ofertas ótimas, para isso utilizando um modelo de equilíbrio segundo uma abordagem por “teoria dos jogos”.

6.1 Teoria dos jogos e equilíbrios de Nash em mercados competitivos de eletricidade

A Teoria dos Jogos compreende o estudo de problemas de decisão de múltiplos agentes, que usualmente surgem no âmbito da teoria econômica e organização industrial [102]. Um “jogo” é uma determinada situação onde os indivíduos ou empresas (*jogadores*) iteram competitivamente segundo suas *estratégias* racionais e seguindo um conjunto de *regras*, previamente definido. Os jogos podem ser basicamente classificados em *cooperativos*, onde os participantes podem formar “coalizações” e atuar conjuntamente, e *não cooperativos*, onde cada agente busca a maximização de sua satisfação individual.

Modelos para estratégias de oferta baseados em teoria dos jogos vêm sendo intensamente aplicados, sobretudo por reguladores, para determinar e analisar estratégias de ofertas em mercados competitivos de energia [43]. A referência [47] apresenta uma recente e interessante análise dos instrumentos utilizados por reguladores nos principais mercados dos Estados Unidos para identificar e monitorar o abuso de poder de mercado, onde é ilustrado o uso de modelos baseados em teoria dos jogos em alguns casos.

Neste tipo de abordagem, o mecanismo de mercado (e o processo de definir uma estratégia de ofertas) é simulado através de um jogo não cooperativo: a primeira empresa estratégica otimiza sua oferta de forma a maximizar seu lucro (resolvendo o problema de otimização (2.12)), assumindo como conhecidas as decisões (ofertas) das demais. O processo é repetido para cada empresa, que “refaz” sua decisão baseada agora nas decisões atualizadas das demais, até se alcançar uma situação de Equilíbrio de *Nash* [41], que corresponde ao ponto de equilíbrio onde nenhuma empresa consegue elevar seus lucros *dadas* as ofertas dos demais. Ou seja, as estratégias de ofertas que fazem parte desse equilíbrio são simultaneamente as melhores respostas para todos os jogadores e não há incentivo para nenhum jogador desviar desse equilíbrio, unilateralmente. Dessa forma, os resultados da reação de todos os agentes de mercado são obtidos dinamicamente na medida em que o processo de competição entre os mesmos é simulado (todas as combinações de estratégias são testadas) até a posição de equilíbrio final, que como resultado fornece a oferta de equilíbrio.

Usualmente, as principais hipóteses dos modelos baseados em teoria dos jogos são: (i) a *disponibilidade de informação* para os agentes (isto é, cada agente assume como conhecido o espaço de estratégias de ofertas e remuneração associada a cada estratégia de sua empresa e das rivais) e (ii) a *racionalidade coletiva* (todos os agentes reagirão “racionalmente” às estratégias de seus rivais e visando sempre maximizar sua receita). Com estas hipóteses, empresas podem simular o comportamento de seus rivais e suas reações *racionais* conforme a dinâmica do mercado é representada.

Outra importante área de pesquisa contempla modelos baseados em teoria dos jogos com informação incompleta (assimétrica ou imperfeita), conhecidos como “jogos Bayesianos”, modelos com aprendizado e modelos sem racionalidade coletiva. Embora esta área tenha atraído bastantes pesquisadores mais recentemente ([27][35][37][105]),

estes modelos não fazem parte desta tese. Finalmente, as estratégias jogadas em um jogo podem ser puras (determinísticas), onde as estratégias são jogadas com 100% de probabilidade, ou mistas (probabilísticas), onde um agente “joga” um conjunto de estratégias X_i com probabilidades p_i e $\sum_i p_i = 100\%$.

O modelo desta tese lida com estratégias “puras” (e discretas, como será visto adiante) num conjunto de informação completa para um jogo não cooperativo.

6.2 Representação matemática do Equilíbrio de Nash

Vamos assumir que existem I empresas, indexadas por $i = 1, \dots, I$, que fazem ofertas tanto de preços (λ_i) como de quantidades (E_i). Empresas *price makers* (ou estratégicas) e *price takers* são representados da mesma forma, com a única diferença que as empresas *price takers* possuem uma única opção de oferta: sua capacidade máxima e seu custo real de produção. Por uma questão de simplicidade de notação, vamos assumir que cada empresa i possui apenas um gerador e que não há decisões de custos de partida (os custos operativos são lineares e iguais a c_i). Posteriormente será discutida a representação de múltiplos geradores por empresa e curvas de custos não lineares. Novamente, a duração de cada etapa é de 1 hora.

O Equilíbrio de *Nash* representa o resultado do processo simultâneo de busca pelas maximizações individuais descrito anteriormente. Um conjunto de ofertas de todas as empresas se encontra em equilíbrio se nenhum agente conseguir, unilateralmente, melhorar sua receita alterando sua estratégia enquanto todas as demais ofertas (de seus concorrentes) permanencem inalteradas.

Mais precisamente, seja $R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq i)$ a remuneração líquida da empresa i dado um conjunto de ofertas de equilíbrio $\{\lambda_i^e, E_i^e, \forall i = 1, \dots, I\}$. Caso a empresa i tente realizar outra oferta $\{\lambda_i, E_i\}$, sua nova remuneração líquida não excede a remuneração de equilíbrio $\{\lambda_i^e, E_i^e\}$. Esta condição de equilíbrio para a empresa i é traduzida matematicamente na seguinte restrição:

$$R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq i) \geq \text{Max}_{\lambda_i, E_i} R_i(\lambda_i, E_i, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq i) \quad (6.1)$$

onde $\text{Max}_{\lambda_i, E_i} R_i$ representa a maximização de R_i para todos os valores viáveis de λ_i e E_i , mantendo constantes as ofertas de todas as demais empresas. Em outras palavras, corresponde à maior receita²⁰ R_i dadas as ofertas de equilíbrio dos concorrentes. O “payoff” R_i representa o problema de otimização de estratégia de oferta em um único nível (2.12), apresentado no Capítulo 2 e repetido abaixo²¹:

$$\text{Max}_{\lambda_i, E_i} R_i = [\pi_d - c_i] g_i \quad (6.2)$$

sujeito a:

$$E_i \leq \bar{g}_i \quad (6.2a)$$

$$\sum_{n=1}^I g_n = d \quad (6.2b)$$

$$g_i - E_i \leq 0 \quad (6.2c)$$

$$g_n \leq E_n^e \quad n \neq i \quad (6.2d)$$

$$\pi_d + \pi_{gi} - \lambda_i \leq 0 \quad (6.2e)$$

$$\pi_d + \pi_{gn} \leq \lambda_n^e \quad n \neq i \quad (6.2f)$$

$$\pi_{gn} \leq 0 \quad \forall n \quad (6.2g)$$

$$\lambda_i g_i + \sum_{n \neq i} \lambda_n^e g_n - \pi_d d - \pi_{gi} E_i - \sum_{n \neq i} \pi_{gn} E_n^e = 0 \quad (6.2h)$$

O problema (6.2) é um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio, mas a nomenclatura “de equilíbrio” é relativa à igualdade primal-dual da restrição (6.2h) e não relativo à representação simultânea dos diversos agentes.

O Equilíbrio de *Nash* é então dado pelo conjunto de ofertas viáveis $\{\lambda_i^e, E_i^e, \forall i\}$ que atende *simultaneamente* à restrição de equilíbrio (6.1) para *todas* as empresas:

$$R_1(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) \geq \text{Max}_{\lambda_1, E_1} R_1(\lambda_1, E_1, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq 1) \quad (6.3)$$

...

$$R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) \geq \text{Max}_{\lambda_i, E_i} R_i(\lambda_i, E_i, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq i) \quad (6.4)$$

...

$$R_I(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) \geq \text{Max}_{\lambda_I, E_I} R_I(\lambda_I, E_I, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq I) \quad (6.5)$$

Em outras palavras, qualquer ponto viável $\{\lambda_i^e, E_i^e, \forall i\}$ que atenda simultaneamente às restrições anteriores será um Equilíbrio de *Nash* uma vez que estará representando um

²⁰ Estes são os *payoffs* do jogo não cooperativo em questão.

conjunto de ofertas que é ótimo para cada empresa dados as ofertas de seus concorrentes.

Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio

Observe que no conjunto de desigualdades (6.3) – (6.5), cada expressão de receita $R_i(\lambda_i, E_i)$ envolve a receita da empresa i e as condições do despacho econômico para o ponto λ_i, E_i em questão. Ou seja, associado a cada $R_i(\lambda_i, E_i)$ existe um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio do tipo (6.2), cujas restrições devem ser satisfeitas pelo ponto (λ_i, E_i) . Assim, o conjunto de desigualdades (6.3) – (6.5) representa a solução simultânea de vários problemas de equilíbrio (MPEC), decorrente justamente da representação explícita da otimização dos diversos agentes. Este tipo de problema é conhecido na literatura como Problema de Equilíbrio com Restrições de Equilíbrio, ou EPEC (*Equilibrium Problem with Equilibrium Constraints*), ver por exemplo [59] e [69].

Desta forma, uma das dificuldades em resolver (6.3) – (6.5) é que ambos os lados das inequações anteriores dependem da solução de problemas de otimização de uma empresa, que são não lineares e não convexos e, por isso, a aplicação de algoritmos convencionais de programação não linear usualmente resultam em ótimos locais.

6.3 Abordagens de soluções usuais

A maneira usual de encontrar equilíbrios de Nash em mercados de eletricidade é através de processos iterativos. Nestes esquemas, cada agente *price maker* se otimiza dada as ofertas dos concorrentes, isto é, cada agente resolve o problema de otimização (6.2) dadas as ofertas de seus rivais (assumidas como conhecidas) e o processo é repetido para cada gerador, que “refaz” sua decisão baseado nas decisões atualizadas dos demais, até ser verificada a situação de equilíbrio (6.3) – (6.5) onde nenhum gerador consegue elevar seus lucros entre duas iterações sucessivas. Como discutido anteriormente na tese, esta abordagem vem sendo amplamente aplicada e envolve dois passos principais: (i) otimizar as receitas das empresas dadas as ofertas de seus rivais (problema (6.2) e (ii) verificar se as condições de equilíbrio (6.3) – (6.5) são satisfeitas. Devido à não convexidade do problema (6.2), este procedimento usualmente resulta em ótimos locais.

²¹ Cada empresa i possui um gerador.

Se considerarmos um conjunto discreto de estratégias de ofertas, é possível enumerar e calcular as receitas de cada empresa obtidas para todas as combinações de ofertas possíveis e em seguida verificar qual combinação de estratégias atende à condição de equilíbrio (6.3) – (6.5). Este procedimento é equivalente a construir uma matriz de payoffs dos agentes conforme as combinações de estratégias consideradas e em seguida verificar a condição de equilíbrio de Nash.

Por exemplo, para 2 geradores e assumindo 3 possíveis estratégias de oferta para cada um, testaríamos 9 combinações de estratégias, calculando as receitas dos geradores $R_i(E_1, E_2)$, $i=1,2$ – lembrando que cada $R_i(E_1, E_2)$ depende da solução de um problema não linear (6.2) para o par de ofertas (E_1, E_2) – para cada combinação de estratégias construindo assim a matriz abaixo (E_{ij} indica a estratégia de oferta²² i do gerador j):

		Estratégias de G2		
		E_{12}	E_{22}	E_{32}
Estratégias de G1	E_{11}	$R_1(E_{11}, E_{12}); R_2(E_{11}, E_{12})$	$R_1(E_{11}, E_{22}); R_2(E_{11}, E_{22})$	$R_1(E_{11}, E_{32}); R_2(E_{11}, E_{32})$
	E_{21}	$R_1(E_{21}, E_{12}); R_2(E_{21}, E_{12})$	$R_1(E_{21}, E_{22}); R_2(E_{21}, E_{22})$	$R_1(E_{21}, E_{32}); R_2(E_{21}, E_{32})$
	E_{31}	$R_1(E_{31}, E_{12}); R_2(E_{31}, E_{12})$	$R_1(E_{31}, E_{22}); R_2(E_{31}, E_{22})$	$R_1(E_{31}, E_{32}); R_2(E_{31}, E_{32})$

Em seguida teríamos que verificar qual combinação de estratégias satisfaz às condições de equilíbrio anteriores. Por exemplo, a combinação de estratégias E_{21}, E_{12} seria equilíbrio de Nash se:

$$\begin{aligned} R_{1e}(E_{21}, E_{12}) &= R_1(E_{11}, E_{12}), \text{ para } i = 1, 2, 3 \\ R_{2e}(E_{21}, E_{12}) &= R_2(E_{21}, E_{j2}), \text{ para } j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Onde $R_{ie}(E_{21}, E_{12})$, $i=1,2$, representa a renda das empresas 1 e 2 quando as mesmas ofertam as ofertas de equilíbrio E_{21} e E_{12} .

A abordagem de solução proposta nesta tese para resolver o problema é baseada no conceito de estratégias discretas deste exemplo e é introduzida a seguir.

²² As estratégias de oferta podem ser ofertas puras de preço (λ_i), ofertas puras de quantidade (E_i) ou ofertas mistas (λ_i e E_i).

6.4 Abordagem de solução proposta

A abordagem de solução proposta nesta tese é formada por três etapas principais:

- i) Escrever explicitamente as restrições de equilíbrio de Nash e buscar pela solução de equilíbrio em um espaço *discreto* de estratégias de ofertas dos agentes. Isto permitirá enumerar os problemas de otimização associados às possibilidades de ofertas (“lado direto” (RHS) de (6.3) – (6.5)) em um conjunto finito de restrições não lineares;
- ii) aplicar o esquema de expansão binária descrito no Capítulo 3 para transformar os termos não lineares nas restrições anteriores em um conjunto de restrições lineares-inteiras; e
- iii) resolver simultaneamente o sistema de inequações linear-inteiro que representa o equilíbrio de Nash (isto é, encontrar um ponto viável) por um método do tipo Branch and Bound. Este procedimento calcula o equilíbrio “de uma só vez” (single-shot), ao invés de utilizar processos iterativos ou construir matrizes de payoff.

Cada uma das etapas (i) – (iii) será descrita e detalhada a seguir.

6.4.1 Enumeração de ofertas

Se a oferta de cada empresa i é dada por um conjunto de valores discretos $\{\lambda_i^m, E_i^m\}$, $m = 1, \dots, M^*$, os problemas de otimização do RHS²³ de (6.3) – (6.5) podem ser resolvidos por enumeração e substituídos por um conjunto *discreto* de restrições:

$$R_1(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) \geq R_1(\lambda_1^m, E_1^m, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq 1) \quad m = 1, \dots, M^* \quad (6.6)$$

...

$$R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) \geq R_i(\lambda_i^m, E_i^m, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq i) \quad m = 1, \dots, M^* \quad (6.7)$$

...

$$R_l(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) \geq R_l(\lambda_l^m, E_l^m, \lambda_n^e, E_n^e, \forall n \neq l) \quad m = 1, \dots, M^* \quad (6.8)$$

onde:

²³ O RHS das condições de equilíbrio de Nash (6.3) – (6.5) representam o “teste” de distintas possibilidades de ofertas na busca pela oferta de equilíbrio. O que estamos propondo é enumerar este conjunto.

m	Indexa as opções de oferta de cada agente (combinações de valores discretos de λ_i e E_i)
M^*	$= M_1 \times M_2$ (numero de discretizações de λ_i e E_i , respectivamente)
λ_i^m, E_i^m	m -ésima combinação de oferta de preço e quantidade da empresa i , $i = 1, \dots, I$.

Como discutido na seção 6.3, observe que quando o conjunto de estratégias é discreto a abordagem usual para encontrar o Equilíbrio de Nash consiste em “testar” todas as possíveis combinações de estratégias e então fazer a verificação de quais combinações satisfazem às condições do Equilíbrio de Nash. Desta forma, o número de possíveis combinações de ofertas de todas as empresas é dado pelo *produto* $M^* \times M^* \times \dots \times M^* = M^{*I}$. No exemplo da seção 6.3 foi observado que para 2 geradores e assumindo 3 possíveis estratégias de oferta para cada um, testaríamos $3 \times 3 = 9$ combinações de estratégias.

Na abordagem proposta nesta tese e introduzida nesta seção, as restrições de equilíbrio são escritas simultaneamente para um conjunto discreto de estratégias. Com isso, o número de restrições em cada conjunto de desigualdade de (6.6) – (6.8) é igual a M^* e o número total de restrições é dado pela *soma* $M^* + M^* + \dots + M^* = I \times M^*$, onde qualquer ponto viável deste conjunto de inequações é por definição um equilíbrio de Nash.

Voltando ao exemplo introduzido na seção 6.3, obtemos um conjunto de $3 \times 2 = 6$ restrições de equilíbrio, onde $R_{ie}(E_{1e}, E_{2e})$, $i=1,2$, representa a renda das empresas 1 e 2 nas ofertas de equilíbrio E_{1e} e E_{2e} :

$$\left. \begin{aligned} R_{1e}(E_{1e}, E_{2e}) &= R_1(E_{11}, E_{2e}) \\ R_{1e}(E_{1e}, E_{2e}) &= R_1(E_{21}, E_{2e}) \\ R_{1e}(E_{1e}, E_{2e}) &= R_1(E_{31}, E_{2e}) \\ R_{2e}(E_{1e}, E_{2e}) &= R_2(E_{1e}, E_{12}) \\ R_{2e}(E_{1e}, E_{2e}) &= R_2(E_{1e}, E_{22}) \\ R_{2e}(E_{1e}, E_{2e}) &= R_2(E_{1e}, E_{32}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Qualquer vetor de estratégias} \\ (E_{1e}, E_{2e}) \text{ que seja viável deste} \\ \text{conjunto, será um equilíbrio de Nash} \end{array}$$

Porém, neste conjunto de inequações cada expressão de renda depende da solução de um problema de otimização não linear (6.2) para cada vetor de ofertas analisado.

Como será visto a seguir, o próximo passo é transformar este conjunto de inequações não lineares em lineares inteiras e com isso obter uma formulação linear-inteira para o cálculo de Equilíbrios de Nash. Esta formulação se beneficia da eficiência dos algoritmos de programação inteira para encontrar sua solução.

6.4.2 Aplicação da expansão binária

Como discutido anteriormente, os problemas de otimização de tanto o lado esquerdo (LHS) como o lado direito (RHS) das inequações (6.6) – (6.8) que formam o Equilíbrio de *Nash* possuem termos não lineares. Nesta etapa, aplicaremos o mesmo esquema de expansão binária introduzido no Capítulo 3 para novamente transformar os produtos de variáveis $\pi_d g_j$, $\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j$ de cada subproblema (6.2) na condição de equilíbrio em restrições lineares-inteiras através da decomposição binária das variáveis de decisão.

Esta etapa é dividida em três passos: (a) aplicar a expansão binária no modelo de maximização de receita de uma empresa individual (já realizado no Capítulo 3); (b) aplicar a expansão binária no LHS de (6.6) – (6.8); e (c) aplicar a expansão binária no RHS de (6.6) – (6.8). Cada passo será descrito a seguir.

6.4.2.1 Passo (a): expansão binária no problema de maximização de renda de uma empresa

O problema de otimização da maximização de renda de uma empresa é dado pela formulação (6.2). Como visto no Capítulo 3, a maior dificuldade para sua solução está nos produtos de variáveis na função objetivo - $\pi_d g_j$ - e na igualdade primal-dual - $(\lambda_j g_j$ e $\pi_{gj} E_j)$, que introduzem não linearidades e não convexidades.

Dessa forma, podemos aplicar o esquema da expansão binária nestes produtos de variáveis e obter a formulação linear inteira (3.15). O problema linear inteiro resultante é reescrito abaixo²⁴:

$$\text{Max}_{\lambda_i, E_i} R_i = (\lambda_i g_i + \Delta_{\lambda_i} \sum_{k=0}^{K1} 2^k z_{ki}) - (\pi_{gi} E_i + \Delta_{E_i} \sum_{k=0}^{K2} 2^k w_{ki}) - c_i g_i \quad (6.9)$$

Sujeito a

$$\sum_{n=1}^I g_n = d \quad (6.9a)$$

$$g_i - E_i - \Delta_{E_i} \sum_{k=0}^{K2} 2^k y_{ki} \leq 0 \quad (6.9b)$$

$$g_n \leq E_n \quad n \neq i \quad (6.9c)$$

$$\pi_d + \pi_{gi} - \lambda_i - \Delta_{\lambda_i} \sum_{k=0}^{K1} 2^k x_{ki} \leq 0 \quad (6.9d)$$

²⁴ Nas formulações que se seguem, as ofertas dos geradores $n \neq i$ correspondem às suas ofertas de equilíbrio (λ_i^e, E_i^e) ou às ofertas dos reais custos de operação caso os agentes sejam *price takers*.

$$\pi_d + \pi_{gn} \leq \lambda_n \quad n \neq i \quad (6.9e)$$

$$\pi_{gn} \leq 0 \quad \forall n \quad (6.9f)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i g_i + \Delta \lambda \sum_{k=0}^{K1} 2^k z_{ki} + \sum_{n \neq i} \lambda_n g_n - \pi_d d - \pi_{gi} E_i \\ & + \Delta E_i \sum_{k=0}^{K2} 2^k w_{ki} - \sum_{n \neq i} \pi_{gn} E_n = 0 \end{aligned} \quad (6.9g)$$

$$0 \leq g_i - z_{ki} \leq G(1-x_{ki}) \quad k = 0, \dots, K_1 \quad (6.9h)$$

$$z_{ki} \leq G x_{ki} \quad k = 0, \dots, K_1 \quad (6.9i)$$

$$0 \leq w_{ki} - \pi_{gi} \leq \Pi_g(1-y_{ki}) \quad k = 0, \dots, K_2 \quad (6.9j)$$

$$0 \leq -w_{ki} \leq \Pi_g y_{ki} \quad k = 0, \dots, K_2 \quad (6.9k)$$

$$x_{ki} \in \{0, 1\} \quad k = 0, \dots, K_1 \quad (6.9l)$$

$$y_{ki} \in \{0, 1\} \quad k = 0, \dots, K_2 \quad (6.9m)$$

6.4.2.2 Passo (b): expansão binária no LHS

A aplicação da expansão binária no LHS ocorre de duas formas: inicialmente reescreveremos as rendas das empresas i como expressões lineares-inteiras. Em seguida incorporaremos o conjunto de restrições para satisfazer o despacho econômico.

No LHS, λ_i^e e E_i^e são *variáveis de decisão*. A expressão da renda líquida da empresa i na posição de equilíbrio, representada pelo LHS de (6.6)-(6.8) é dada pela seguinte expressão não linear:

$$R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) = (\pi_d^e - c_i)g_i^e \quad (6.10)$$

onde

π_d^e preço *spot* no despacho econômico quando todas as empresas oferecem as ofertas de equilíbrio

g_i^e geração da empresa i no despacho econômico no equilíbrio

Assim como feito na seção 3.2.1 do Capítulo 3, podemos aplicar o teorema das folgas complementares e reescrever o produto $\pi_d^e g_i^e$ em (6.10) função dos outros dois produtos não lineares:

$$R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) = \lambda_i^e g_i^e - \pi_{gi} E_i - c_i g_i^e \quad (6.11)$$

Agora podemos aplicar o esquema da expansão binária aos produtos de variáveis $\lambda_i^e g_i^e$ e $\pi_{gi} E_i$ em (6.11). A expressão resultante da renda de cada empresa i é similar à expressão final da função objetivo de (6.9). Repetindo o processo para cada LHS de (6.6)-(6.8), podemos reescrever a *renda de cada empresa na posição de equilíbrio* como:

$$R_1(\lambda_1^e, E_1^e, \forall i) = (\underline{\lambda}_1 g_1^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{k1}^e) - (\pi_{g1} E_1 + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{k1}^e) - c_1 g_1^e \quad (6.12)$$

...

$$R_i(\lambda_i^e, E_i^e, \forall i) = (\underline{\lambda}_i g_i^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{ki}^e) - (\pi_{gi} E_i + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{ki}^e) - c_i g_i^e \quad (6.13)$$

...

$$R_I(\lambda_I^e, E_I^e, \forall i) = (\underline{\lambda}_I g_I^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kI}^e) - (\pi_{gI} E_I + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kI}^e) - c_I g_I^e \quad (6.14)$$

Finalmente, precisamos adicionar às expressões de rendas (6.12)-(6.14) anteriores o conjunto de restrições (6.9a)-(6.9m), que representa a solução do despacho econômico (condições primal-dual) mais as relações da expansão binária. Observe que este conjunto é *único* e similar para todas as restrições (6.12)-(6.14), uma vez que a oferta de equilíbrio é única no LHS e portanto ela deve satisfazer a um mesmo despacho econômico. Este conjunto é dado pelas restrições abaixo:

$$\sum_{i=1}^I g_i^e = d \quad (6.15a)$$

$$g_i^e - E_i - \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{ki}^e \leq 0 \quad \forall i \quad (6.15b)$$

$$\pi_d^e + \pi_{gi}^e - \underline{\lambda}_i - \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{ki}^e \leq 0 \quad \forall i \quad (6.15c)$$

$$\pi_{gi}^e \leq 0 \quad \forall i \quad (6.15d)$$

$$\sum_{i=1}^I (\underline{\lambda}_i g_i^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{ki}^e) - \pi_d^e d - \sum_{i=1}^I (\pi_{gi}^e E_i + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{ki}^e) = 0 \quad (6.15e)$$

$$0 \leq g_i^e - z_{ki}^e \leq G(1 - x_{ki}^e) \quad \forall i; k = 0, \dots, K_1 \quad (6.15f)$$

$$z_{ki}^e \leq G x_{ki}^e \quad \forall i; k = 0, \dots, K_1 \quad (6.15g)$$

$$0 \leq \pi_{gi}^e - w_{ki}^e \leq \Pi_g(1 - y_{ki}^e) \quad \forall i; k = 0, \dots, K_2 \quad (6.15h)$$

$$0 \leq -w_{ki}^e \leq \Pi_g y_{ki}^e \quad \forall i; k=0, \dots, K_2 \quad (6.15i)$$

$$x_{ki}^e \in \{0,1\} \quad \forall i; k=0, \dots, K_1 \quad (6.15j)$$

$$y_{ki}^e \in \{0,1\} \quad \forall i; k=0, \dots, K_2 \quad (6.15k)$$

6.4.2.3 Passo (c): Expansão binária no RHS

Neste último passo, modelaremos o RHS de (6.6)-(6.8), que é um conjunto discreto de problemas de otimização de maximização de receitas onde as ofertas discretas (λ_i^m, E_i^m) são conhecidas.

Da mesma forma que realizado para o LHS, vamos inicialmente reescrever a expressão de receita de cada empresa i em cada discretização de oferta m . Aplicando o mesmo procedimento (6.11) anterior para $R_i(\lambda_i^m, E_i^m, \lambda_n^e, E_n^e, n \neq i)$, podemos reescrever os produtos $\pi_d^{mi} g_i^{mi}$ em função dos demais produtos na m -ésima combinação de ofertas:

$$R_i(\lambda_i^m, E_i^m, \lambda_n^e, E_n^e, n \neq i) = (\pi_d^{mi} - c_i) g_i^{mi} \quad (6.16)$$

$$= \lambda_i^m g_i^{mi} - \pi_{gi}^{mi} E_i^m - c_i g_i^{mi} \quad (6.17)$$

onde:

π_d^{mi} Preço *spot* no despacho econômico (variável de decisão) quando a empresa i oferece sua m -ésima discretização $\{\lambda_i^m; E_i^m\}$ e as demais empresas permanecem oferecendo suas ofertas de equilíbrio $\{\lambda_n^e; E_n^e, n \neq i\}$.

g_i^{mi} Geração da empresa i no despacho econômico referente a esta m -ésima opção de ofertas (variável de decisão).

Aplicando (6.17) para cada expressão de receita no RHS de (6.6)-(6.8), temos:

$$R_1(\lambda_1^m, E_1^m, \lambda_n^e, E_n^e, n \neq 1) = \lambda_1^m g_1^{m1} - \pi_{g1}^{m1} E_1^m - c_1 g_1^{m1} \quad \forall m \quad (6.18)$$

...

$$R_i(\lambda_i^m, E_i^m, \lambda_n^e, E_n^e, n \neq i) = \lambda_i^m g_i^{mi} - \pi_{gi}^{mi} E_i^m - c_i g_i^{mi} \quad \forall m \quad (6.19)$$

...

$$R_I(\lambda_I^m, E_I^m, \lambda_n^e, E_n^e, n \neq I) = \lambda_I^m g_I^{mI} - \pi_{gI}^{mI} E_I^m - c_I g_I^{mI} \quad \forall m \quad (6.20)$$

Observe que, em contraste com a situação do LHS, a expansão binária não precisa ser utilizada nestas expressões de renda. A razão é que no RHS as discretizações de oferta de cada empresa são *enumeradas*, o que significa que λ_i^m e E_i^m são valores *conhecidos*, enquanto que no caso do LHS, λ_i^e e E_i^e são *variáveis de decisão*, o que portanto cria os produtos de variáveis e as não linearidades.

Entretanto, isto não significa que a expansão binária não é utilizada no RHS, pois mais uma vez é necessário adicionar o conjunto de restrições representando as restrições que representam o despacho econômico e neste caso a expansão binária é explicitamente utilizada (na restrição primal-dual do problema do despacho econômico).

Observe que no caso do LHS existe apenas *um único* despacho econômico para as ofertas de *equilíbrio* $\{\lambda_n^e, E_n^e, \forall n\}$. Portanto, existe apenas *um* conjunto de restrições primal-dual. Já no caso do RHS, entretanto, existe um conjunto *separado* de despacho econômico para *cada* possível *combinação* de oferta $\{m, i\}$, onde o agente i oferece sua m -ésima opção de oferta $\{\lambda_i^m, E_i^m\}$ e os demais agentes oferecem suas ofertas de equilíbrio $\{\lambda_n^e, E_n^e, n \neq i\}$. Isto significa que existem $I \times M^*$ conjuntos de restrições diferentes.

Cada conjunto é dado pelas restrições abaixo:

$$g_i^{mi} + \sum_{n \neq i} g_n^{mi} = d \quad (6.21b)$$

$$g_i^{mi} \leq E_i^m \quad (6.21c)$$

$$g_n^{mi} - E_n - \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kn}^e \leq 0 \quad n \neq i \quad (6.21d)$$

$$\pi_d^{mi} + \pi_{gi}^{mi} \leq \lambda_i^m \quad (6.21e)$$

$$\pi_d^{mi} + \pi_{gn}^{mi} - \lambda_n - \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kn}^e \leq 0 \quad n \neq i \quad (6.21f)$$

$$\pi_{gn}^{mi} \leq 0 \quad \forall n \quad (6.21g)$$

$$\lambda_i^m g_i^{mi} + \sum_{n \neq i} (\lambda_n g_n^{mi} + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kn}) - \pi_d^{mi} d - \pi_{gi}^{mi} E_i^m - \sum_{n \neq i} (\pi_{gn}^{mi} E_n + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kn}^{mi}) = 0 \quad (6.21h)$$

$$0 \leq g_n^{mi} - z_{kn}^{mi} \leq G(1-x_{kn}^e) \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_1 \quad (6.21i)$$

$$z_{kn}^{mi} \leq Gx_{kn}^e \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_1 \quad (6.21j)$$

$$0 \leq \pi_{gn}^{mi} - w_{kn}^{mi} \leq \Pi_g(1-y_{kn}^e) \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_1 \quad (6.21k)$$

$$0 \leq -w_{kn}^{mi} \leq \Pi_g y_{kn}^e \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_2 \quad (6.21l)$$

Observe que as variáveis correspondente às ofertas de equilíbrio $\{\lambda_n^e, E_n^e, x_{kn}^e$ e y_{kn}^e , para $n \neq i\}$ em cada Problema (6.21) são as mesmas que as do LHS do conjunto de restrições (6.6)-(6.8). Consequentemente, não é necessário repetir algumas restrições, tais como (6.15j) and (6.15k).

A formulação final do RHS das condições de Equilíbrio de *Nash* é formada por um conjunto de restrições para cada discretização de ofertas m : as expressões de rendas são dadas por (6.18)-(6.20) e o conjunto de restrições (6.21) representa o despacho econômico.

6.4.3 Formulação linear-inteira final do Equilíbrio de *Nash*

A formulação linear-inteira final do Equilíbrio de *Nash* é obtida substituindo as expressões de renda (6.12) – (6.14) e (6.18) – (6.20) no LHS e RHS do conjunto de restrições (6.6) - (6.8) – que definem o Equilíbrio de Nash - e adicionando os conjuntos de restrições do despacho econômico (6.15) e (6.21) respectivamente. Em outras palavras, obtemos o seguinte conjunto de desigualdades linear-inteiras:

Desigualdade (6.13) $\geq$ (6.19) $\forall i, m$	<i>impõe que a renda na oferta de equilíbrio (6.13) é a melhor opção para a empresa i dentre suas opções de ofertas testadas (6.19)</i>
Restrições (6.15)	<i>representa o despacho econômico na posição de equilíbrio, que garante a renda da expressão (6.13)</i>
Restrições (6.21)	$\forall i, m$ <i>representa o despacho econômico p/ cada discretização de oferta m que garante cada renda testada em (6.19)</i>

O problema resultante final é um conjunto de desigualdades linear-inteiras onde *qualquer* ponto viável λ_i^e, E_i^e é por definição a oferta do Equilíbrio de Nash²⁵ e o problema é resolvido de *uma só vez* (single-shot), sem a necessidade de processos iterativos ou outros mecanismos. Observe que, como este é um modelo de programação inteira mista, podemos utilizar um algoritmo de programação inteira (do tipo branch and bound) para obter este ponto viável. Assim, o número de operações realizadas para encontrar a solução do problema se beneficia das eficiências destes algoritmos, que são bastante conhecidas, ao invés de ter que enumerar explicitamente todas as combinações de estratégias entre as empresas. Solução do problema linear-inteiro do Equilíbrio de Nash.

Uma possível abordagem para encontrar este ponto viável é associar uma função objetivo “arbitrária” ao conjunto de restrições anterior e resolver o problema resultante. Nesta tese esta abordagem foi escolhida e adotou-se como função objetivo a maximização do preço *spot* no equilíbrio²⁶. Esta função foi escolhida, pois, no caso de haver múltiplos Equilíbrio de Nash (discutido a seguir), a solução que leva ao preço *spot* mais elevado é *geralmente* de maior interesse para reguladores (pois é o “pior” caso para os consumidores) e mesmo para empresas ofertantes (que tendem a preferir soluções com preços finais mais elevados) [12].

Portanto, a formulação final do problema de cálculo de equilíbrio de Nash é dada por:

$$\text{Max } \pi_d^e \quad (6.22)$$

sujeito a:

$$\text{Desigualdades (6.13)} \geq (6.19) \quad \forall i, m$$

$$\text{Restrições (6.15)}$$

$$\text{Restrições (6.21)} \quad \forall i, m$$

Assim, ao aplicar o problema (6.22) ao exemplo introduzido na seção (6.3), estaríamos representando 2 (agentes) x 3 (discretizações de ofertas) = 6 desigualdades do tipo (6.13) $\geq$ (6.19) – expressões de renda no equilíbrio –, além de um conjunto de

²⁵ Na solução do conjunto de desigualdades as principais variáveis de decisão são as ofertas de equilíbrio $\lambda_i^e, E_i^e, \forall i$ - observe que as ofertas das empresas λ_i^m, E_i^m são enumeradas e portanto pré-conhecidas.

²⁶ Observe que outras funções objetivo poderiam ter sido utilizadas, como a maximização da soma das receitas dos jogadores ou mesmo a maximização da receita de um jogador em específico (que compararia o resultado com aquele da otimização do valor esperado na formulação probabilística do Capítulo 5).

restrições (6.15) – despacho econômico no equilíbrio – e $3 \times 2 = 6$ conjuntos de restrições (6.21) – representando o despacho econômico para cada possível combinação de oferta (conhecida) $m = 1, 2, 3$ de cada agente $i = 1, 2$.

Este problema de programação linear-inteira pode ser resolvido por algoritmos disponíveis em pacotes comerciais como o C-Plex, Xpress, etc.

6.5 Multiplicidade de equilíbrios

Um tópico bastante importante em modelos de Equilíbrio de *Nash* diz respeito à multiplicidade de equilíbrios. Isto significa que o Equilíbrio de *Nash* não necessariamente é único e, além disso, distintos equilíbrios podem estar associados ao mesmo resultado. A multiplicidade de equilíbrios vêm sendo observada e discutida em diversos modelos de teoria dos jogos [17][63][12] e inclusive alguns procedimentos foram recentemente propostos (por exemplo [12] e [97]) para identificar e enumerar múltiplos equilíbrios. Estas abordagens baseiam-se essencialmente em identificar múltiplos equilíbrios em modelos iterativos para calcular equilíbrios de Nash: todas as vezes que há uma “ciclagem” do modelo, a multiplicidade de equilíbrio é identificada. O trabalho em andamento apresentado recentemente em [52] propôs um sistema de enumeração de ofertas (baseado nas mesmas idéias desta tese) para encontrar todos os possíveis equilíbrios e selecionar o equilíbrio “mais provável” através de um critério definido pelos autores (razão entre receitas obtidas em distintos equilíbrios).

O modelo apresentado nesta tese também permite a *existência* de múltiplos equilíbrios, o que ocorre quando o conjunto de restrições (6.6) – (6.8) possui mais de uma solução viável. É justamente por este motivo que a maximização do preço *spot* é utilizada como função objetivo na solução deste sistema de inequações: todas as vezes que houver múltiplos equilíbrios, uma solução que conduza ao maior preço *spot* será escolhida.

O modelo apresentado também permite *identificar* múltiplos equilíbrios utilizando como função objetivo a maximização do preço *spot* e resolvendo novas instâncias do problema incorporando sucessivamente limites superiores para o preço *spot* de acordo com a solução dos problemas já resolvidos. Por exemplo, para encontrar o primeiro Equilíbrio de *Nash*, utiliza-se a maximização do preço *spot* como função objetivo e o conjunto de restrições (6.6) – (6.8). Suponha que π_d^{el} seja o preço de equilíbrio

resultante deste problema. Podemos identificar a existência de novos equilíbrios resolvendo o mesmo problema, mas com uma restrição adicional $\pi_d^e \leq \pi_d^{el} - \varepsilon$, para algum ε , onde π_d^e é o preço *spot* de equilíbrio deste novo problema. Este procedimento pode ser repetido sucessivamente até o problema tornar-se inviável.

Por outro lado, podemos ter o caso onde múltiplas estratégias de oferta estão associadas ao *mesmo* preço *spot*. Neste caso, o modelo proposto não é capaz de enumerar todos estes equilíbrios, a menos da inserção de restrições adicionais²⁷.

6.6 Existência de equilíbrios

Um vetor de estratégias λ_e, E_e é um Equilíbrio de *Nash* se e somente se ele satisfaz ao conjunto de restrições (6.6) – (6.8). Desta forma, é possível que este conjunto não tenha solução viável e consequentemente, nenhum Equilíbrio de *Nash*. Um aspecto igualmente importante é que a discretização do espaço de estratégias de ofertas pode afetar a existência do Equilíbrio de *Nash* (ou mesmo eliminar potenciais equilíbrios). Entretanto, observe que elevadas discretizações ainda não evitam a inexistência de equilíbrios de Nash em estratégias puras (o fundamental trabalho de John Nash de 1950 [41][72][73] garante a existência de equilíbrios em estratégias *mistas* e se há um número finito de estratégias puras no conjunto de estratégias de cada jogador) e influencia diretamente na eficiência computacional.

6.7 Representação de extensões

Todas as extensões e particularidades apresentadas no Capítulo 4 para o modelo de ofertas sob incerteza também podem ser aplicadas ao modelo de equilíbrios de *Nash* deste Capítulo.

A particularidade mais utilizada na literatura é a representação de modelos de ofertas “puras” de preço/quantidade, que num enfoque de teoria dos jogos recebem respectivamente a denominação de modelos de Bertrand e Cournot. Outra extensão importante consiste na representação de empresas com um “portfolio” de usinas com

²⁷ Uma alternativa seria continuar inserindo restrições adicionais no problema visando capturar uma solução distinta associada ao mesmo preço *spot*.

diferentes custos de operação, incluindo custos de partida. Ambos os casos serão discutidos a seguir.

6.7.1 Representação de Modelos de Bertrand e Cournot

Duas simplificações importantes do modelo de oferta conjunta preço e quantidade são os conhecidos modelos de equilíbrio de Bertrand e Cournot, amplamente utilizados na literatura. Estes modelos podem ser representados como casos especiais do modelo de oferta conjunta de preços/quantidade descrito anteriormente:

- No modelo de Cournot, os preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são fixos em valores pré-determinados (usualmente zero) e apenas as quantidades ofertadas $\{E_j, j \in A\}$ são otimizadas. Observe que no modelo de Cournot é necessário definir explicitamente um conjunto de agentes *price takers* que ofertam seus reais custos de operação, de forma que seja possível criar uma função inversa da demanda residual do sistema e assim formar o preço do mercado;
- No modelo de Bertrand, as quantidades ofertadas $\{E_j, j \in A\}$ são fixas em valores pré-determinados (usualmente iguais às capacidades máximas $\{\bar{g}_j\}$) e apenas os preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são otimizados.

6.7.2 Representação de múltiplas usinas e custos operativos não convexos

Nas seções anteriores o custo operativo da empresa i foi modelado como uma função linear da energia produzida $c_i g_i$, onde c_i é o custo operativo unitário (\$/MWh) e g_i é a produção de energia alocada à empresa i no despacho econômico. O Anexo E mostra como estender o modelo de cálculo de Equilíbrio de Nash apresentado quando a empresa i controla um *conjunto* de geradores, com *diferentes* custos operativos, incluindo custos de partida²⁸, e que fornecem o “suporte físico” para suas ofertas de preço-quantidade.

²⁸ Ressalta-se que o problema completo de unit commitment é mais complexo do que a representação de *custos de partida* proposta nesta tese. Entretanto, o objetivo deste presente trabalho é ilustrar a possibilidade de representar custos operativos não convexos.

6.8 Representação explícita de agentes *price takers* na abordagem proposta

O desenvolvimento analítico desenvolvido neste Capítulo para cálculos de Equilíbrios de Nash não depende da pré-definição explícita de agentes *price takers*, isto é, de agentes que ofertam o seu real custo variável de operação. Isto é possível pois no modelo desenvolvido todos os agentes ofertam preços e quantidades. Por outro lado, caso seja utilizados um modelo de Cournot, a definição de um conjunto de agentes *price takers* é essencial e, na notação introduzida, estes agentes fazem parte do conjunto $n \neq i$.

6.9 Estudo de caso

A aplicação prática do modelo linear-inteiro para cálculo de equilíbrios de Nash em mercados de eletricidade proposto será ilustrada a partir de um estudo de caso com dados do Sistema Elétrico Brasileiro.

6.9.1 Parâmetros do estudo

Como descrito no Capítulo anterior, o Sistema Elétrico Brasileiro possui 11 empresas de geração principais em um sistema com 138 geradores. Neste estudo de caso, representaremos três empresas como agentes *price makers*, isto é, agentes estratégicos que podem afetar o preço *spot* com suas ofertas. As empresas escolhidas foram Furnas (8200 MW), Cesp (6900 MW) e Duke Paranapanema (2200 MW). O objetivo de cada empresa estratégica é maximizar a receita total do seu portfólio de geradores. Todas as demais empresas do sistema e seus geradores serão modelados como “price takers”, isto é, que sempre ofertarão suas capacidades disponíveis e custos variáveis de operação.

A Tabela 6-1 apresenta a capacidade, o tipo de usina e custo operativo de cada usina das empresas estratégicas. Assim como feito no estudo de caso do Capítulo 5, o custo operativo variável das hidroelétricas foi estimado como o seu “valor da água”, determinado a partir de um modelo de despacho hidrotérmico estocástico.

Tabela 6-1 Geradores de Furnas, Cesp e Duke

Nome da usina	Capacidade (MW)	Tipo (H/T)	Custo operativo (R\$/MWh)	Custo de partida (R\$)	Empresa
Corumba I	331	Hidro	23	0	Furnas
Itumbiara	1955	Hidro	40	0	Furnas
R.Silveira	28	Térmica	89	0	Furnas

Nome da usina	Capacidade (MW)	Tipo (H/T)	Custo operativo (R\$/MWh)	Custo de partida (R\$)	Empresa
Santa Cruz 12	130	Térmica	95	0	Furnas
Santa Cruz 34	378	Térmica	95	0	Furnas
Estreito	1022	Hidro	139	0	Furnas
Marimbondo	1347	Hidro	146	0	Furnas
Mascarenhas	124	Hidro	172	0	Furnas
Serra Mesa	924	Hidro	180	0	Furnas
P.Colombia	363	Hidro	236	0	Furnas
Furnas	1205	Hidro	238	0	Furnas
Funil	171	Hidro	339	0	Furnas
Manso	200	Hidro	352	0	Furnas
Total	8178				Furnas
Paraibuna	76	Hidro	23	0	Cesp
Jaguari	30	Hidro	163	0	Cesp
P.Primavera	1149	Hidro	177	0	Cesp
Jupia	1480	Hidro	224	7400	Cesp
I.Solteira	4186	Hidro	279	20900	Cesp
Total	6921				Cesp
Canoas I	78	Hidro	282	0	Duke
Canoas II	66	Hidro	245	0	Duke
Capivara	598	Hidro	361	0	Duke
Chavantes	369	Hidro	93	0	Duke
Rosana	436	Hidro	109	0	Duke
Salto Grande	94	Hidro	278	0	Duke
Taquarucu	567	Hidro	151	0	Duke
Total	2208				Duke

A Figura 6-1 mostra as funções que relacionam os custos de operação em função da energia total produzida por cada empresa. Estas funções foram utilizadas para garantir um despacho de geração “interno” de mínimo custo para cada empresa (conforme o modelo do Anexo E) quando estas empresas determinam suas estratégias de oferta.

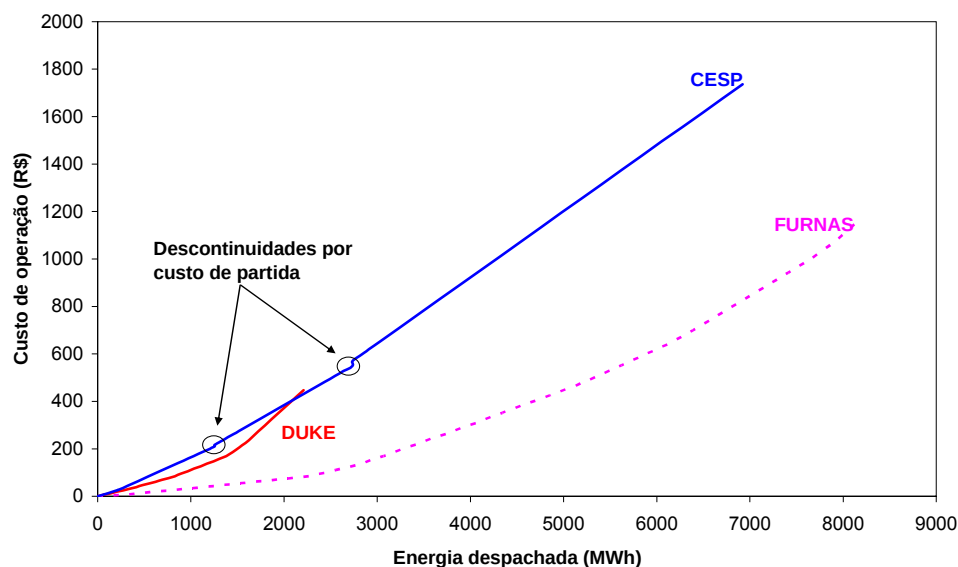


Figura 6-1 - Função custo de operação x energia despachada de cada empresa

O “caso base” considera que a CESP possui decisões custos de partida, conforme modelados no Anexo E, para duas de suas usinas: Jupia e I. Solteira. Por esta razão, a função de custo de operação da Cesp possui duas descontinuidades (devido aos custos fixos de partida), que são destacadas na Figura 6-1. Nenhuma decisão de “partida” é considerada para os demais agentes. Finalmente, no “caso base” a demanda é igual a 51 GWh, o que corresponde aproximadamente à demanda de “ponta” típica do sistema Brasileiro. A etapa é de uma hora

6.9.2 Modelo de oferta considerado: modelo de Cournot-Nash

Neste estudo de caso foi utilizado o modelo de Cournot, isto é, os agentes estratégicos fazem ofertas de quantidade a preço zero e, portanto, apenas as quantidades ofertadas são as variáveis de decisão destas empresas²⁹. Entretanto, observe que a Cesp possui decisões de custo de partida em duas de suas usinas, o que faz este modelo de Cournot ficar mais interessante.

Os demais agentes não estratégicos (*price takers*) oferecem suas capacidades disponíveis e custos reais de operação (valor da água, no caso de usinas hidroelétricas, que foram estimados seguindo o mesmo procedimento descrito no Capítulo anterior).

²⁹ O modelo de otimização bi-variado da seção 6.2 passa a ser um modelo uni-variado.

6.9.3 Modelo de despacho por custos

Assim como feito no Capítulo 5, foi também implementado um modelo cujas ofertas dos geradores das três empresas estratégicas são os próprios custos operativos, isto é, onde não há incentivos para alterar a oferta realizada.

O objetivo do estudo de caso então é analisar o “desvio” da solução de equilíbrio em relação à solução de mínimo custo global, que é uma análise tipicamente realizada por reguladores.

6.9.4 Limites superior e inferior para as ofertas de quantidade

O intervalo de ofertas $[\underline{E}, \bar{E}]$ para cada empresa *price maker* foi definido como se segue:

- Para o limite superior $\bar{E}$, foi utilizada a hipótese de que nenhum agente ofereceria mais energia que aquela oferecida no despacho de mínimo custo, onde todos os participantes, incluindo os *price makers*, utilizam seus custos de operação reais. A razão para isto é que, no modelo clássico de Cournot, a renda unitária é maximizada criando-se escassez de oferta, isto é, reduzindo a quantidade de energia oferecida.
- Para o limite inferior $\underline{E}$, uma simulação como modelo de maximização de renda apresentado no Capítulo 3 foi realizada assumindo que Furnas, Cesp e Duke estivessem agindo cooperativamente em uma “coalizão”³⁰. Neste caso, a renda líquida de cada empresa é maior - e a quantidade de energia oferecida é menor – do que poderia ser obtido no Equilíbrio de *Nash*.

A Tabela 6-2 apresenta os limites superior e inferior resultantes.

³⁰ Observe que nesta aplicação não estamos interessados na “estabilidade” da coalizão e sim em obter simplesmente um limite inferior para as ofertas.

Tabela 6-2 – Limites superior e inferior para as ofertas de quantidade

Resultado	Furnas	Cesp	Duke
Limite Inferior (MWh)	6239	2665	1372
Limite Superior (MWh)	7807	2735	1438

6.9.5 Discretização das ofertas de quantidades

Cada intervalo de oferta $[\underline{E}, \bar{E}]$ foi dividido em 32 valores (31 intervalos). Isto significa que o modelo de Equilíbrio de *Nash* (6.6)-(6.8) possui $3 \times (\text{piso}(\log_2(31)) + 1) = 15$ variáveis binárias adicionalmente às duas variáveis binárias que representam as decisões de partida das usinas Jupia e I.Solteira da Cesp, o que resulta em um total de 17 variáveis binárias para o problema. Adicionalmente às variáveis binárias, o problema de equilíbrio possui 19917 variáveis contínuas e 14281 restrições.

6.9.6 Resultados

6.9.6.1 Equilíbrio de Cournot-Nash resultante

O modelo de cálculo de equilíbrio de Nash (6.22) foi resolvido com a função objetivo de maximizar o preço *spot* no equilíbrio. Como mencionado na seção 6.7, isto é feito para encontrar uma solução associada ao maior preço de equilíbrio na ocorrência de multiplicidade de equilíbrios, o que de fato foi observado neste estudo de caso.

Para a resolução do modelo linear-inteiro, o método de Branch and Bound foi utilizado através do solver Xpress. O tempo de CPU foi de 620 segundos, utilizando um Pentium IV-HT 2.8 GHz, 1 Mb de memória cache (Prescott) e 1 Gb de memória RAM.

A Tabela 6-3 compara os resultados no Equilíbrio de *Nash*³¹ – preço *spot*, geração total de Furnas, Cesp e Duke e suas respectivas rendas líquidas – com aqueles que seriam obtidos em uma simulação de mínimo custo, onde todos os agentes (incluindo os estratégicos) oferecem seus reais custos de operação e capacidades disponíveis. Uma vez que uma questão natural seria se o equilíbrio se alteraria caso a Cesp não tivesse

³¹ O modelo de cálculo de equilíbrio de Nash encontrou mais de um equilíbrio. Por facilidade de apresentação, apenas o equilíbrio associado ao maior preço spot, que é o de mais interesse aos reguladores, é mostrado.

decisões de “partida” em suas usinas, a Tabela 6-3 apresenta também o Equilíbrio de *Nash* resultante quando a Cesp não possui decisões de custos de partida.

Tabela 6-3 – Equilíbrio de *Nash* vs solução de mínimo custo (caso base)

Resultado	Eq. Nash com decisões de start-up	Solução de mínimo custo	Eq. Nash sem decisões de start-up
Preço <i>spot</i> (R\$/MWh)	306	249	306
Geração Furnas (MWh)	6290	7807	6290
Geração Cesp (MWh)	2700	2735	2720
Geração Duke (MWh)	1430	1438	1410
Renda Furnas (kR\$)	1250	910	1250
Renda Cesp (kR\$)	292.5	140	294.5
Renda Duke (kR\$)	256	175	254.5

Observamos que a solução de equilíbrio (primeira coluna da Tabela 6-3) resulta em preços *spot* mais elevados que a solução de mínimo custo, ilustrando que Furnas, Cesp e Duke possuem poder de mercado. Isto foi obtido através da redução forçada da quantidade de energia ofertada por estas empresas. Como esperado, o decréscimo na energia produzida foi compensado por um aumento no preço *spot*, resultando em um maior lucro unitário para os agentes estratégicos.

A solução de equilíbrio sem custos por decisões de partida (terceira coluna da Tabela 6-3) é similar à solução com custos por decisões de partida. Por exemplo, Furnas adota a mesma solução de equilíbrio anterior. Entretanto, existe um interessante comportamento “oposto” relacionando as empresas Cesp e Duke. É bastante intuitivo que, no equilíbrio, a Cesp ofereceria menos energia no caso onde ela possui custo de “partida” do que no caso onde este é ignorado. Este é o comportamento detectado pelo modelo, mas a empresa Duke elevou sua quantidade ofertada no *mesmo montante* reduzido pela Cesp (em comparação com o caso sem custo de partida), e, desta forma, a quantidade *total* oferecida pelos agentes estratégicos foi mantida igual. Assim, o preço *spot* permaneceu o mesmo em ambos os casos.

6.9.6.2 Sensibilidade ao nível de demanda

Buscando verificar o efeito de uma eventual maior competição entre os agentes para níveis de demanda inferiores, nesta seção o modelo de cálculo de Equilíbrio de Nash foi re-simulado para cenários de demanda diferentes³².

Estes cenários foram escolhidos para ter valores entre um cenário “inferior”, onde a demanda foi definida em 25 GWh, e um cenário (incomum) bastante elevado, onde a demanda foi igual a 55 GWh.

Os demais parâmetros da simulação foram mantidos iguais aos anteriores, isto é, a Cesp considera custos por decisões de partida. Da mesma forma, simulações de mínimo custo e o modelo de maximização de renda do Capítulo 4 (assumindo conluio) foram aplicados para fornecer “limites” nos intervalos de oferta dos agentes estratégicos.

A Tabela 6-4 compara os preços *spot* resultantes no Equilíbrio de *Nash* e na solução de mínimo custo para diferentes valores de demanda. O tempo computacional para calcular o Equilíbrio de *Nash* em cada caso é também apresentado (o mesmo computador foi utilizado).

Tabela 6-4 – Preços Spot (R\$/MWh): Equilíbrio de Nash x Mínimo custo

Cenário de Demanda	Mínimo custo	Equilíbrio de Nash	Tempo de execução (eq. Nash)
	Preço Spot (R\$/MWh)	Preço Spot (R\$/MWh)	(s)
25 GWh	121	121	305
30 GWh	146	195	210
35 GWh	195	229	96
51 GWh (caso base)	249	306	620
55 GWh	279	346	190

Como esperado, o exercício de poder de mercado é reduzido conforme a demanda diminui e o preço de equilíbrio se aproxima da solução de mínimo custo, indicando que menores níveis de demanda resultam em maiores níveis de competição entre os agentes estratégicos. O tempo computacional para as simulações foi bastante reduzido, variando de 2 a 10 minutos e mostrou-se bastante dependente da instância do problema.

³² Não foi representada nesta tese a elasticidade consumo-preço da demanda, como realizado em [36].

A Tabela 6-5 compara a energia produzida pelos agentes estratégicos no Equilíbrio de Nash e solução de mínimo custo para duas situações diferentes: o “caso base”, representando a demanda de ponta, e o caso de “demanda baixa”. Como esperado, a produção de energia no caso base é inferior na solução de equilíbrio, devido ao resultado da estratégia de restrição de oferta para elevar os preços *spot*.

Tabela 6-5 – Geração dos agentes estratégicos: Equilíbrio de Nash vs Mínimo Custo para diferentes níveis de demanda

Geração de Furnas (MWh)	Caso Base	Demanda Baixa
Equilíbrio de Nash	6290	2822
Solução de mínimo custo	7807	2822
Geração da Cesp (MWh)	Caso Base	Demanda Baixa
Equilíbrio de Nash	2700	76
Solução de mínimo custo	2735	76
Geração da Duke (MWh)	Caso Base	Demanda Baixa
Equilíbrio de Nash	1430	805
Solução de mínimo custo	1438	805

Finalmente, a Tabela 6-6 resume os lucros das três empresas estratégicas para as mesmas situações anteriores. Mais uma vez, as rendas líquidas no caso base são mais elevadas apesar da quantidade total produzida ser menor.

Tabela 6-6 – Renda dos agentes estratégicos: Equilíbrio de Nash vs Mínimo Custo para diferentes níveis de demanda

Lucro Furnas (kR\$)	Caso Base	Demanda Baixa
Equilíbrio de Nash	1250	205
Solução de mínimo custo	910	205
Lucro Cesp (kR\$)	Caso Base	Demanda Baixa
Equilíbrio de Nash	292.5	7.5
Solução de mínimo custo	140	7.5
Lucro Duke (kR\$)	Caso Base	Demanda Baixa
Equilíbrio de Nash	256	16
Solução de mínimo custo	175	16

7 CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

7.1 Conclusões

Com o avanço da implementação dos processos de reforma no setor elétrico de distintos países, o mecanismo de despacho e formação de preços por ofertas em mercados atacadistas de energia (ou mercados *spot*) tem se tornado bastante freqüente. Da mesma forma, o problema de determinar a estratégias de ofertas ótimas tem se tornado cada vez mais importante e estudado na literatura nos últimos anos. Para as empresas geradoras de energia, a questão é como desenvolver estratégias de ofertas (quantidades e preços a serem ofertados no mercado *spot*) que maximizem sua rentabilidade. Por outro lado, reguladores estão interessados em estudar as estratégias de atuação no mercado buscando identificar abusos de posição dominante e manipulação de mercado que possam ser danosas ao consumidor final. A complexidade do problema de otimização da oferta de um agente aumenta quando observamos que a formação do preço *spot*, e conseqüentemente de sua receita, dependem não só da oferta realizada por este agente, mas das ofertas realizadas por *todos* os demais agentes (seus “concorrentes”). Desta forma, passa a ser necessário representar a *dinâmica* da competição entre os agentes no processo de formação ofertas no mercado de curto prazo.

O objetivo desta tese foi o de apresentar uma abordagem de solução para o problema de determinar a estratégia de oferta ótima global de uma empresa geradora de energia elétrica *price maker* em um mercado atacadista de energia. Esta estratégia deve ser determinada de forma a maximizar sua receita líquida sujeito às diversas restrições operativas das unidades geradoras da empresa e considerando o comportamento dinâmico (reação) de seus concorrentes. Esta tese aborda todos os aspectos anteriores e está dividida em três partes principais: (i) abordagem geral de solução ótima global para o problema de ofertas; (ii) incorporação do comportamento dos concorrentes através de cenários e resolvendo um problema de ofertas sob incerteza; (iii) incorporação da dinâmica de reação dos concorrentes através do cálculo de equilíbrios de Nash em um modelo de teoria de jogos.

Como visto na primeira parte desta tese, o problema de determinar a estratégia ótima de oferta é um problema de otimização de dois níveis, que por sua vez pode ser

transformado em um *problema de programação matemática com restrições de equilíbrio* (“MPEC”) através da substituição do problema seguidor por suas condições de otimalidade. O problema de otimização resultante é não linear, não convexo e de difícil solução através de métodos de programação não linear convencionais, como método do gradiente e gradiente reduzido, métodos de penalização e barreira, Lagrangeano aumentado, etc. As metodologias de solução encontradas na literatura variam desde processos iterativos, heurísticos, modelos de equilíbrio ou algoritmos específicos. Embora diversas destas abordagens forneçam bons resultados, é reconhecido que usualmente não é possível garantir que a solução ótima global tenha sido encontrada e, em muitos casos, a representação de extensões de interesse não é possível. Visando aliviar as dificuldades anteriores, foi proposta uma abordagem de solução por programação inteira mista, baseada na decomposição binária das variáveis de decisão. Como visto nesta tese, a aplicação da decomposição binária é bastante flexível e isto torna o modelo proposto na presente tese bastante interessante em alguns aspectos importantes visando torná-lo computacionalmente eficiente, sobretudo no caso de oferta sob incerteza (segunda parte da tese). Adicionalmente, os modelos desenvolvidos neste trabalho aplicam-se ao caso geral do problema de ofertas, onde é realizada a otimização simultânea (mista) de preços e quantidades. Neste sentido, a flexibilidade do modelo é ilustrada através de estudos de caso com modelos de oferta puras de preços, puras de quantidade e modelos mistos. Finalmente, mostra-se ainda nesta tese que a abordagem proposta permite representar diversos aspectos operativos relevantes do problema, como por exemplo, restrições de transmissão, e aspectos complementares (não essenciais para o contexto da tese), como decisões de partida de unidades, critérios de risco, decisões de investimento em capacidade e em instrumentos financeiros.

A segunda parte da tese introduz a modelagem do comportamento estratégico dos concorrentes através de um modelo de ofertas sob incerteza. O modelo determinístico anterior é estendido para um modelo estocástico, onde a incerteza em torno das ofertas dos concorrentes é representada através de cenários. A “explosão” do número de variáveis inteiras com o número de cenários considerados, observada em trabalhos de outros autores, é aliviada neste trabalho através da formulação proposta. A solução ótima global de todos os modelos inteiro-mistos é obtida por métodos do tipo Branch and Bound. A utilização prática do modelo sob incerteza ocorre através de uma empresa

atuante em um mercado *spot* de energia, na elaboração de suas estratégias de ofertas. Visando demonstrar tal aplicabilidade, um estudo de caso realista com a metodologia proposta foi apresentado, onde foi possível verificar a eficácia da estratégia determinada pelo modelo quando comparada a uma estratégia baseada em custos.

Finalmente, a terceira parte desta tese, estende uma vez mais os modelos anteriores para representar a dinâmica da reação dos concorrentes através de um jogo não cooperativo, onde cada agente “reage” dinamicamente às ofertas de seus concorrentes e a solução buscada é uma situação de equilíbrio, conhecido como Equilíbrio de *Nash*. Como mostrado nesta tese que, o equilíbrio de Nash pode ser representado matematicamente por um conjunto de desigualdades, que representa a solução simultânea de distintos problemas de programação matemática com restrição de equilíbrio, formando assim um *problema de equilíbrio com restrições de equilíbrios* (“EPEC”). Na solução de equilíbrio, todos os agentes estão “satisfeitos” dadas as ofertas de seus concorrentes. Desta forma, o modelo de programação inteira-mista apresentado foi estendido para o cálculo de equilíbrios de *Nash* em mercados de eletricidade. Foram discutidas e apresentadas diversas particularidades importantes de modelos baseados em teoria dos jogos, como por exemplo, procedimentos para, com o modelo proposto, identificar e enumerar múltiplos equilíbrios de Nash. Foram também discutidas as limitações do modelo, como a possibilidade de não identificar equilíbrios devido à discretização das ofertas. Em termos de aplicação prática, este modelo poder ser utilizado por reguladores interessados na simulação do comportamento racional dos agentes e na análise e identificação de poder de mercado em mercados atacadistas de energia com despacho por ofertas. Um estudo de caso realista ilustrou o desempenho prático e utilização do modelo nesta tarefa.

Um aspecto complementar diz respeito à eficiência computacional dos modelos desenvolvidos: todos os modelos desta tese são representados em um ambiente de programação inteira-mista e, portanto, podem aproveitar-se de todos os avanços computacionais e dos avanços recentes das técnicas e algoritmos de solução nesta área, que tem sido bastante notáveis [1].

Por fim, ressalta-se que o trabalho desenvolvido nesta tese de doutorado já resultou em dois artigos técnicos publicados ([13] e [77]) no jornal científico IEEE Transactions on Power Systems, da sociedade americana de pesquisa IEEE Power Engineering Society.

Adicionalmente, o modelo do Capítulo 5 foi utilizado por outro pesquisador da Grécia em um problema similar [14] e o modelo do Capítulo 6 serve como base para os desenvolvimentos (atualmente em andamento) conduzidos em [52].

7.2 Principais contribuições

As principais contribuições deste trabalho consistem no desenvolvimento de um modelo linear-inteiro para resolver de forma ótima global e computacionalmente eficiente os problemas de equilíbrio não convexos de ofertas sob incerteza e cálculo de equilíbrios de Nash em mercados de eletricidade. Este trabalho difere da modelagem teórica encontrada na literatura recente, onde a abordagem de solução de ambos os problemas vem sendo apresentada sob um enfoque de processos iterativos ou algoritmos clássicos de programação não linear, que não permitem obter a solução ótima global e muitas vezes impossibilitam a modelagem de extensões adicionais, o que não é observado neste trabalho. Adicionalmente este trabalho discute modelos de ofertas mistas (preços e quantidades), ao contrário da maioria dos demais trabalhos, que discutem modelos de ofertas puras de preço ou de quantidade.

Neste sentido, as contribuições deste trabalho podem ser resumidas nos seguintes tópicos:

- (a) desenvolvimento de um modelo de programação inteira-mista e solução do problema de programação matemática com restrições de equilíbrio de oferta ótima de preços e quantidades de uma empresa geradora de energia, dona de múltiplas usinas, em mercados de curto prazo de energia elétrica. O modelo proposto é baseado na expansão binária das variáveis de decisão e busca apresentar uma abordagem computacionalmente viável para a solução do problema de ofertas e, com isso, permitir representar diversas outras extensões adicionais. Desta forma, o modelo proposto neste trabalho é bastante flexível, permitindo estabelecer ofertas ótimas globais de preço, quantidade ou ofertas conjuntas preço e quantidade. São apresentadas diversas extensões importantes, como rede de transmissão, custos de partida, decisões adicionais de expansão de capacidade e decisões financeiras;
- (b) desenvolvimento da extensão do modelo anterior para incorporar ofertas sob incerteza, onde as ofertas das demais empresas são representadas por cenários. O

modelo proposto neste trabalho permite que o número de variáveis inteiras não cresça linearmente com o número de cenários. São apresentadas soluções para instâncias do problema;

- (c) desenvolvimento da extensão do modelo inteiro-misto para cálculo de equilíbrios de Nash em mercados de curto prazo de energia, procurando assim evitar as desvantagens dos modelos iterativos e de algoritmos de programação não linear para problemas de complementariedade. O modelo proposto é uma representação linear-inteira de um problema de equilíbrio com restrições de equilíbrio e permite identificar e enumerar a existência de múltiplos equilíbrios de Nash, o que é uma dificuldade dos modelos usuais encontrados na literatura. Segundo o conhecimento do autor, a abordagem de cálculos de equilíbrios de Nash através de modelos de equilíbrio com restrições de equilíbrio utilizando programação inteira é inédita na literatura. São também apresentadas soluções para instâncias do problema;
- (d) todos os modelos apresentados são desenvolvidos para o caso genérico de ofertas conjuntas de preços e quantidades, o que é pouco encontrado na literatura (a exceção são modelos de “supply function equilibria”), e todos os modelos são ilustrados computacionalmente através de exemplos e estudos de caso realistas, incluindo comparação de performance entre modelos mistos, Cournot e Bertrand;
- (e) conforme já mencionado ao longo da tese, o presente trabalho difere daqueles encontrados na literatura no que diz respeito à modelagem teórica.

Ressalta-se que, embora todos os desenvolvimentos propostos sejam ilustrados computacionalmente através de estudos de caso com dados reais do Sistema Elétrico Brasileiro, a metodologia proposta é geral, ou seja, se aplica a problemas de ofertas diárias de preços/quantidade em diversos outros mercados de energia desacoplados no tempo. Propostas de estender o modelo apresentado para representar outros aspectos são discutidas a seguir.

7.3 Desenvolvimentos futuros

Três classes de trabalho distintas podem ser investigadas em futuros trabalhos: representação de extensões adicionais de interesse no problema, investigação de esquemas alternativos de solução e outras aplicações da decomposição binária. Todas serão discutidas a seguir.

7.3.1 Representação de extensões adicionais

Neste trabalho o mercado principal para a obtenção de receitas para um agente gerador consiste na venda de energia no mercado *spot* de eletricidade. Diversos países possuem mercados adicionais de curto prazo, como os mercados de serviços ancilares. Nestes mercados, outros “serviços” de curto-prazo são vendidos pelo gerador em mercados específicos, como, por exemplo, os serviços de reserva girante (reserva primária, secundária e terciária), blackstart, suporte de reativo e controle de tensão. Desta forma, o gerador possui a capacidade de obter receitas provenientes de diversos mercados, todos interrelacionados e cada qual demanda uma estratégia de oferta visando maximizar o lucro do agente. Assim, uma primeira sugestão de desenvolvimento futuro seria representar a existência destes mercados no modelo de ofertas apresentado nesta tese. Como estes mercados são todos relacionados entre si e cujas liquidações ocorrem de maneira “sequencial” (isto é, primeiro o mercado *spot* de energia, depois o mercado de reserva girante, etc), o problema de otimização resultante é um problema de decisões sequenciais inteiro-misto que poderia ser resolvido por técnicas de decomposição, como introduzido em [1].

Outra extensão sugerida consiste em acoplar o modelo de curto prazo (detalhado) desta tese a modelos de oferta de longo prazo visando capturar o acoplamento temporal existente nas decisões de sistemas hidroelétricos. Como de conhecimento, em sistemas hidroelétricos a oferta estratégica da etapa corrente depende não somente das estimativas sobre as ofertas dos outros geradores na mesma etapa, mas passa também a depender das *oportunidades* de oferta estratégica nas etapas seguintes. Enquanto o acoplamento temporal, por si só, aumenta substancialmente a complexidade do problema, a vazão natural afluente a cada usina hidroelétrica é uma variável estocástica, para a qual não se sabe o valor a se realizar no futuro. Com isso, o problema de ofertas em sistemas hidroelétricos torna-se não linear, não convexo, multi-estágio e estocástico.

Em [38] foi apresentada uma metodologia de programação dinâmica dual estocástica (PDDE) [79] para o problema de oferta estratégia de uma empresa geradora com múltiplas usinas hidrelétricas, levando em consideração múltiplos estágios e a incerteza nas afluências. Como a metodologia PDDE não pode ser aplicada diretamente a este problema – pois a mesma requer que o problema seja convexo – foi proposta a aproximação, a cada estágio, da função de remuneração resultante por sua envoltória côncava. Com isto, evita-se a “maldição da dimensionalidade” da PDE clássica através da PDDE, que *aproxima* a envoltória côncava da função de benefício futura (FBF) em cada estágio, por uma função linear por partes (conjunto de hiperplanos), evitando assim o crescimento exponencial do esforço computacional e permitindo a representação de múltiplos agentes, como realizado posteriormente em [20] num enfoque baseado em teoria dos jogos. Entretanto, observe que o problema de uma etapa resolvidos nos trabalhos anteriores, é uma *aproximação* do problema não convexo real. Esta aproximação é correta para estabelecer uma política de operação dos reservatórios no longo prazo, porém, como visto nesta tese, a elevada não convexidade do problema pode torná-la indesejável para a determinação da estratégia de oferta no curto prazo. Como a “ligação” temporal é importante em sistemas hidrotérmicos, um futuro desenvolvimento consiste em acoplar o modelo de inteiro-misto de curto prazo desenvolvido nesta tese com os modelos de longo prazo desenvolvidos nos trabalhos mencionados anteriormente através de uma função de remuneração futura: esta função, que indica o benefício de produzir energia hoje ou armazenar para uso futuro, seria calculada pelo procedimento de PDDE descrito nos trabalhos anteriores. Uma vez calculada, esta função seria utilizada em uma versão “estendida” do modelo de curto prazo desenvolvido nesta tese onde o agente hidroeletrico maximizaria a soma do lucro “imediato” (de cada hora) com o lucro “futuro”, indicado pela função de remuneração futura que já foi precalculada. A equação de balanço hídrico relaciona as decisões entre as etapas imediatas e futuras. Dessa forma, seria possível capturar detalhadamente a modelagem das não convexidades no curto prazo e ao mesmo tempo representar o acoplamento com as decisões futuras através da função de remuneração futura, onde esta é construída de maneira eficiente pelo procedimento de PDDE.

7.3.2 Investigação de esquemas alternativos de solução

Outra possível área de desenvolvimentos futuros é a investigação de esquemas alternativos de solução do problema inteiro-misto. Como já mencionado, todos os modelos desta tese são representados em um ambiente de programação inteira-mista (MILP – mixed integer linear programming) e portanto podem aproveitar-se de todas os avanços recentes das técnicas e algoritmos de solução para problemas MILP, que tem sido bastante notáveis [1]. Por outro lado, estes modelos podem apresentar as dificuldades computacionais resultantes de todas as dificuldades e limitações já conhecidas dos algoritmos de programação inteira. Os estudos de caso apresentados nesta tese tiveram um desempenho computacional bastante satisfatório mas algumas importantes restrições de acoplamento temporal, rede de transmissão e ofertas em outros mercados não foram consideradas. Estes aspectos podem elevar diretamente o esforço computacional dos algoritmos MILP.

Neste sentido, uma futura área de desenvolvimento consiste em investigar abordagens alternativas de solução do problema inteiro desta tese. Por exemplo, a observação de que o número de variáveis contínuas e restrições é elevado no modelo de equilíbrios de Nash do Capítulo 6 sugere que estratégias de relaxação e decomposição talvez possam ser utilizadas e a busca pelo equilíbrio de Nash ocorra através da solução de aproximações sucessivas do problema relaxado. Da mesma maneira, a utilização de planos de corte em métodos “branch and cut” ou a combinação de algoritmos e técnicas de distintas áreas da programação matemática, como a promissora aplicação de algoritmos branch-and-bound combinados com técnicas de relaxação através de programação semidefinida podem ser aplicadas.

Estes avanços seriam importantes para, por exemplo, poder representar as variáveis de decisão de modo contínuo no problema de cálculos de Equilíbrio de Nash. Assim se evitaria uma desvantagem da abordagem proposta nesta tese, que é a possibilidade de não obter equilíbrios devido à discretização das ofertas. Uma saída para esta dificuldade é trabalhar com o modelo de Cournot, once é possível representar os preços como variáveis discretas e as ofertas de quantidade como variáveis contínuas.

7.3.3 Aplicações da metodologia proposta em outros problemas de otimização

O esquema de decomposição binária apresentado nesta tese é “genérico” e pode ser aplicado para substituir não linearidades causadas por qualquer produto de variáveis de decisão através de restrições lineares inteiras. Assim, este esquema torna-se uma poderosa ferramenta para obter, através de formulações inteiro-mista, soluções ótimas globais de problemas não lineares (e não convexos) de programação matemática. Como sua aplicação é bastante flexível, existe a oportunidade de se obter formulações mais eficientes e soluções ótimas globais para uma vasta classe de problemas de otimização, como, por exemplo, os problemas de programação matemática com restrições de equilíbrio, problemas de equilíbrio com restrições de equilíbrio, etc. Problemas com estas características surgem em diversas áreas da ciência, como, a energia elétrica (exemplos alternativos incluem otimização de ofertas em leilões de contratos, etc), petróleo, tarifação de rodovias, telecomunicações, etc.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andreani, R.; Martínez, J.M.M. “On the solution of mathematical programming problems with equilibrium constraints”, *Mathematical Methods of Operations Research (ZOR)*, Vol. 54, No 3, Pags 345 – 358, 2001.
- [2] Atamturk, A.; Savelsbergh, M. W. P. “Integer-Programming Software Systems”, *Annals of Operations Research*, 140, 67–124, 2005.
- [3] Baillo, A. “A methodology to develop optimal schedules and offering strategies for a generation company operating in a short-term electricity market”, Tese de Doutorado, Escuela de Ingeniería, Universidad Pontificia Comillas de Madrid, 2003 (disponível em <http://www.iit.upco.es/alvarob/>).
- [4] Baillo, A., Ventosa, M., Rivier M. and Ramos, A., “Optimal Offering Strategies for Generation Companies Operating in Electricity Spot Markets”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19, No.2, 2004.
- [5] Baíllo, A., Ventosa, M., Rivier, M., Ramos, A., “Strategic Bidding in a Competitive Electricity Market: A Decomposition Approach”, 2001 IEEE PowerTech, Portugal, September, 2001.
- [6] Baldick, R.; Ryan G.; Kahn E., "Linear Supply Function Equilibrium: Generalizations, Application, and Limitations", PWP-078, University of California Energy Institute, 2002 (disponível em <http://www.ucei.berkeley.edu>).
- [7] Barroso, L.A., “Esquemas competitivos em sistemas hidrotérmicos: comportamento estratégico de agentes geradores em ambiente de mercado”, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Maio 2000.
- [8] Barroso, L.A., Pereira M.V.F., Kelman R., Lino P., Rosenblatt J., “Can Brazil learn from California?”, *IEEE Power Engineering Review*, Volume 22, No. 8, Aug. 2002 Pages 17 – 23.
- [9] Barroso, L.A.; Rudnick, H.; Skerk, C.; Blanco, A.; “South American reform lessons - twenty years of restructuring and reform in Argentina, Brazil, and Chile”, *IEEE Power and Energy Magazine*, Volume 3, No. 4, July-Aug. 2005 Pages:49 – 59.

- [10] Barroso, L.A.; Pereira, M.V.F.; Kelman R.; Fampa M.; Lino, P. “Market Power Issues In Bid-Based Hydro Dispatch”, Annals of Operations Research, vol 117, pags 247-270, 2002.
- [11] Barroso, L.A.; Pereira, M.V.F.; Aires J.C.O ; Candida M.C.; Lino, P. “The Effectiveness of Demand Elasticity in Competitive Hydrothermal Systems”, Proceedings do 14th Power Systems Computation Conference, Sevilla, Espanha, Maio de 2002.
- [12] Barroso, L.A.; Hogan, W.W; Discussion of “Hydrothermal Market Simulator Using Game Theory: Assessment of Market Power”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol 19, No 1, 2004.
- [13] Barroso L.A, Dix R., Granville S., Pereira M.V., Fampa M. “Nash Equilibria in Electricity Markets: A Binary Expansion Approach”. IEEE Transactions on Power Systems, Volume 21, No. 2, Maio 2006 Page(s):180 - 188.
- [14] Bakirtzis, A.; “Producer decision-making in competitive electricity markets”, ESF Exploratory Workshop on Mathematical Models For Electricity Markets, Ciudad Real, Spain, 12-14 July 2006. Disponível em: <http://www.uclm.es/area/gsee/Archivos%20Pag-web/workshop/home.htm>
- [15] Benson, H.Y., Sen, A., Shanno, D.F., Vanderbei, R., “Interior-Point Algorithms, Penalty Methods and Equilibrium Problems”, Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, 2003.
- [16] Bertsekas, D.P., Nonlinear Programming, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1985
- [17] Borenstein, S.; Bushnell J. e C. Knittel, “Market Power in Electricity Markets: Beyond Concentration Measures”, PWP-059R, University of California Energy Institute, February 1999 (disponível em <http://www.ucei.berkeley.edu>)
- [18] Bushnell, J., “A mixed complementarity model of hydrothermal electricity competition in the western United States”, Operations research, Vol. 51, No. 1, pp. 80-93, 2003.
- [19] Candal, D. “Estratégia Ótima de Oferta em Mercados Competitivos de Energia”, Tese de Doutorado, COPPE-Sistemas, Fevereiro de 2005.

- [20] Cahuano, J. “Despacho e Formação de Preços de Energia Elétrica Através de Leilões Em Sistemas Predominantemente Hidráulicos”, Tese de Doutorado, COPPE-Sistemas, Maio de 2005.
- [21] Cavalcanti, R. F.; Silva, E. L.; Zucarato, A. N. “Influência do Comportamento de geradores oligopolistas na formação do preço de mercados de energia elétrica”, X Simpósio de Especialistas em Planejamento da Operação e Expansão Elétrica, Florianópolis, Brasil, 2006.
- [22] Comitê de revitalização do Setor Elétrico Brasileiro – Relatório de Progresso 2, Anexo H (Formação de preços por oferta), Maio, 2002.
- [23] Competition in Electricity Markets, IEA, 2001.
- [24] Conejo A. J. and Prieto F. J., “Mathematical Programming and Electricity Markets”, Sociedad de Estadística e Investigación Operativa TOP, Vol. 9, No. 1, pp.1-53, 2001.
- [25] Conejo A. J., Contreras J., Arroyo J. M. and Torre S., “Optimal response of an oligopolistic generating company to a competitive pool-based electric power market”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 17, No.2, 2002.
- [26] Conejo A. J., Nogales F., Arroyo J. M., “Price Taker Bidding Strategy Under Price Uncertainty”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 17, No.4, 2002.
- [27] Correia, P.F.; Games with incomplete and asymmetric information in poolco markets, IEEE Transactions on Power Systems, Volume 20, No. 1, Page(s):83 – 89, 2005.
- [28] Correia P.F., Overbye T.J., Hiskens I. “Searching for noncooperative equilibria in centralized electricity markets”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 18, No.4, 2003
- [29] Dantzig, G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, New Jersey, 1963.
- [30] David A.K.; Fushuan W.; “Strategic bidding in competitive electricity markets: a literature survey”; Proceedings of IEEE Summer Meeting, Seattle, July 2000.
- [31] Day C.J., Hobbs B.F., e Pang J.S., “Oligopolistic competition in power networks: A conjectured supply function approach,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 17, pp. 597–607, Aug. 2002.

- [32] Diniz, A.L.S., “Uma Estratégia de Decomposição por Relaxação Lagrangeana para o Problema de Programação Diária Ótima de Sistemas Hidrotérmicos – Aplicação Ao Unit Commitment das Unidades Hidroelétricas”, Tese de Doutorado (em desenvolvimento), COPPE-PESC/2006
- [33] Dix, R.; Barroso, L.A., Pereira, M.V.F.; Granville, S., “Strategic Bidding Under Uncertainty: A Comparison Between The Binary Expansion Approach and Non Linear Optimization Methods” – NT-PSR/2003 (disponível em <http://www.psr-inc.com>)
- [34] Fampa, M.H.C; Candal, D.; Barroso, L.A.N.; Simonetti, L.; “Bilevel optimization applied to strategic pricing under uncertainty in competitive electricity markets”, aprovado para publicação na revista Computational Optimization and Applications, 2006.
- [35] Fang D.; Wang X.; Ouyang F.; Ye C.; Bayesian Nash equilibrium bidding strategies for generation companies, Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Electric Utility Deregulation, Restructuring and Power Technologies; Volume 2, 5-8 April 2004 Page(s):692 - 697 Vol.2.
- [36] Fernandes, R.C.; “Avaliação do comportamento estratégico de agentes geradores hidrelétricos em sistemas hidrotérmicos”, Tese de Doutorado, UFSC, 2006.
- [37] Ferrero, R.W.; Rivera, J.F.; Shahidehpour, S.M.; Application of games with incomplete information for pricing electricity in deregulated power pools, IEEE Transactions on Power Systems, Volume 13, No. 1, Feb. 1998 Page(s):184 – 189.
- [38] Flach, B. “Estratégia de ofertas de agentes hidroelétricos com múltiplos estágios e múltiplos cenários”, Tese de Mestrado, PUC-Rio, 2005.
- [39] Flatabo, N., Haugstad A, Mo B., Fosso O. “Short and Medium-term Generation Scheduling in the Norwegian Hydro System under a Competitive Power Market Structure”, Proceedings of EPSOM Conference, Zurich, 1998.
- [40] Fletcher, R., Leyffer, S., “Numerical experience with solving MPEC and NLPs”, Working paper, University of Dundee, 2002.
- [41] Fudenberg D. e J. Tirole – Game Theory, MIT Press, Fifth Printing (1996).

- [42] García, J.G.; Barquín, J.; Román, U.J; “Building supply functions under uncertainty for day ahead electricity market”, 6th PMAAPS, Portugal, 2000.
- [43] Game Theory in Electricity Markets – IEEE Tutorial, 1999
- [44] Gendreau M., Marcotte P., Savard G., “A hybrid tabu ascent algorithm for the linear bilevel programming problem”, Journal o Global Optimization 8, 217-233, 1996.
- [45] Gjelsvik A., Belsnes M., Haugstad A. (1998). An algorithm for stochastic medium-term hydrothermal scheduling under spot price uncertainty. Proceedings of 13th Power Systems Computation Conference, Trondheim, Norway.
- [46] Granville, S., Kelman, R., Barroso, L.A., Chabar, R., Pereira, M.V., Lino, P., Xavier, M., Capanema, I., “Um Sistema Integrado para Gerenciamento de Riscos em Mercados de Energia Elétrica”, XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [47] Goldman C.; Lesieutre B.; Bartholomew E.; “A Review of Market Monitoring Activities at U.S. Independent System Operators”, Lawrence Berkeley National Laboratory, 2004 (disponível em <http://www.electricity.doe.gov>).
- [48] Gorenstin, B., Campodónico, N., Costa, J., Pereira, M.V.F., “Power system planning under uncertainty”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol.8, No.1, Feb. 1993
- [49] Granville, S.; Oliveira, G. C.; Thomé, L. M.; Campodónico, N.; Latorre, M.; Pereira, M. V.; e Barroso, L. A.; “Stochastic optimization of transmission constrained and large scale Hydrothermal Systems in a Competitive Framework”, Proceedings of the IEEE General Meeting, Toronto, 2003.
- [50] Gross, G. and Finlay, D., “Generation supply bidding in perfectly competitive electricity markets”, Computational & Mathematical Organizations Theory, Vol. 6, pp. 83-98, 2000.
- [51] Hao, S., “A Study of Basic Bidding Strategy in Clearing Pricing Auctions”, IEEE Trans. Power Systems, vol 15, pp. 975-980, August. 2000.
- [52] Hasan, E.; Galiana, F.D.; Conejo, A. “Strategic Generator Offers in Electricity Markets Cleared by Merit-order”, PhD proposal, Electrical and Computer

Engineering Department, McGill University, June 2006 (apresentação disponível em <http://www.uclm.es/area/gsee/Archivos%20Pag-web/workshop/home.htm>)

- [53] Hobbs B. H., Metzler C. B. and Pang J. S., “Strategy Gaming Analysis for Electric Power Systems: An MPEC Approach”. IEEE Transactions on Power Systems, v. 15, pp. 638-645, May 2000.
- [54] Hobbs B.F. e Helman U., “Complementarity-based equilibrium modeling for electric power markets”, in D. Bunn, ed., Modeling Prices in Competitive Electricity Markets, J. Wiley, 2004.
- [55] Hobbs B.F., "LCP of Nash-Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets," IEEE Transactions on Power Systems, 16(2), 2001.
- [56] Hobbs B.F., Metzler C. e Pang J.-S., “Calculating Equilibria in imperfectly competitive power markets: an MPEC approach”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 15, No.1, 2000.
- [57] Hobbs,B.F., e Nelson,S.K., A nonlinear bilevel model for analysis of electric utility demand-side planning issues, Annals of Operations Research 34, 255-274 (1992).
- [58] Hobbs B.F., Metzler C. e Pang J.-S., “Calculating Equilibria in imperfectly competitive power markets: an MPEC approach”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 15, No.1, 2000.
- [59] Hu, X.; Ralph, D.; “Using EPECs to Model Bilevel Gams in Restructured Electricity Markets with Locational Prices”, Working paper CWPE 0619, University of New Sout Wales, Fevereiro 2006.
- [60] Hunt, S. “Making Competition Work in Electricity”, Published by John Wiley & Sons, 2003.
- [61] Junqueira, M. “Aplicação da Teoria dos Jogos Cooperativos para Alocação dos Custos de Transmissão em Mercados Elétricos”, Tese de MSc, COPPE-PPE, Maio 2005.
- [62] Kelman, R. – Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Eficiência Econômica e Comportamento Estratégico ; Tese de M.Sc, COPPE/UFRJ, Agosto 1999.

- [63] Kelman, R.; Barroso, L. A.; e Pereira M. V., “Market power assessment in hydrothermal systems”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 16, No.3, 2001.
- [64] Klemperer, P. e M. Meyer – Supply Function Equilibria in Oligopoly Under Uncertainty, *Econometrica*, 57, 1989, pp. 1243-1277
- [65] Labbé M., Marcotte P., Savard G., “On a class of bilevel programs”, *Nonlinear Optimization and Related Topics*, di Pillo e Gianessi (eds) Kluwer Academic Publishers, 183-206, 2000.
- [66] Latorre, M.L., Granville, S., “The Stackelberg Equilibria Applied to AC Power Systems – A Non Interior Point Algorithm”, IEEE Transactions on Power Systems, v. 18, no. 2, pp. 611-617, 2003.
- [67] Lino, P., Barroso, L. A., Fampa, M., Pereira, M. V. e Kelman, R., “Bid-Based Dispatch of Hydrothermal Systems in Competitive Markets”, *Annals of Operations Research*, Vol. 120, pp. 81-97, 2003.
- [68] LOQO – User’s Manual (disponível em <http://www.princeton.edu/~rvdb/tex/loqo/loqo405.pdf>)
- [69] Luo Z. Q., Pang J. S. and Ralph D., *Mathematical Programming with Equilibrium Constraints*, N.Y. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [70] MINOS – ver Stanford Business Software (http://www.sbsi-sol-optimize.com/asp/sol_product_minos.htm)
- [71] Monticelli, A., Garcia, A. “Introdução a Sistemas de Energia Elétrica”. Editora da UNICAMP, 2000.
- [72] Nash J. F., Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*. (2) 54 (1951), 286–295
- [73] Nash J. F., Equilibrium points in n-person games, *Proc. Natural Academy of Sciences. USA* 36 (1950), 48–49
- [74] Oliveira, A.M.S., “Estratégia ótima de oferta de preços no mercado de curto prazo em sistemas com predominância hidrelétrica”, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-RJ, Dezembro 2003.

- [75] Otero-Novas I., Meseguer C., e Alba J.J., “An iterative procedure for modeling strategic behavior in competitive generation markets,” in Proc. 13th Power Syst. Conf., Trondheim, Norway, July 1999.
- [76] Otero-Novas I., Meseguer C., Batlle C., e Alba J. J., “A simulation model for a competitive generation market,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 15, pp. 250–256, Feb. 2000.
- [77] Pereira M.V., Granville S., Fampa M., Dix R., Barroso L.A. “Strategic Bidding Under Uncertainty: A Binary Expansion Approach”. IEEE Transactions on Power Systems, Volume 20, No. 1, Feb. 2005 Page(s):180 - 188.
- [78] Pereira, M.; Campodónico,N.; Kelman,R. “Long term Hydro Scheduling based on Stochastic Models”, Proceedings of EPSOM '98, Zurique, Setembro 1998.
- [79] Pereira, M.; Pinto, L. M.V.G., “Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning”, Mathematical Programming, Vol 52, 359-375, 1991
- [80] Pereira, M.; et al., “Methods and Tools for Contracting in a Competitive Framework”, CIGRÉ Task Force 38-05-09, Dezembro 2000
- [81] Pritchard, G., Zakeri, G. (2003). “Market offering strategies for hydroelectric generators”. Operations Research 51, 602-612.
- [82] Ramos, A., Ventosa, M. e Rivier, M., “Modeling Competition in Electric Energy Markets by Equilibrium Constraints” Utilities Policy, Vol. 7 No. 4 pp 233-242, 1999.
- [83] Rodrigues, H.S.F.; “Problema de optimização com restrições de complementariedade: uma aplicação ao mercado de energia”, Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2005.
- [84] Rudnick H.; Villar J. “Hydrothermal Market Simulator: an assessment using game theory”. IEEE Transactions on Power Systems, 2004.
- [85] Rockafellar, R.T., Uryasev, S.: “Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions”. Journal of Banking & Finance 26 (2002), 1443– 1471.
- [86] Schultz, R., Tiedemann, S.: “Risk Aversion via Excess Probabilities in Stochastic Programs with Mixed-Integer Recourse”. SIAM Journal on Optimization 14 (2003), 115–138.

- [87] Schultz, R., Tiedemann, S.: “Conditional value-at-risk in stochastic programs with mixed-integer recourse”, Mathematical Programming (a ser publicado).
- [88] Scott,T.; Read,E. “Modelling Hydro Reservoir Operation in a Deregulated Electricity Market”, International Transactions in Operational Research 3 (3-4):243-253, 1996
- [89] Silva, E. L., “Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica”, Editora Sagra Luzzatto, Porto Alegre, RS, Brasil, 2001.
- [90] Silva, E. L.; Finardi, E. “Solving the Hydro Unit Commitment via Dual Decomposition and Sequential Quadratic Programming”. IEEE Transactions on Power Systems, v. 21, n. 2, p. 835-844, 2006.
- [91] Smeers, Y. “Market incompleteness in regional electricity transmission. Part I: the forward market. Networks and Spatial Economics”, 3, 151-174, 2003.
- [92] Smeers, Y. “Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets”, Operations Research, 53(4), 2005.
- [93] Street, A.; Barroso, L.A.; Cahuano, J.; Granville, S.; Rosenblatt, J.; Thomé, L.; Pereira, M.V.; Kelman, R.; Faria, E.; Veiga, A.; “ Estratégias de Atuação de Agentes Geradores sob Incerteza em Leilões de Contratos de Energia Elétrica”, XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Curitiba, 2005.
- [94] Su, Che-Lin; “Equilibrium Problems with Equilibrium Constraints”. Ph.D. Thesis, Snaford University, Setembro, 2005 (disponível em <http://www.stanford.edu/~clsu/>).
- [95] Supatgiat, C.; Zhang, R. Q. e Birge, J. R.; “Equilibrium values in a competitive power exchange market,” Computational Economics, vol.17, pp.93-121, 2001.
- [96] Torre, S., Arroyo, J. M., Conejo, A. J. e Contreras, J., “Price Maker Self Scheduling in a Pool-Based Electricity Market: A MILP Approach”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 17, No.4, 2002.
- [97] Torre S., Contreras J., Conejo A. “Finding Multi-Period Nash Equilibria in pool-based electricity markets”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 19, No.1, 2004.

- [98] Vaish, H. e Shetty, C., The bilinear programming problem, *Naval Research Logistics Quarterly* 23, 303-309(1976).
- [99] Ventosa, M.; Rivier, M.; Ramos, A., “Modeling profit maximization in deregulated power markets by equilibrium constraints”, 13th PSCC, pp 231-237, Trondheim, Noruega, 1999.
- [100] Vicente, L. “Programação de dois níveis”, tese de mestrado, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, (1992).
- [101] Von Der Fehr, N.H., Harbord, D., Competition in Electricity Spot Markets Economic Theory and International Experience, Memorandum, Departmente of Economics, University of Oslo, 1998.
- [102] von Neumann J. e Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944
- [103] Wallace, S.W., Fleten S.-E. (2003). “Stochastic programming models in energy”. In: *Stochastic Programming: Handbooks in OR & MS*, Vol.10 (A.Ruszczynski, A. Shairo eds), Elsevier Science.
- [104] Weber, J. e Overbye T., “An individual welfare maximization algorithm for electricity markets”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 17, No.3, 2002.
- [105] Wen, F.S.; David, A.K.; Oligopoly electricity market production under incomplete information, *IEEE Power Engineering Review*; Volume 21, No. 4, April 2001 Page(s):58 – 61.
- [106] Xian, W., Yuzeng Li, Shaohua Z., Oligopolistic equilibrium analysis for electricity markets: a nonlinear complementarity approach, *IEEE Transactions on Power Systems*, Volume: 19, No.: 3, Aug. 2004.
- [107] X-Press MP, Dash Optimization (ver <http://www.dashoptimization.com/>)
- [108] Zucarato, A.N., “Simulação de Mercados de energia elétrica com predominância hidroelétrica”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Março 2003.

9 ANEXO A – O MODELO INTEIRO-MISTO PROPOSTO EM [96]

Este anexo possui dois objetivos: (i) ilustrar a não-convexidade do problema de ofertas e (ii) apresentar a solução proposta em [96] para uma versão mais simplificada do modelo de ofertas estudado nesta tese. A abordagem de solução deste trabalho é também baseada em programação inteira, mas que apresentaria um excessivo número de variáveis inteiras para o caso sob incerteza caso fosse utilizada.

9.1 Modelo de oferta por quantidade

A idéia básica do modelo apresentado em [96] é considerar o preço de oferta $\lambda = 0$, e otimizar somente a quantidade ofertada, E . Neste caso, o aumento da remuneração líquida do agente resulta da restrição de oferta. Embora a quantidade de energia total (MWh) a ser remunerada seja menor, o preço spot será maior, resultando numa remuneração total mais elevada. O modelo de oferta por quantidade é representado como:

$$\text{Max} \quad R(E) = \pi_d E \quad (\text{A.1})$$

sujeito a

$$E \leq \bar{E} \quad (\text{A.1a})$$

Como a quantidade E é oferecida a preço nulo, ela é automaticamente despachada. Portanto, a informação que vem do despacho de mínimo custo é apenas o preço *spot* π_d :

$$z(E) = \text{Min} \quad \sum_{j=1}^J c_j g_j \quad (\text{A.2})$$

sujeito a

variável dual

$$\sum_{j=1}^J g_j = d - E \quad \pi_d \quad (\text{A.2a})$$

$$g_j \leq \bar{g}_j \quad \pi_{gj} \quad (\text{A.2b})$$

A Figura 9-1 mostra o custo operativo z em função da energia ofertada E . Como o despacho de mínimo custo é um problema de programação linear, $z(E)$ corresponde à parametrização da solução ótima em função do lado direito da restrição (A.2a). Da

teoria de programação linear, sabemos que $z(E)$ é uma função linear por partes, parametrizada pelo “lado direito” (RHS) da restrição (A.2a).

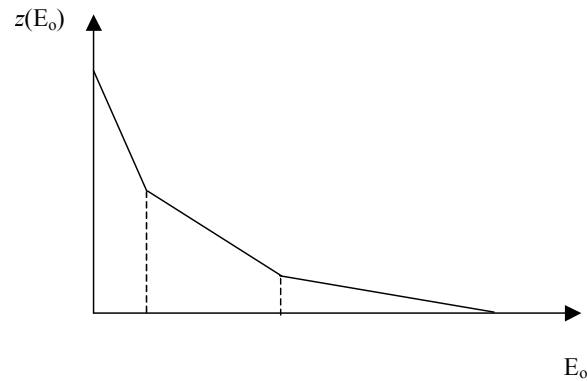


Figura 9-1 – Custo operacional em função da energia ofertada

A Figura 9-2 mostra a variação dos preços *spot* π_d com a quantidade ofertada. Como visto, o preço *spot* é o custo do último gerador despachado, o gerador marginal. Portanto, os patamares da curva correspondem às inclinações dos segmentos da função linear por partes da Figura 9-1.

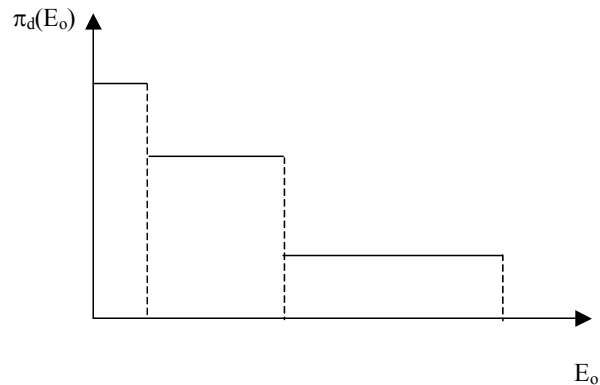


Figura 9-2 – Preço spot versus quantidade ofertada

Finalmente, a Figura 9-3 mostra a remuneração do gerador em função da quantidade ofertada. Dado que $R(E) = \pi_d(E) \times E$, isto corresponde a multiplicar os patamares de preço da Figura 9-2 pela respectiva quantidade.

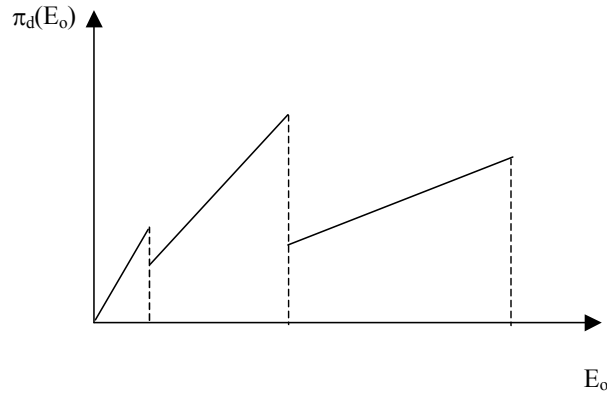


Figura 9-3 – Remuneração versus quantidade ofertada

Observa-se na Figura 9-3 que a remuneração do agente, $R(E)$, é uma função descontínua, não convexa e composta de segmentos lineares. Esta é a função que todos os modelos desta tese busca otimizar.

Como mostrado em [96], esta função pode ser representada por um modelo de programação linear inteira, resultando no seguinte problema de oferta:

$$\text{Max} \quad \sum_{k=1}^K \pi_{dk} \times E_k \quad (\text{A.3})$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^K E_k \leq \bar{E} \quad (\text{A.3a})$$

$$\Delta_{k-1} x_k \leq E_k \leq \Delta_k x_k \quad (\text{A.3b})$$

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1 \quad (\text{A.3c})$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad (\text{A.3d})$$

A idéia básica é associar cada preço *spot* π_{dk} , $k = 1, \dots, K$, a uma variável de oferta de quantidade de energia, E_k , restrita a um intervalo $[\Delta_{k-1}, \Delta_k]$. A função objetivo (A.3) representa a remuneração do gerador, e a restrição (A.3b) representa o intervalo de validade de cada preço *spot*. As variáveis inteiras $\{x_k\}$ definem se E_k é igual a zero, ou diferente de zero. Finalmente, a restrição (A.3c) determina que somente uma das variáveis E_k pode ser diferente de zero.

Observa-se, entretanto, que caso o problema de oferta sob incerteza seja resolvido com o modelo anterior, o número de variáveis inteiras do Problema (A.3) será igual a $K \times S$,

onde S é o número de cenários considerado. Como o esforço computacional dos algoritmos de programação inteira mista aumenta muito rapidamente com o número de variáveis inteiras, conclui-se que a resolução direta do mesmo seria inviável, mesmo para um número moderado de cenários. A abordagem apresentada nesta tese é, portanto, uma alternativa à essa dificuldade.

10 Anexo B – Modelo de Fluxo de Potência Linearizado

10.1 Modelo Básico

O modelo de fluxo de potência linearizado é composto de dois conjuntos de equações, que representam as leis de Kirchhoff [71].

Primeira lei de Kirchhoff

A primeira lei representa o balanço de produção e consumo em cada barra da rede elétrica (por simplicidade de notação, supõe-se que há somente um gerador em cada barra):

$$\sum_{k \in \Omega_i} f_k + g_i = d_i \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

onde:

i indexa as barras do sistema (n número de barras)

Ω_i conjunto de circuitos diretamente conectados à barra i

O conjunto de equações (A.1) é representado em termos matriciais como:

$$Sf + g = d \quad (\text{B.2})$$

onde:

S matriz de incidência $n \times m$ que representa as ligações entre barras e circuitos: a coluna k da matriz S tem zeros em todas as posições, exceto nas que correspondem às barras terminais do circuito k , i_k e j_k

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ +1 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{barra "DE", } i_k \\ \\ \\ \leftarrow \text{barra "PARA", } j_k \end{array}$$

f vetor m -dimensional de fluxos nos circuitos

g vetor n -dimensional de gerações

d vetor n -dimensional de demandas

Segunda lei de Kirchhoff

Por sua vez, a segunda lei de Kirchhoff é dada por:

$$f_k = \gamma_k (\theta(i_k) - \theta(j_k)) \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (\text{B.3})$$

onde:

γ_k susceptância do circuito

$\theta(i_k)$ ângulo de tensão na barra “DE”, i_k

$\theta(j_k)$ ângulo de tensão na barra “PARA”, j_k

Em termos matriciais, o conjunto de equações (B.3) torna-se:

$$f = \gamma S' \theta \quad (\text{B.4})$$

onde:

γ matriz diagonal $m \times m$ que contém as susceptâncias dos circuitos

S' matriz $m \times n$ que é a transposta da matriz de incidência S

θ vetor n -dimensional de ângulos de tensão

10.2 Despacho Econômico com Restrições de Transmissão

O despacho com restrições de transmissão é representado como o seguinte problema de otimização:

$$z = \text{Min } c'g \quad (\text{B.5-a})$$

sujeito a

$$Sf + g = d \quad (\text{B.5-b})$$

$$f - \gamma S' \theta = 0 \quad (\text{B.5-c})$$

$$-\bar{f} \leq f \leq \bar{f} \quad (\text{B.5-d})$$

$$g \leq \bar{g} \quad (\text{B.5-e})$$

onde:

z	custo total do despacho
c'	vetor linha n -dimensional de custos variáveis de geração
g	vetor n -dimensional de produções de energia
d	vetor n -dimensional de consumos de energia
f	vetor m -dimensional de fluxo nos circuitos
θ	vetor n -dimensional de ângulos de tensão
γ	matriz diagonal $m \times m$ que contém as susceptâncias dos circuitos
S'	matriz $m \times n$ que é a transposta da matriz de incidência S
$\bar{f}$	vetor m -dimensional de limites de fluxo nos circuitos
$\bar{g}$	vetor n -dimensional de limites de geração

O despacho com restrições de transmissão (B.5) é um problema de programação linear (PL) que pode ser resolvido por pacotes comerciais. Observe, entretanto, que há três tipos de variáveis de decisão, dadas pelos vetores g , θ e f . Em um sistema típico, haveria uma centena de geradores. Entretanto, o número tanto de barras como de circuitos pode ser dez vezes maior. Em [61] mostra-se que o esforço computacional pode ser substancialmente reduzido reescrevendo o problema somente em termos do vetor de gerações g .

11 ANEXO C – MODELOS COMPLETOS DAS EXTENSÕES DO CAPÍTULO 4

11.1 Introdução

O objetivo deste anexo é apresentar os modelos lineares-inteiros completos das extensões apresentadas no Capítulo 4 desta tese.

11.2 Representação de contratos a termo

A substituição de $\pi_{dt} \times g_{ij}$ por $\lambda_{ij} \times g_{ij}$, bem como a transformação do produto $\lambda_{ij} \times g_{ij}$ em restrições lineares inteiras através da discretização de λ_{ij} , são idênticos ao caso apresentado na seção 2.2 do Capítulo 2.

O produto de variáveis adicional do modelo de oferta com contratos, $\pi_{dt} \times E_c$, também será transformado em restrições lineares inteiras através da discretização de E_c em variáveis binárias:

$$E_c = \underline{E}_c + \Delta_E \sum_{k=0}^K 2^k q_k \quad (C.1)$$

onde:

$$\Delta_E = (\bar{E}_c - \underline{E}_c)/L$$

K maior inteiro tal que $2^K \leq L$

q_k variável binária

O procedimento é análogo ao do caso anterior. Multiplicando ambos os lados de (4.10) por π_{dt} , obtém-se:

$$\pi_{dt} E_c = \pi_{dt} \underline{E}_c + \Delta_E \sum_{k=0}^K 2^k z_t^k \quad (C.2)$$

onde:

$$z_t^k = \pi_{dt} q_k \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad k = 1, \dots, K \quad (C.3)$$

Tal como no Capítulo 2, a relação entre z_t^k e q_k é modelada por:

$$\text{Se } q_k = 0, \text{ então } z_t^k = 0; \text{ Se } q_k = 1, \text{ então } z_t^k = \pi_{dt} \quad (C.4)$$

Esta relação, por sua vez, é modelada como:

$$0 \leq \pi_{dt} - z_t^k \leq M(1 - q_k) \quad (C.5)$$

$$z_t^k \leq M q_k \quad (C.6)$$

Incorporando as transformações de variáveis e restrições discutidas acima ao modelo (4.9) do Capítulo 5, chega-se à formulação final:

$$\text{Max} \quad \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_{tj} g_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k - \pi_{gtj} \bar{g}_j - c_j g_{tj}] + [\pi_c E_c - \pi_{dt} E_c - \Delta_E \sum_{k=0}^K 2^k z_t^k] \right\}$$

sujeito a (C.7)

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad (C.7a)$$

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (C.7b)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj}^* \leq 0 \quad \text{para } j \in A \quad (C.7c)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A \quad (C.7d)$$

$$\sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_{tj} g_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k] + \sum_{j \notin A} \lambda_{tj}^* g_{tj} - \pi_{dt} d_t - \sum_{j=1}^J \pi_{gtj} \bar{g}_j = 0 \quad (C.7e)$$

$$\lambda_{tj} = \underline{\lambda}_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k x_{tjk} \quad \text{para } j \in A \quad (C.7f)$$

$$E_c = \underline{E}_c + \Delta_E \sum_{k=0}^K 2^k q_k \quad (C.7g)$$

$$0 \leq g_{tj} - y_{tj}^k \leq M(1 - x_{tjk}) \quad \text{para } j \in A \quad (C.7h)$$

$$y_{tj}^k \leq M x_{tjk} \quad \text{para } j \in A \quad (C.7i)$$

$$0 \leq \pi_{dt} - z_t^k \leq M(1 - q_k) \quad (C.7j)$$

$$z_t^k \leq M q_k \quad (C.7k)$$

$$E_c \leq \bar{g}_j \quad (C.7l)$$

para $t = 1, \dots, T$; $k = 1, \dots, K$

11.3 Representação de Contratos de Opções

O problema de representar contratos de opções apresentado no Capítulo 4 tem produtos de variáveis semelhantes ao problema de contratos, a saber: $\pi_{dt} \times g_{tj}$, $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ e $\pi_{dt} \times E_c$. Aplicando as mesmas transformações de variáveis da seção anterior, chega-se à formulação linear inteira:

$$\text{Max} \quad \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_{tj} g_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k - \pi_{gtj} \bar{g}_j - c_j g_{tj}] + [\pi_o E_o - P_{ot}] \right\}$$

sujeito a

(C.8)

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T$$

(C.8a)

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j \quad \text{para } j = 1, \dots, J$$

(C.8b)

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj}^* \leq 0 \quad \text{para } j \in A$$

(C.8c)

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A$$

(C.8d)

$$\sum_{j \in A} [\underline{\lambda}_{tj} g_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k] + \sum_{j \notin A} \lambda_{tj}^* g_{tj} - \pi_{dt} d_t - \sum_{j=1}^J \pi_{gtj} \bar{g}_j = 0$$

(C.8e)

$$\lambda_{tj} = \underline{\lambda}_{tj} + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^K 2^k x_{tjk} \quad \text{para } j \in A$$

(C.8f)

$$E_o = \underline{E}_o + \Delta_o \sum_{k=0}^K 2^k q_k$$

(C.8g)

$$0 \leq g_{tj} - y_{tj}^k \leq M(1 - x_{tjk}) \quad \text{para } j \in A$$

(C.8h)

$$y_{tj}^k \leq M x_{tjk} \quad \text{para } j \in A$$

(C.8i)

$$0 \leq \pi_{dt} - z_t^k \leq M(1 - q_k)$$

(C.8j)

$$z_t^k \leq M q_k$$

(C.8k)

$$P_{ot} \geq \pi_{dt} \underline{E}_o + \Delta_o \sum_{k=0}^K 2^k z_t^k - \pi_x E_o$$

(C.8l)

$$P_{ot} \geq 0$$

(C.8m)

$$E_o \leq \bar{g}_j$$

(C.8o)

$$\text{para } t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K$$

11.4 Representação de Decisões de Investimento

O problema de investimento (4.11) apresentado no Capítulo 4 tem dois grupos de produtos de variáveis iguais aos do problema de oferta de preços (4.6): $\pi_{dt} \times g_{tj}$ e $\lambda_{tj} \times g_{tj}$. Estes produtos serão tratados como nos casos anteriores: substituição de $\pi_{dt} \times g_{tj}$ por $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ e transformação do produto $\lambda_{tj} \times g_{tj}$ em restrições lineares inteiras através da discretização de λ_{tj} . Por sua vez, o produto de variáveis $\pi_{gtj} \times \bar{g}_j$ será transformado em restrições lineares inteiras através da discretização de $\bar{g}_j$ em variáveis binárias:

$$\bar{g}_j = \Delta_G \sum_{k=0}^K 2^k r_{jk} \quad \text{para } j \in A$$

(C.9)

onde:

$\Delta_E = \bar{g}_j/L$
 K maior inteiro tal que $2^K \leq L$
 r_{jk} variável binária

O procedimento é análogo ao dos casos anterior. Multiplicando ambos os lados de (C.9) por π_{gtj} , obtém-se:

$$\pi_{gtj} \bar{g}_j = \Delta_G \sum_{k=0}^K 2^k w_{tj}^k \quad \text{para } j \in A \quad (C.10)$$

onde:

$$w_{tj}^k = \pi_{gtj} r_{jk} \quad \text{para } j \in A; t = 1, \dots, T \quad k = 1, \dots, K \quad (C.11)$$

A relação entre w_{tj}^k e r_{jk} pode ser modelada por:

$$\text{Se } r_{jk} = 0, \text{ então } w_{tj}^k = 0; \text{ Se } r_{jk} = 1, \text{ então } w_{tj}^k = \pi_{gtj} \quad (C.12)$$

A relação (C.12), por sua vez, é modelada como:

$$0 \leq \pi_{gtj} - w_{tj}^k \leq M(1 - r_{jk}) \quad (C.13)$$

$$w_{tj}^k \leq M r_{jk} \quad (C.14)$$

Incorporando as transformações de variáveis e restrições discutidas acima ao modelo (4.11) do Capítulo 4, chega-se à formulação final:

$$\text{Max} \quad \sum_{t=1}^T \left\{ \sum_{j \in A} [\underline{\lambda} g_{tj} + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k - \Delta_G \sum_{k=0}^K 2^k w_{tj}^k - c_j g_{tj}] \right\} - \sum_{j \in A} \delta_j \times \bar{g}_j \quad (C.15)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad (C.15a)$$

$$g_{tj} - \bar{g}_j \leq 0 \quad \text{para } j \in A \quad (C.15b)$$

$$g_{tj} \leq \bar{g}_j^* \quad \text{para } j \notin A \quad (C.15c)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} - \lambda_{tj}^* \leq 0 \quad \text{para } j \in A \quad (C.15d)$$

$$\pi_{dt} + \pi_{gtj} \leq \lambda_{tj}^* \quad \text{para } j \notin A \quad (C.15e)$$

$$\sum_{j \in A} [\underline{\lambda} g_{tj} + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^K 2^k y_{tj}^k - \Delta_G \sum_{k=0}^K 2^k w_{tj}^k] - \pi_{dt} \times d_t + \sum_{j \notin A} [\lambda_{tj}^* \times g_{tj} - \pi_{gtj} \times \bar{g}_j^*] = 0 \quad (C.15f)$$

$$\lambda_{tj} = \underline{\lambda} + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^K 2^k x_{tjk} \quad \text{para } j \in A \quad (C.15g)$$

$$\bar{g}_j = \Delta_G \sum_{k=0}^K 2^k r_{jk} \quad \text{para } j \in A \quad (C.15h)$$

$$0 \leq g_{tj} - y_{tj}^k \leq M(1 - x_{tjk}) \quad \text{para } j \in A \quad (C.15i)$$

$$y_{tj}^k \leq M x_{tjk} \quad \text{para } j \in A \quad (C.15j)$$

$$0 \leq \pi_{gtj} - w_{tj}^k \leq M(1-r_{jk}) \text{ para } j \in A \quad (C.15k)$$

$$w_{tj}^k \leq M r_{jk} \quad \text{para } j \in A \quad (C.15l)$$

para $t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, K$

12 ANEXO D – COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS DE OFERTA DE PREÇO, DE QUANTIDADE E MISTOS (PREÇO/QUANTIDADE)

12.1 Introdução

O objetivo deste anexo é comparar empiricamente o desempenho entre os três modelos “clássicos” de estratégias de ofertas sob incerteza: o modelo de oferta “puras” de preço (utilizado no estudo de caso do Capítulo 5), o modelo de ofertas “puras” de quantidade e o modelo misto (oferta de preço combinada com oferta de quantidade).

Um aspecto interessante é observar a performance do modelo misto, onde duas variáveis são simultaneamente controladas pela empresa (preço e quantidade) em relação aos demais modelos, onde apenas uma variável é controlada (preço ou quantidade). Este tipo de comparação não é usualmente encontrada na literatura. Em [19] mostra-se que quando não há incerteza nas ofertas dos concorrentes, os modelos de oferta “pura” de preço ou quantidade são equivalentes na receita máxima a ser obtida pela empresa. Entretanto, isto não pode ser afirmado no caso sob incerteza e seria razoável esperar que o modelo misto seja mais apropriado em situações onde a incerteza está presente, pois teoricamente oferece mais flexibilidade ao ofertante.

Analisaremos a seguir os resultados da estratégia da empresa CESP (utilizada para o estudo de caso do Capítulo 5) em um estudo caso determinístico e estocástico. Para cada caso, serão analisados os resultados da empresa seguindo cada um dos três modelos e a performance computacional dos mesmos.

12.2 Modelos de oferta de preço, de quantidade e mista

O modelo base para as análises deste anexo é o modelo (5.5), que é o modelo misto de ofertas conjuntas de preço e quantidade sob incerteza. Como explicado no Capítulo 4, os demais modelos são subconjunto deste modelo misto, por exemplo:

- a) No modelo de oferta pura de quantidades, os preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são fixos em valores pré-determinados (usualmente zero) e apenas as quantidades ofertadas $\{E_j, j \in A\}$ são otimizadas.

- b) No modelo de oferta pura de preços, as quantidades ofertadas $\{E_j, j \in A\}$ são fixas em valores pré-determinados (usualmente iguais às capacidades máximas $\{\bar{g}_j\}$) e apenas os preços ofertados $\{\lambda_j, j \in A\}$ são otimizados.
- c) Nos modelos determinísticos, o numero de cenários é igual a 1.

Desta forma, a combinação dos subconjuntos (a)-(c) no modelo (5.5) fornecem os modelos utilizados para a análise de estratégias de ofertas “puras” de preço, de quantidade ou mistas e nos casos determinístico e sob incerteza.

12.3 Casos analisados

O mesmo sistema da CESP descrito no estudo de caso do Capítulo 5 foi utilizado para esta análise. Quando o modelo sob incerteza foi utilizado, os mesmos cenários utilizados naquele estudo de caso foram representados.

Para a discretização da expansão binária das variáveis de decisão, utilizou-se o seguinte critério: nos modelos de oferta “pura” de preços e misto foi utilizado $\lambda_{\min}(i) = \text{custo}(i)$ e $\lambda_{\max} = 2 * \text{custo}(i)$. Ou seja, cada usina i da empresa CESP oferta no mínimo seu custo de operação e no máximo o dobro deste valor. Nos modelos de oferta “pura” de quantidades e misto foi utilizado $E_{\min}(i) = 0$ e $E_{\max}(i) = \text{capacidade}(i)$. Ou seja, cada usina i da empresa CESP oferta capacidades que variam de zero até sua capacidade máxima.

Quando o tempo computacional do modelo misto (ofertas conjuntas de preço/quantidade) foi superior a 30 minutos, foi colocada uma opção de “abortar” o modelo quando este atingisse um tempo *total* de 1 hora (ou seja, 30 minutos adicionais de processamento) ou então quando o gap de otimalidade chegasse a 2% (o que acontecesse primeiro). Ou seja, ou o modelo inteiro encontra a solução ótima global em no máximo 30 minutos ou o mesmo é interrompido quando gap de otimalidade chegar a 2% ou o tempo computacional *total* exceder 1 hora.

O grau de discretização das variáveis da expansão binária foi de 64 valores para cada variável, preço e quantidade (M_1 e $M_2 = 64$). Esta discretização é distinta daquela utilizada no estudo de caso do Capítulo 5. A razão é que, como será visto a seguir, a

performance do modelo misto foi computacionalmente elevada e por esta razão decidiu-se reduzir o número de discretizações.

12.4 Resultados

12.4.1 Ofertas sob incerteza

12.4.1.1 Ofertas “puras” de preço

A Tabela a seguir apresenta, para o modelo de ofertas “puras” de preço sob incerteza, as ofertas de preço resultantes do modelo, os custos variáveis e as capacidades “ofertadas” pela empresa (que são iguais às capacidades máximas).

	Preço Ofertado (\$/MWh)	Custos(\$/MWh)	Capacidade (MWh)
I.SOLT.EQV.	358	279	4186
JAGUARI	204	163	30
JUPIA	224	224	1480
P.PRIMAVERA	177	177	1149
PARAIBUNA	45	23	76

Tabela 12-1 – Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de Preço

O lucro esperado da CESP foi de R\$ 538.2 mil, o tempo de execução do modelo foi de 78 s e o gap de dualidade foi de 0% (ou seja, estamos na solução ótima global).

12.4.1.2 Ofertas “puras” de quantidade

A Tabela a seguir apresenta, para o modelo de ofertas “puras” de quantidade sob incerteza, as ofertas de quantidade resultantes do modelo, as capacidades máximas das usinas e os custos variáveis (lembrando que a oferta de preço é nula neste caso).

	Capacidade Ofertada (MWh)	Capacidade (MWh)	Custos(\$/MWh)
I.SOLT.EQV.	2485	4186	279
JAGUARI	8	30	163
JUPIA	1480	1480	224
P.PRIMAVERA	1149	1149	177
PARAIBUNA	76	76	23

Tabela 12-2 – Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de quantidade

O lucro esperado da CESP foi de R\$517 mil, o tempo de execução do modelo foi 89 seg e o gap de dualidade foi 0% (estamos na solução ótima global).

12.4.1.3 Ofertas “conjuntas” de preço e quantidade

A Tabela a seguir apresenta, para o modelo de ofertas “misto” sob incerteza, as ofertas de preço e quantidade resultantes do modelo (5.5), os custos variáveis e as capacidades instaladas das usinas da empresa.

	Preço (\$/MWh)	Custos(\$/MWh)	Capacidade (MWh)	Capacidade (MWh)
I.SOLT.EQV.	366	279	2616	4186
JAGUARI	234	163	14	30
JUIA	224	224	1480	1480
P.PRIMAVERA	177	177	1113	1149
PARAIBUNA	45	23	76	76

Tabela 12-3 – Resultado: Modelo de Ofertas Mistas

O lucro esperado da CESP foi de R\$572.3 mil. O tempo de execução do modelo expirou os 30 minutos e 3600 segundos adicionais foram necessários para encontrar uma solução com um gap de 8%, ou seja, não estamos na solução ótima global.

12.4.1.4 Comparação entre os desempenhos de cada modelo

A Tabela abaixo apresenta, para cada tipo de modelo e para cada cenário simulado, o preço *spot* resultante.

Cenário ->	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ofertas de preços	346.0	238.0	357.5	357.5	238.0	383.0	371.0	357.5	357.5	352.0
ofertas de quantidades	246.0	237.0	361.0	352.0	237.0	385.0	385.0	500.0	335.0	325.0
modelo misto	346.0	238.0	366.2	366.2	238.0	385.0	385.0	500.0	366.2	361.0

Tabela 12-4 – Preço Spot em cada cenário (\$/MWh)

Por sua vez, a Tabela 12-5 abaixo apresenta o lucro esperado de cada empresa para cada um dos modelos simulados.

	Lucro Esperado (k\$)	Execução (s)
ofertas de preços	538.2	78
ofertas de quantidades	517.0	89
modelo misto	572.3	3600

Tabela 12-5 – Comparação entre os modelos

12.4.2 Ofertas determinísticas

Consideremos agora a ocorrência de um dos 10 cenários gerados estudados na seção anterior.

12.4.2.1 Ofertas “puras” de preço

A Tabela a seguir apresenta, para o modelo de ofertas “puras” de preço sob incerteza, as ofertas de preço resultantes do modelo, os custos variáveis e as capacidades “ofertadas” pela empresa (que são iguais às capacidades máximas).

	Preço Ofertado (\$/MWh)	Custos(\$/MWh)	Capacidade (MWh)
I.SOLT.EQV.	357.5	279.0	4186.0
JAGUARI	326.0	163.0	30.0
JUPIA	280.0	224.0	1480.0
P.PRIMAVERA	354.0	177.0	1149.0
PARAIBUNA	33.8	23.0	76.0

Tabela 12-6 - Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de Preço

O lucro da CESP foi de R\$ 619.7 mil e o tempo de execução de 0.2 seg. Esta é a solução ótima global.

12.4.2.2 Ofertas “puras” de quantidade

A Tabela a seguir apresenta, para o modelo de ofertas “puras” de quantidade sob incerteza, as ofertas de quantidade resultantes do modelo, as capacidades máximas das usinas e os custos variáveis (lembrando que a oferta de preço é nula neste caso).

	Capacidade Ofertada (MWh)	Capacidade (MWh)	Custos(\$/MWh)
I.SOLT.EQV.	2355	4186	279
JAGUARI	14	30	163
JUPIA	1480	1480	224
P.PRIMAVERA	1149	1149	177
PARAIBUNA	76	76	23

Tabela 12-7 – Resultado: Modelo de Ofertas “puras” de quantidade

O lucro da CESP foi de R\$ 635.7 mil e o tempo de execução de 15 seg. Esta é a solução ótima global.

12.4.2.3 Ofertas “combinadas” de preço/quantidade

A Tabela a seguir apresenta, para o modelo de ofertas “misto” sob incerteza, as ofertas de preço e quantidade resultantes do modelo (5.5), os custos variáveis e as capacidades instaladas das usinas da empresa.

	Preço (\$/MWh)	Custos(\$/MWh)	Capacidade (MWh)	Capacidade (MWh)
I.SOLT.EQV.	287.7	279	2355	4186
JAGUARI	264.9	163	14	30
JUPIA	357.0	224	1480	1480
P.PRIMAVERA	331.9	177	1149	1149
PARAIBUNA	46.0	23	76	76

Tabela 12-8 – Ofertas mistas

O lucro da CESP foi de R\$ 635.7 mil e o tempo de execução de 1200 segundos (além dos 30 minutos iniciais) e o gap final foi de 8%.

12.4.2.4 Comparação entre os desempenhos de cada modelo

A Tabela abaixo apresenta para cada tipo de modelo o preço *spot* resultante para o cenário simulado.

ofertas de preços	357.5
ofertas de quantidades	361.0
modelo misto	361.0

Tabela 12-9 – Preço Spot em cada cenário (\$/MWh)

Por sua vez, a Tabela 12-10 abaixo apresenta o lucro esperado da empresa.

	Lucro Esperado (k\$)	Execução (s)
ofertas de preços	619.8	1
ofertas de quantidades	635.7	14
modelo misto	635.7	1200

Tabela 12-10 – Comparação entre os modelos

12.5 Conclusões

No caso sob incerteza pode-se observar que o modelo que teve o melhor desempenho foi o modelo misto. Mesmo tendo sido interrompido (pelo limite de tempo computacional) e apresentando um gap da ordem de 8%, o resultado deste modelo foi bem superior do que os resultados tanto do modelo de ofertas “puras” de quantidade quanto do modelo de ofertas “puras” de preço. Isto mostra que a flexibilidade que o ofertante tem ao controlar duas variáveis ao invés de apenas uma é importante em contextos envolvendo incerteza. Também pudemos observar que, dentre os modelos de ofertas “puras” de preço ou quantidade, o modelo de ofertas “puras” de preços foi superior ao de quantidades no caso estocástico.

No caso determinístico, porém, o modelo de ofertas “puras” de quantidades levou vantagem sobre o modelo de ofertas “puras” de preços. O desempenho do modelo misto foi pelo menos tão bom quanto o modelo de ofertas “puras” de quantidade, pois atingiu o mesmo resultado, embora não tenha convergido.

Finalmente, um aspecto interessante é comparar o resultado teórico obtido em [19] com o empírico encontrado no exercício deste anexo. Enquanto em [19] mostra-se que quando não há incerteza nas ofertas dos concorrentes, os modelos de oferta “pura” de preço ou quantidade são equivalentes na receita máxima a ser obtida pela empresa, os resultados empíricos deste anexo apresentaram lucros distintos para a CESP entre estes modelos. A razão para a diferença entre as receitas deve-se à discretização adotada na expansão binária em ambos os casos, pois a “oferta” que fornece a equivalência entre os modelos não está sendo capturada com a discretização utilizada, fato que ilustra a desvantagem da utilização de modelos discretos.

O autor realizou experimentos com maiores discretizações para o modelo determinístico e os resultados de fato foram equivalentes para discretizações maiores.

13 ANEXO E – MODELAGEM DE MÚLTIPLOS GERADORES E FUNÇÕES GENÉRICAS DE CUSTOS OPERATIVOS NO MODELO DE EQUILÍBRIO DE NASH

13.1 Introdução

No modelo de Equilíbrio de *Nash* apresentado no Capítulo 6 assumiu-se que uma empresa era dona de apenas um gerador e que os custos de operação de cada gerador eram funções lineares ($c_i E_i$) da quantidade produzida E_i . O objetivo deste Anexo é estender a formulação do Capítulo 6 para o caso onde um agente possui varios geradores com diferentes custos operativos, incluindo custos de arranque.

13.2 Formulação geral do modelo

O problema consiste em, para cada alocação de energia g_i oriunda do despacho econômico, a empresa i decidir qual é o despacho de mínimo custo de seus geradores que atenda a esta meta de geração. Neste caso, o custo de operação torna-se uma função geral $f_i(g_i)$, definida como:

$$f_i(g_i) = \text{Min} \sum_{r=1}^R c_{ri} q_{ri} + \sum_{r=1}^R \delta_{ri} \varphi_{ri}$$

sujeito a (E.1)

$$\sum_{r=1}^R q_{ri} = g_i \quad \text{(E.1a)}$$

$$q_{ri} - \bar{q}_{ri} \varphi_{ri} \leq 0 \quad \text{para } r = 1, \dots, R \quad \text{(E.1b)}$$

$$\varphi_{ri} \in \{0, 1\} \quad \text{(E.1c)}$$

onde:

r indexa os geradores da empresa i (R é o numero de geradores); note que estes geradores *não* precisam ser explicitamente representados no despacho econômico (pode-se trabalhar só com o montante total da empresa)

c_{ri} Custo de operação variável do r -ésimo gerador da empresa i (\$/MWh)

q_{ri} Energia produzida pelo r -ésimo gerador da empresa i (MWh)

δ_{ri} Custo de partida (“start up”) do r -ésimo gerador da empresa i (\$)

φ_{ri} Variável binária que representa a decisão de partida do r -ésimo gerador da empresa i

A equação (E.1a) torna a geração total da empresa i igual à sua meta de geração alocada pelo despacho econômico. As restrições (E.1b) e (E.1c) representam respectivamente os limites de capacidade e decisões de “partida” dos geradores individualmente.

13.3 Modelando custos de múltiplas usinas: LHS do Equilíbrio de Nash

A formulação de múltiplos geradores de (E.1) é modelada nas restrições do LHS do Equilíbrio de Nash incorporando os termos da função objetivo de (E.1) na função objetivo de (6.12) – (6.14):

$$(\underline{\lambda}_1 g_1^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{k1}^e) - (\pi_{g1} \underline{E}_1 + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{k1}^e) - \sum_{r=1}^R c_{r1} q_{r1}^e - \sum_{r=1}^R \delta_{r1} \varphi_{r1}^e \geq R_1^m \quad \forall m \quad (E.2)$$

...

$$(\underline{\lambda}_i g_i^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{ki}^e) - (\pi_{gi} \underline{E}_i + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{ki}^e) - \sum_{r=1}^R c_{ri} q_{ri}^e - \sum_{r=1}^R \delta_{ri} \varphi_{ri}^e \geq R_i^m \quad \forall m \quad (E.3)$$

...

$$(\underline{\lambda}_I g_I^e + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kI}^e) - (\pi_{gI} \underline{E}_I + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kI}^e) - \sum_{r=1}^R c_{rI} q_{rI}^e - \sum_{r=1}^R \delta_{rI} \varphi_{rI}^e \geq R_I^m \quad \forall m \quad (E.4)$$

e adicionando as restrições operativas (E.1a)-(c) em (6.15):

$$\sum_{i=1}^I g_i^e = d \quad (E.5a)$$

$$g_i^e - \underline{E}_i - \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{ki}^e \leq 0 \quad \forall i \quad (E.5b)$$

$$\pi_d^e + \pi_{gi}^e - \underline{\lambda}_i - \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{ki}^e \leq 0 \quad \forall i \quad (E.5c)$$

$$\pi_{gi}^e \leq 0 \quad \forall i \quad (E.5d)$$

$$\sum_{i=1}^I (\lambda_i g_i^e + \Delta_{\lambda} \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{ki}^e) - \pi_d^e d - \sum_{i=1}^I (\pi_{gi}^e E_i + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{ki}^e) = 0 \quad (E.5e)$$

$$0 \leq g_i^e - z_{ki}^e \leq G(1-x_{ki}^e) \quad \forall i; k=0, \dots, K_1 \quad (E.5f)$$

$$z_{ki}^e \leq G x_{ki}^e \quad \forall i; k=0, \dots, K_1 \quad (E.5g)$$

$$0 \leq \pi_{gi}^e - w_{ki}^e \leq \Pi_g(1-y_{ki}^e) \quad \forall i; k=0, \dots, K_2 \quad (E.5h)$$

$$0 \leq -w_{ki}^e \leq \Pi_g y_{ki}^e \quad \forall i; k=0, \dots, K_2 \quad (E.5i)$$

$$x_{ki}^e \in \{0,1\} \quad \forall i; k=0, \dots, K_1 \quad (E.5j)$$

$$y_{ki}^e \in \{0,1\} \quad \forall i; k=0, \dots, K_2 \quad (E.5k)$$

$$\sum_{r=1}^R q_{ri}^e = g_i^e \quad (E.5l)$$

$$q_{ri}^e - \bar{q}_{ri} \varphi_{ri}^e \leq 0 \quad r = 1, \dots, R \quad (E.5m)$$

$$\varphi_{ri}^e \in \{0,1\} \quad (E.5n)$$

onde (E.5a) –(E.5k) são as restrições (6.15a)-(6.15k) do LHS já apresentadas no Capítulo 6 e (E.5l) – (E.5n) são as restrições de custo operativo no equilíbrio, onde:

q_{ri}^e Energia produzida pelo r -ésimo gerador da empresa i quando todos os agentes ofertam os valores de equilíbrio (MWh)

φ_{ri}^e Variável binária que representa a decisão de partida quando todas as empresas ofertam os valores de equilíbrio

13.4 Modelando múltiplos custos operativos: RHS do Equilíbrio de Nash

O procedimento é similar ao caso anterior. Primeiramente incorporamos os termos da função objetivo de (E.1) na função objetivo de (6.18) – (6.20) e inserimos as restrições operativas (E.1a)-(E.1c) nas restrições (6.21) do RHS da formulação do Equilíbrio de Nash.

Isto significa que existem $I \times M^*$ conjuntos de restrições diferentes e cada conjunto é dado pelas restrições abaixo (mostra-se o conjunto de uma empresa i):

$$R_i^e \geq \pi_d^{mi} g_i^{mi} - \sum_{r=1}^R c_{ri} q_{ri}^{mi} - \sum_{r=1}^R \delta_{ri} \varphi_{ri}^{mi} \quad (E.6a)$$

$$g_i^{mi} + \sum_{n \neq i} g_n^{mi} = d \quad (E.6b)$$

$$g_i^{mi} \leq E_i^m \quad (E.6c)$$

$$g_n^{mi} - E_n - \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k y_{kn}^e \leq 0 \quad n \neq i \quad (E.6d)$$

$$\pi_d^{mi} + \pi_{gi}^{mi} \leq \lambda_i^m \quad (E.6e)$$

$$\pi_d^{mi} + \pi_{gn}^{mi} - \lambda_n - \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k x_{kn}^e \leq 0 \quad n \neq i \quad (E.6f)$$

$$\pi_{gn}^{mi} \leq 0 \quad \forall n \quad (E.6g)$$

$$\lambda_i^m g_i^{mi} + \sum_{n \neq i} (\lambda_n g_n^{mi} + \Delta_\lambda \sum_{k=0}^{K_1} 2^k z_{kn}^{mi}) - \pi_d^{mi} d - \pi_{gi}^{mi} E_i^m - \sum_{n \neq i} (\pi_{gn}^{mi} E_n + \Delta_E \sum_{k=0}^{K_2} 2^k w_{kn}^{mi}) = 0 \quad (E.6h)$$

$$0 \leq g_n^{mi} - z_{kn}^{mi} \leq G(1 - x_{kn}^e) \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_1 \quad (E.6i)$$

$$z_{kn}^{mi} \leq G x_{kn}^e \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_1 \quad (E.6j)$$

$$0 \leq \pi_{gn}^{mi} - w_{kn}^{mi} \leq \Pi_g(1 - y_{kn}^e) \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_1 \quad (E.6k)$$

$$0 \leq -w_{kn}^{mi} \leq \Pi_g y_{kn}^e \quad n \neq i; k = 0, \dots, K_2 \quad (E.6l)$$

$$\sum_{r=1}^R q_{ri}^{mi} = g_i^{mi} \quad (E.6m)$$

$$q_{ri}^{mi} - \bar{q}_{ri} \varphi_{ri}^{mi} \leq 0 \quad r = 1, \dots, R \quad (E.6n)$$

$$\varphi_{ri}^{mie} \in \{0, 1\} \quad (E.6o)$$

onde (E.6a)–(E.6l) são as restrições (6.21a)–(6.15l) do RHS já apresentadas no Capítulo 6 e (E.6m) – (E.6o) são as restrições de custo operativo para cada discretização m .

13.5 Verificando a operação de mínimo custo no sistema com múltiplas usinas: LHS

Como as restrições que formam o Equilíbrio de *Nash* (E.5)-(E.6) não possuem (necessariamente) uma função objetivo, precisamos garantir que a produção das múltiplas usinas no equilíbrio será de fato solução de mínimo custo de (E.1).

Devido às restrições de desigualdade do tipo “ $\geq$ ”, sabemos que, quanto maior for o LHS, mais fácil será satisfazer as condições do Equilíbrio de *Nash*. Como a renda líquida *decrece* com o aumento dos custos operativos, concluímos que é mais fácil satisfazer o conjunto de restrições quando o custo operativo do LHS é menor. Em outras palavras, as variáveis dos custos operativos do LHS tendem a convergir para a solução de mínimo custo “automaticamente”.

13.6 Verificando a operação de mínimo custo no sistema com múltiplas usinas: RHS

Entretanto, observe que o oposto ocorre com o RHS: quanto menor for a renda líquida do RHS, mais fácil é satisfazer as restrições. Consequentemente, as variáveis operativas tendem a *divergir* da solução de mínimo custo e torna-se necessário evitar este desvio.

Nesta seção, mostraremos como garantir a otimalidade da operação de mínimo custo no RHS com múltiplas usinas. Por simplicidade de apresentação, vamos descrever inicialmente o modelo de Cournot, onde os geradores oferecem apenas quantidades. Em seguida descreveremos a metodologia geral que aplica-se tanto a ofertas de quantidade e preço.

13.6.1 Garantindo a operação de mínimo custo no RHS: modelo de Cournot

Como a oferta de preço λ_i no modelo de Cournot é nula, a quantidade total E_i ofertada pela empresa i é *sempre* despachada em sua totalidade no despacho econômico ($g_i = E_i$). Isto significa que a função de custo operativo f_i depende apenas da oferta E_i da empresa i :

$$f_i(E_i) = \text{Min} \sum_{r=1}^R c_{ri} q_{ri} + \sum_{r=1}^R \delta_{ri} \varphi_{ri}$$

sujeito a (E.7)

$$\sum_{r=1}^R q_{ri} = E_i \quad (E.7a)$$

$$q_{ri} - \bar{q}_{ri} \varphi_{ri} \leq 0 \quad \text{para } r = 1, \dots, R \quad (E.7b)$$

$$\varphi_{ri} \in \{0, 1\} \quad (E.7c)$$

Como o conjunto possível de ofertas no RHS para cada empresa i , $\{E_i^{mi}, m = 1, \dots, M_2\}$, é conhecido antecipadamente (afinal, são pontos discretos dentro de intervalos pré-especificados), a função de custo operativo do RHS para esta empresa também pode ser pré-calculada:

$$\{f_i^{mi}(E_i^{mi}), m = 1, \dots, M_2\} \quad (E.8)$$

onde cada $f_i^{mi}(E_i^{mi})$ é a solução de (E.7) para $E_i = E_i^{mi}$.

Como os valores de E_i^{mi} são pré-calculados, a otimalidade neste caso é automaticamente garantida. Substituindo (E.8) nas condições de equilíbrio (E.6), chegamos na expressão final:

$$R_i^e \geq \pi_d^{mi} g_i^{mi} - f_i^{mi} \quad m = 1, \dots, M_2 \quad (E.9)$$

13.6.2 Garantindo a operação de mínimo custo no RHS: caso geral

No caso geral, quando há ofertas simultâneas de preço e quantidade pelas empresas, a energia alocada para cada empresa i no despacho econômico (g_i), depende das ofertas de preço e quantidade de todas as outras empresas. Como consequência, não é possível saber “a priori” a energia despachada e o custo operativo não pode ser calculado por antecipação como feito no caso do modelo de Cournot.

Por facilidade de apresentação, vamos mostrar inicialmente a abordagem de solução proposta para um problema operativo puramente linear (sem custos de partida). Em seguida, as variáveis binárias devido aos os custos de partida serão incluídas.

O problema de operação linear é uma versão simplificada de (E.1), escrito como:

$$f(g) = \text{Min} \sum_{r=1}^R c_r q_r$$

sujeito a (E.10)

$$\sum_{r=1}^R q_r = g \quad (E.10a)$$

$$q_r \leq \bar{q}_r \quad r = 1, \dots, R \quad (E.10b)$$

Observe que, sem as restrições de custos de partida, a solução de (E.10) pode ser obtida despachando-se os geradores em ordem crescente de custo operativo de geração até a demanda ser atendida³³.

A abordagem de solução proposta consiste em, na presença de custos de partida, “forçar” esta condição de otimalidade usando o seguinte *conjunto de restrições*:

$$\sum_{r=1}^R q_r = g \quad (E.11a)$$

$$q_1 \leq \bar{q}_1 \quad (E.11b)$$

$$q_r \leq \bar{q}_r \eta_{r-1} \quad (E.11c)$$

$$\eta_{r-1} \leq q_{r-1} / \bar{q}_{r-1} \quad (E.11d)$$

$$\eta_{r-1} \in \{0, 1\} \quad (E.11e)$$

para $r = 2, \dots, R$

Observe que (E.11) garante o despacho econômico (em ordem crescente de custos): o gerador r só pode ser despachado ($q_r \neq 0$) após o gerador $r-1$ estar completamente despachado (note que $q_{r-1} = \bar{q}_{r-1}$ implica em $\eta_{r-1} \leq q_{r-1} / \bar{q}_{r-1} = \bar{q}_{r-1} / \bar{q}_{r-1} = 1$).

³³ Por simplicidade de notação, assumimos que os geradores já estão em ordem crescente de custo operativo variável, isto é, c_1 é o gerador mais barato e c_R o mais caro.

Portanto, esta relação pode ser incluída no RHS das condições de Equilíbrio de *Nash* (E.6).