

Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia
Curso de Engenharia Elétrica - Sistemas de Potência

Rodrigo de Mello Novaes

**Uma análise conceitual sobre a aplicação de modelos acaso-decisão,
decisão-acaso e valor esperado no planejamento energético.**

Juiz de Fora

2017

Rodrigo de Mello Novaes

**Uma análise conceitual sobre a aplicação de modelos acaso-decisão,
decisão-acaso e valor esperado no planejamento energético.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada
a Universidade Federal de Juiz de Fora, como
requisito parcial para obtenção do título de
engenheiro eletricista.

Orientador: Bruno Henriques Dias

Coorientador: Bernardo Vieira Bezerra

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Mello Novaes, Rodrigo.

Uma análise conceitual sobre a aplicação de modelos acaso-decisão, decisão-acaso e valor esperado no planejamento energético. / Rodrigo de Mello Novaes. – 2017.

104 f. : il.

Orientador: Bruno Henriques Dias

Coorientador: Bernardo Vieira Bezerra

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Curso de Engenharia Elétrica - Sistemas de Potência, 2017.

1. Planejamento energético. 2. Despacho hidrotérmico. 3. Programação estocástica. 4. Acaso-decisão. 5. Decisão-acaso. 6. Valor Esperado. I. Dias, Bruno Henriques. II. Bezerra, Bernardo Vieira. III. Título.

Rodrigo de Mello Novaes

**Uma análise conceitual sobre a aplicação de modelos acaso-decisão,
decisão-acaso e valor esperado no planejamento energético.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada
a Universidade Federal de Juiz de Fora, como
requisito parcial para obtenção do título de
engenheiro eletricitista.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Henriques Dias - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Bernardo Vieira Bezerra - Coorientador
PSR Soluções e Consultoria em Energia Ltda.

Professor Dr. André Luís Marques Marcato
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Carmen e Maurício, pelo carinho, suporte, incentivo e apoio durante toda a minha vida.

Aos meus irmãos, Igor e Leandro, pela torcida e incentivo durante diversos momentos e, em especial, na minha graduação.

Em memória dos meus avós, Ilka e Maurício, por todo carinho, pelo interesse e apoio nas minhas realizações.

Aos meus orientadores, Bruno Dias e Bernardo Bezerra, pela excelente orientação, pela amizade e, principalmente, pelas oportunidades oferecidas e desafios a mim atribuídos, essenciais para meu desenvolvimento.

Ao meu orientador, Bruno, por ter me apresentado a área de estudos em planejamento da operação, com a qual tive enorme identificação. Certamente é um grande prazer e muito divertido manter os estudos nesta linha de investigação.

Aos professores André Marcato, Rafael Brandi e Tales Pulinho pelas contribuições em meus estudos.

À Priscila Lino, pela grande oportunidade a mim oferecida na consultoria PSR, pela excelente supervisão e pela confiança em mim depositada.

Ao Luiz Augusto Barroso e ao meu orientador, Bernardo, pela segunda grande oportunidade oferecida na PSR.

Ao Mario Veiga Ferraz Pereira, pelo entusiasmo e importantes contribuições feitas no decorrer deste trabalho e para os desenvolvimentos futuros.

À todos os amigos da PSR, pela recepção amistosa, pelo incentivo, entusiasmo e valiosas contribuições feitas para este trabalho.

À todos os amigos da UFJF, pela amizade e "apoio mútuo" durante estes anos de graduação.

À minha prima, Anelise, à Jaqueline e à Mayara, por todo o auxílio durante minhas estadias no Rio de Janeiro.

Aos meus amigos e familiares pela torcida, apoio e pelos alegres momentos compartilhados.

"Remember that all models are wrong; the practical question is how wrong do they have to be to not be useful."

George Box

RESUMO

O problema de planejamento da operação hidrotérmica é um problema de programação estocástica multiestágios com recursão. A abordagem usual para resolver este tipo de problema é utilizar um conjunto finito de cenários, formando um problema de otimização de grandes dimensões, que é resolvido por técnicas de decomposição. Algumas destas técnicas aproximam a função de recursão por uma função linear por partes, neste contexto chamada de função de custo futuro. Uma vez que esta função foi construída, procede-se com diversas simulações para determinar a decisão do problema.

O objetivo é definir os montantes de geração para cada uma das usinas do sistema, com o fim de atender à demanda por energia da sociedade com o menor custo esperado e sem desrespeitar os limites operativos do sistema elétrico. Para tanto, existem modelos matemáticos de cálculo da função de custo futuro, cálculo da simulação final e determinação do despacho hidrotérmico. No primeiro, para alguns anos à frente, são utilizados modelos de programação estocástica, com soluções baseadas em técnicas amostrais. Na simulação final, para um mês à frente, e na determinação do despacho, em etapas semanais, utilizam-se resultados de simulações determinísticas com base em cenários esperados – esta é a abordagem do *valor esperado*.

Fundamentalmente, o problema do despacho hidrotérmico é a tomada de decisão sob incerteza. Isto é, deveria-se definir os montantes de geração sem o conhecimento das realizações das variáveis aleatórias, somente em posse de sua distribuição de probabilidades. Nesta direção, os modelos de otimização utilizados podem conter um erro conceitual, ao considerar que, a cada etapa temporal, são conhecidas as realizações das variáveis aleatórias – esta é a abordagem *acaso-decisão*.

Este trabalho investiga qual a implicação, nos custos de simulação, da determinação do despacho com base no cenário esperado, comparado-a com uma diferente abordagem da programação estocástica para a formulação do problema de otimização, que considera os diferentes cenários em um único problema – esta é a abordagem *decisão-acaso*, que trata o erro apontado no parágrafo anterior. É apresentada uma discussão inspirada em conceitos básicos da programação estocástica, juntamente com um estudo de caso que mostra o benefício da utilização do modelo estocástico e da correta representação das incertezas ou, em outras palavras, de construir um modelo matemático que represente o fenômeno físico tal qual ele realmente é.

Palavras-chave: Planejamento energético. Despacho hidrotérmico. Programação estocástica. Acaso-decisão. Decisão-acaso. Valor Esperado.

ABSTRACT

The long-term hydrothermal scheduling problem is a multistage stochastic program with recourse, also called energy planning problem. The common approach to solve this kind of problem is to use a finite set of scenarios, forming a large-scale mathematical programming problem which is solved by decomposition techniques. Some of those techniques approximate the recourse function by a piecewise linear function, called the cost-to-go function in energy planning. Once this function is built, we proceed with forward simulations in order to determine the problem's decision.

The goal is to define generation targets for each of the system's plants, in order to meet the society's energy demand with the lowest expected cost and attending the operational constraints. To accomplish this goal, several mathematical models are used to calculate the cost-to-go function, the forward simulations and to determine the hydrothermal dispatch. The first one uses stochastic programming, with a few years planning horizon, and its solutions are based on sampling and decomposition techniques. The final simulation, for a month ahead, and the determination of the dispatch, in weekly steps, on the other hand, are calculated using deterministic simulations based on expected scenarios – this is the *expected-value* approach.

Fundamentally, the hydrothermal dispatch problem is decision making under uncertainty. That is, one should define the generation targets before knowing the random variables realizations, and only in possession of their probability distribution. In this direction, the optimization models used could contain a conceptual error considering that, at each time step, the random variables realizations are assumed to be known – this is the *wait-and-see* approach.

This work investigates impacts on the simulation costs when the dispatch is determined based on the expected scenario, comparing it with an unusual (in energy planning) stochastic programming formulation that considers multiple scenarios in the problem formulation – this is the *here-and-now* approach, which handles the concern pointed out in the previous paragraph. A discussion inspired on basic concepts of stochastic programming is presented along the text and also a case study that shows the benefits of using the stochastic model and of correctly representating the uncertainties or, in other words, of building a mathematical model that honestly represents the physical phenomenon reality.

Key-words: Energy planning. Hydrothermal dispatch. Stochastic programming. Wait-and-see. Here-and-now. Expected value.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Dilema do Operador [Marcato, 2002].	19
Figura 2 – Funções de Custo em Sistemas Hidrotérmicos [Silva, 2012].	20
Figura 3 – FCF real vs. FCF aproximada pela PDE	37
Figura 4 – Árvore de cenários, a eventos independentes, para três etapas.	40
Figura 5 – FCF do estágio 2	43
Figura 6 – FCF do estágio 1	45
Figura 7 – FCF real vs. FCF aproximada pela PDDE	52
Figura 8 – Árvore de cenários, a eventos independentes, para três etapas.	58
Figura 9 – Árvore de cenários, a eventos independentes, para três etapas.	65
Figura 10 – Limites superior e inferior dos custos de simulação	66
Figura 11 – FCF do primeiro estágio: PDE <i>vs.</i> PDDE	66
Figura 12 – FCF do segundo estágio: PDE <i>vs.</i> PDDE	67
Figura 13 – Árvore do problema multi-etapas	71
Figura 14 – Exemplo didático: árvore de cenários de duas etapas	72
Figura 15 – Desigualdade de Jensen: análise na FCI	75
Figura 16 – Custo de se utilizar a solução do cenário médio	76
Figura 17 – Simulação final com base no cenário médio.	79
Figura 18 – Simulação final baseada na abordagem decisão-azar	80
Figura 19 – Série média das 4096 séries <i>forward</i>	90
Figura 20 – Esperança dos custos totais de simulação	91
Figura 21 – Comparação entre as políticas: AD <i>vs.</i> DA	92
Figura 22 – Esperança dos custos marginais de operação	93
Figura 23 – Esperança da trajetória de armazenamento do reservatório	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Elementos do planejamento da operação.	22
Tabela 2 – Elementos da otimização dinâmica estocástica.	32
Tabela 3 – Maldição da dimensionalidade	39
Tabela 4 – Dados da usina hidroelétrica	39
Tabela 5 – Dados das usinas termoeletricas	39
Tabela 6 – Cenários de afluência	40
Tabela 7 – Resultados do terceiro estágio	42
Tabela 8 – Resultados do segundo estágio	44
Tabela 9 – Séries <i>forward</i> - Simulação final	46
Tabela 10 – Simulação do primeiro estágio para a série 1	47
Tabela 11 – Simulação do segundo estágio para a série 1	47
Tabela 12 – Simulação do terceiro estágio para a série 1	48
Tabela 13 – Valores esperados da simulação final com três discretizações	48
Tabela 14 – Valores esperados da simulação final com cem discretizações	49
Tabela 15 – Resultados da simulação <i>forward</i> da iteração 2	62
Tabela 16 – Resultados parciais da recursão <i>backward</i> da iteração 2	62
Tabela 17 – Resultados parciais da recursão <i>backward</i> da iteração 2	63
Tabela 18 – Resultados da simulação <i>forward</i> da iteração 3	63
Tabela 19 – Resultados parciais da recursão <i>backward</i> da iteração 3	64
Tabela 20 – Resultados parciais da recursão <i>backward</i> da iteração 3	64
Tabela 21 – Valores esperados da simulação final com cem discretizações	67
Tabela 22 – Previsões de vazão natural afluente para o Sudeste. PMO de março de 2017.	69
Tabela 23 – Resultados da simulação com cenário médio - FCF AD com 3 discretizações	83
Tabela 24 – Custos das discretizações do terceiro estágio - FCF DA	84
Tabela 25 – Custos das discretizações do terceiro estágio - FCF DA	85
Tabela 26 – Simulação com PL aumentado - resultados para o PL 8	87
Tabela 27 – Simulação com PL aumentado - resultados para o PL 8	87
Tabela 28 – Simulação com PL aumentado - resultados para o PL 8	88
Tabela 29 – Dados das unidades termoeletricas	89
Tabela 30 – Custos totais - Simulação com média das afluências <i>vs.</i> Simulação DA	91
Tabela 31 – Esperança dos custos totais da simulação proposta - FCF AD <i>vs.</i> FCF DA	92

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AD	Acaso-decisão
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CEPEL	Centro de Pesquisas em Energia Elétrica
CF	Custo Futuro
CI	Custo Imediato
CMO	Custo Marginal da Operação
DA	Decisão-acaso
EPE	Empresa de Pesquisas Energéticas
FCI	Função de Custo Imediato
FCF	Função de Custo Futuro
FCT	Função de Custo Total
O&M	Operação e Manutenção
ONS	Operador Nacional do Sistema
PAR(p)	Periódico autorregressivo de ordem p
PDD	Programação Dinâmica Dual
PDE	Programação Dinâmica Estocástica
PDDE	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PLD	Preço de Liquidação de Diferenças
VE	Valor esperado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO	15
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2	O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA .	17
2.1	VISÃO GERAL	17
2.2	POLÍTICA E SIMULAÇÃO FINAL	22
2.3	PRINCIPAIS MODELOS UTILIZADOS NO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO	23
2.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
3	PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA E O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO	30
3.1	DISCUSSÃO QUALITATIVA	30
3.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	33
3.3	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA	36
3.3.1	Algoritmo para cálculo da política utilizando a PDE	38
3.3.2	Maldição da dimensionalidade	38
3.3.3	Exemplo tutorial	39
3.3.3.1	<i>Dados</i>	39
3.3.3.2	<i>Solução: cálculo da política</i>	40
3.3.3.3	<i>Solução: simulação final</i>	45
3.3.3.4	<i>Solução: comentários adicionais</i>	49
3.4	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL	49
3.4.1	Caso determinístico	50
3.4.1.1	<i>Construção da FCF</i>	53
3.4.2	Caso estocástico com eventos independentes	54
3.4.2.1	<i>Construção da FCF</i>	55
3.4.3	Algoritmo para cálculo da política utilizando a PDDE	57
3.4.4	Exemplo tutorial	58
3.4.4.1	<i>Solução: cálculo da política</i>	59
3.4.4.2	<i>Solução: simulação final</i>	67
4	ACASO-DECISÃO vs. DECISÃO-ACASO	68
4.1	CONTEXTUALIZAÇÃO: O DESPACHO HIDROTÉRMICO NO BRASIL	68
4.2	ABORDAGENS	69

4.3	FORMULAÇÃO	70
4.4	EXEMPLO DIDÁTICO DE DUAS ETAPAS	72
4.5	DESIGUALDADES FUNDAMENTAIS	74
4.6	IMPLEMENTAÇÃO	77
4.6.1	Simulação final com base no cenário médio	78
4.6.2	Simulação final com base na abordagem decisão-acaso	79
4.6.3	Cálculo da política utilizando a abordagem decisão-acaso	80
4.7	EXEMPLO TUTORIAL	81
4.7.1	Simulação com cenário médio utilizando a FCF AD	82
4.7.2	Cálculo da FCF DA	84
4.7.3	Simulação com PL aumentado utilizando a FCF DA	85
5	ESTUDO DE CASO	89
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	95
6.1	CONCLUSÃO	95
6.2	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	96
6.2.1	Alternativas para a determinação do despacho	97
6.2.2	Planejamento da operação com regras lineares	97
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

Sistemas elétricos de potência evoluíram, ao longo de vários anos, de pequenos sistemas destinados ao abastecimento local de pequenas áreas, ou para o atendimento exclusivo de determinadas indústrias, para sistemas de grandes proporções físicas, interconectados, com milhares de componentes, abastecendo diversos países e, em alguns casos, conectando continentes inteiros. Os sistemas elétricos estão, sem dúvidas, entre os maiores e mais complexos sistemas já projetados pelo homem [Seifi and Sepasian, 2011].

Tais sistemas são compostos, em termos gerais, por: unidades geradoras – hidroelétricas, termoelétricas, eólicas e solares, para citar os exemplos mais comuns – responsáveis pelo processo de conversão eletromecânica da energia potencial armazenada nas mais diversas fontes em eletricidade; sistemas de transmissão, cuja finalidade é conectar as unidades geradoras aos centros de consumo, interconectar regiões e que, por isto, é essencial para a capacidade de intercâmbio energético entre tais regiões; sistemas de distribuição, responsáveis por levar a energia elétrica à maioria dos consumidores finais.

No caso brasileiro, o parque gerador é composto, em sua maior parte, por geradores hidroelétricos e termoelétricos¹. Segundo dados recentes [EPE, a] a geração de energia hidroelétrica corresponde por 64% da demanda no país, enquanto que as fontes termoelétricas – incluindo a biomassa, que é considerada uma fonte renovável – correspondem por cerca de 32% da demanda.

A energia elétrica não possui um fim em si mesma, de modo que o objetivo de tais sistemas é proporcionar o amplo acesso à eletricidade para a sociedade, de modo a tornar possíveis diversas, ou quase a totalidade, de suas atividades cotidianas. Atualmente é muito difícil sequer imaginar alguma atividade que não esteja, de algum modo, relacionada à alguma demanda por energia elétrica. Naturalmente, sistemas de tamanha magnitude e importância, que configuram economias de escala e possuem uma relação íntima com o desenvolvimento econômico dos países, necessitam de constantes e intensas atividades de pesquisa por parte do setor privado e da academia para a solução de eventuais problemas e na recorrente busca pelo aperfeiçoamento e maior eficiência.

Nesta interminável busca pelo aperfeiçoamento, ao mesmo tempo que os sistemas devem ser operados² da melhor maneira possível no presente, deve-se elaborar diretrizes propícias para a utilização destes sistemas no futuro. À respeito destas diretrizes, especialistas do setor elétrico utilizam o termo *planejamento* referindo-se às atividades que tratam do futuro. No sentido estrito da palavra, planejar é estabelecer etapas, pro-

¹ Deve ser salientado, no entanto, a crescente penetração da geração eólica na matriz de energia elétrica do país.

² Em linhas gerais, para o presente contexto, operar o sistema elétrico é determinar e controlar os montantes de energia gerados e consumidos por toda a rede elétrica – isto é, o fluxo de energia – de modo a garantir a segurança da operação e o balanço entre geração e consumo.

cedimentos ou meios através dos quais pretende-se atingir um objetivo. Este trabalho tem por foco o *planejamento da operação sistemas hidrotérmicos*, isto é, serão discutidas as metodologias e aspectos sob alguns pontos de vista: da modelagem matemática, das incertezas envolvidas no problema, da implementação computacional e da avaliação das políticas construídas. O estudo destes tópicos e de todas as outras atividades ligadas ao planejamento de tais sistemas tem como fim estabelecer formas racionais para a utilização dos recursos disponíveis para a geração de energia elétrica, prezando pelo menor custo, pela segurança e maior eficiência.

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO

A motivação para este trabalho reside nas diferentes considerações feitas sobre as incertezas relacionadas ao problema de planejamento em suas diferentes etapas³. Se por um lado os modelos de médio-prazo se baseiam em um sólido arcabouço da programação estocástica, utilizando técnicas amostrais para a solução do problema, por outro o despacho hidrotérmico – no curto-prazo – é realizado com base em simulações determinísticas utilizando cenários esperados. Neste trabalho conjectura-se que esta diferença pode ser responsável por erros na determinação dos despachos e, por consequência, em toda a operação do sistema elétrico.

O objetivo é mostrar, através de análises e discussões conceituais, os efeitos nos custos de simulação quando da utilização de séries determinísticas para a determinação do despacho energético. Além disto, serão realizadas comparações quando utilizadas diferentes abordagens da programação estocástica para solucionar o problema do despacho. Deve-se considerar que, mesmo em horizontes semanais, existem incertezas relacionadas à previsão das vazões afluentes. Portanto, a principal contribuição deste trabalho é colocar em reflexão que os procedimentos atualmente utilizados para o cálculo da política e do despacho, rapidamente mencionados no parágrafo anterior, podem não resultar em uma boa solução para o problema e que, na realidade, podem contrariar a natureza da tomada de decisão sob incerteza. É proposta, em uma análise conceitual, uma abordagem metodológica para resolver o problema em um sistema de um único reservatório.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está organizado em seis capítulos. O capítulo 2 traz a visão geral sobre o problema de planejamento da operação hidrotérmica, apresentando importantes conceitos e também uma revisão bibliográfica acerca do tema.

No capítulo 3 são apresentadas as duas principais metodologias utilizadas na solução do problema tratado neste trabalho. Além de também consistir em uma revisão

³ Tal fato será discutido e esta afirmação será revisitada no capítulo 4.

metodológica, o objetivo ao escrever este capítulo foi desenvolver uma explicação didática utilizando exemplos tutoriais sobre os algoritmos e métodos matemáticos em questão.

No capítulo 4 está a contribuição deste trabalho. Começando com uma contextualização do despacho hidrotérmico brasileiro e passando pelas análises de diferentes metodologias da programação estocástica para tratar as incertezas do problema de planejamento. Neste capítulo há também um outro exemplo tutorial, desta vez tratando das implementações propostas.

O capítulo 5 traz um estudo de caso para quantificar as análises feitas no capítulo anterior.

Por fim, o capítulo 6 apresenta as principais conclusões e as direções para possíveis trabalhos futuros.

2 O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA

Este capítulo apresenta o problema de planejamento da operação de médio-prazo – ou planejamento energético – trazendo seus principais conceitos e contextualização no Brasil. Na seção 2.1 é feita introdução teórica sobre o problema. Na seção 2.2 é enfatizada a diferença entre as etapas de cálculo da política e da simulação final, detalhe importante neste trabalho. Na seção 2.3 são descritos, a título informativo e de revisão, os modelos oficiais utilizados no planejamento da operação no Brasil. Por fim a seção 2.4 traz uma revisão bibliográfica acerca do tema.

2.1 VISÃO GERAL

Em um sistema hidrotérmico, a finalidade do planejamento da operação é determinar uma estratégia ótima para a utilização da água armazenada nos reservatórios e combustíveis disponíveis, estabelecendo metas de geração para cada uma das unidades geradoras – hidroelétricas e termoeletricas – ao longo do período de planejamento, de modo a atender a demanda por energia, respeitando as restrições operativas do sistema e com o menor custo esperado possível. Esta é uma tarefa de considerável complexidade e importância, uma vez que:

- O problema é acoplado temporalmente. Toda e qualquer decisão operativa tem impactos futuros, uma vez que o uso de geração hidroelétrica no instante atual diminuirá o nível de armazenamento dos reservatórios, que poderiam ser solicitados no futuro.¹
- O problema é acoplado espacialmente. A operação de um determinado reservatório afeta todas as usinas a jusante.
- O problema a ser resolvido é essencialmente estocástico uma vez que, no momento da tomada de decisão, existem incertezas relacionadas às vazões afluentes aos reservatórios. Além disto, existem também incertezas relacionadas aos preços de combustíveis e à demanda por energia, por exemplo.
- O horizonte de tempo de estudo é de vários anos, havendo a necessidade de se decidir por estratégias de geração para períodos muito distantes do instante da tomada de decisão.

¹ Também pode-se destacar o fato de que a ocorrência de cheias ou secas numa determinada região exerce influência sobre as afluências futuras àquela região, devido às características físicas dos aquíferos [Bezerra, 2015]

- Existem custos indiretos² quando da utilização de geração hidroelétrica, conhecidos como Valor da Água. São custos de oportunidade, relacionados a deslocar temporalmente o despacho de uma unidade termoelétrica no futuro. Em outras palavras, pode-se utilizar água "gratuita" no presente para gerar energia, esvaziando os reservatórios e, possivelmente, criando uma necessidade futura de se utilizar a geração termoelétrica, mais cara.
- É necessário considerar os múltiplos usos da água – controle de cheias, irrigação, abastecimento urbano, pesca e navegação, por exemplo – na otimização das estratégias de planejamento [Kelman et al., 2004].
- Os sistemas tratados são complexos, com muitos reservatórios, unidades geradoras e equipamentos. Também são de grande escala, podendo chegar a dimensões continentais. Pela existência dos sistemas de transmissão, intercâmbios energéticos entre regiões distantes de um mesmo sistema são possíveis. Aliado às incertezas associadas às vazões afluentes, este fato sugere que a operação do sistema deve objetivar uma *otimização sistêmica* do uso dos recursos.
- A demanda por energia é crescente em nossa sociedade e intimamente ligada ao crescimento econômico.

Considerando o exposto acima, chega-se a uma relação de compromisso presente no momento da tomada de decisão, muito conhecido como o dilema do operador. Este compromisso consiste na decisão de qual será a participação de cada tipo de geração – por exemplo, termoelétrica ou hidroelétrica – para atender a demanda por energia, face às incertezas relacionadas ao futuro [Marcato, 2002]. Para ilustrar, seja a situação hipotética onde é necessário definir a estratégia de geração para um sistema composto por uma usina hidroelétrica com reservatório e uma usina termoelétrica, durante os meses de janeiro e fevereiro.

Se, em janeiro, a decisão for utilizar geração hidroelétrica, diminuindo a reserva de água, haverá duas possíveis situações futuras. Caso haja, em fevereiro, afluências suficientes para restabelecer os níveis de armazenamento, tornando possível a reutilização de geração hidroelétrica, a decisão tomada foi correta. No entanto, caso as afluências futuras não sejam suficientes para tal, será necessário atender grande parte (ou até mesmo a totalidade) da demanda por energia com geração termoelétrica, o que trará grandes despesas com combustível. Em um caso extremo, pode-se chegar à situação da demanda

² O custo direto de uma usina hidroelétrica é a soma dos custos variáveis de operação e manutenção (O&M), taxas ambientais e royalties pelo uso da água. No despacho hidrotérmico oficial realizado no Brasil estes custos não são considerados, porém aplica-se um limite inferior nos Preços de Liquidação de Diferenças (PLD) [Bezerra, 2015].

ser superior à capacidade do gerador termoeletrico, o que configuraria seu não suprimento, ou déficit de energia.

Por outro lado, se a decisão em janeiro for pelo uso de geração termoeletrica, mantendo a reserva de água, haverá outras duas possíveis situações futuras. Caso haja, em fevereiro, baixos níveis de afluências, a decisão tomada foi correta, tendo em vista que haverá água armazenada para se utilizar. Na contramão, caso haja altos níveis de afluência, a decisão tomada foi equivocada, uma vez que o reservatório pode não ter capacidade suficiente de armazenamento para toda a água disponível. Isto tornaria necessário o vertimento de água pela usina hidroelétrica que, nesta situação, caracteriza um desperdício de energia que poderia ser armazenada no caso de uma decisão mais adequada.

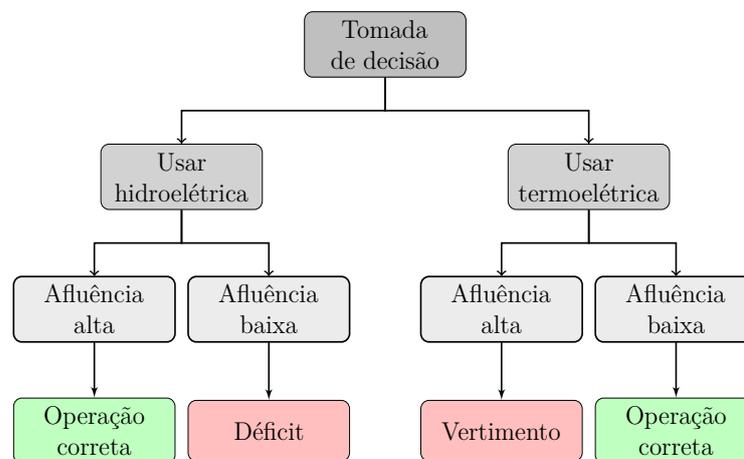


Figura 1 – Dilema do Operador [Marcato, 2002].

Do caso anterior é possível fazer mais algumas considerações. Sabendo que a condição final do sistema em janeiro é a inicial deste em fevereiro, suponha que se está no início do período de estudos – mês de janeiro. O custo de se atender à demanda por energia neste mês será mínimo ao se utilizar toda a geração hidroelétrica possível – diminuindo o armazenamento do reservatório. Este custo será máximo ao se utilizar toda a geração termoeletrica possível – poupando a água armazenada. Por outro lado, sob a ótica da operação futura, em fevereiro o custo mínimo será obtido ao se iniciar a operação com o reservatório cheio, e este custo cresce à medida que se diminui o volume de água armazenada. De forma objetiva, utilizar geração hidroelétrica em janeiro diminui os custos operativos deste mês, mas aumenta os custos de fevereiro. A recíproca é também verdadeira.

Diante disso, pode-se definir o Custo Imediato (CI), que é o custo da operação no presente momento - ou seja, o custo da geração utilizada no presente. A Função de Custo Imediata (FCI) representa estes custos. Também é possível definir o Custo Futuro (CF) que é o custo de se operar o sistema no futuro, por todo o horizonte de estudo restante. No entanto, como existem incertezas relacionadas ao futuro, este custo é calculado como

o valor esperado dos possíveis custos que podem existir futuramente, isto é, custos de O&M, combustível e custos de não suprimento da demanda (custo de déficit³). A Função de Custo Futuro (FCF) representa estes custos, relacionando o volume armazenado nos reservatórios a um custo esperado de se atender à demanda futura, condicionado a este volume armazenado.

Por fim, caso houvesse um acréscimo na demanda por energia, este teria como consequência direta um aumento equivalente na produção de algum gerador. O custo de se atender este acréscimo marginal da demanda é o chamado Custo Marginal da Operação (CMO)⁴.

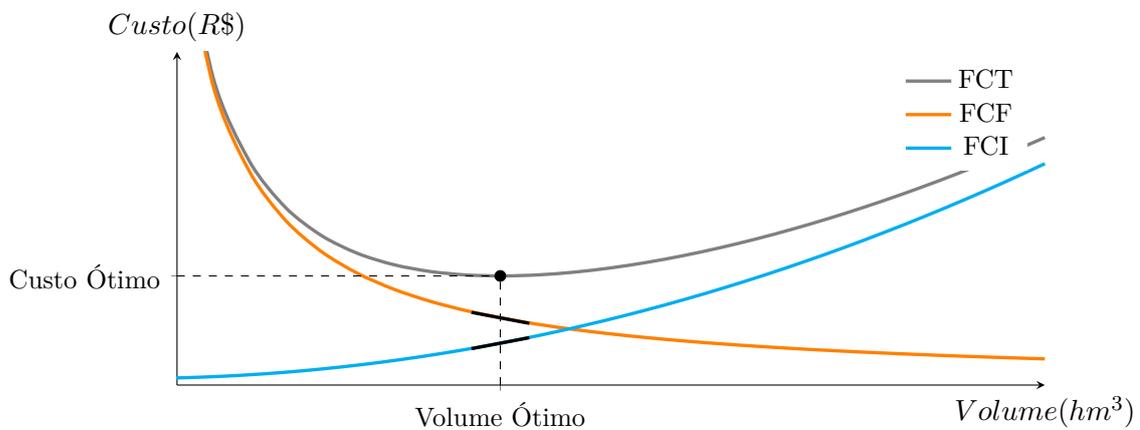


Figura 2 – Funções de Custo em Sistemas Hidrotérmicos [Silva, 2012].

De um modo mais formal, a FCF, pela natureza do problema, é monotonicamente decrescente com o volume armazenado. Já a FCI é monotonicamente crescente com o volume armazenado. A soma de ambas resulta na Função de Custo Total (FCT). Uma métrica usualmente utilizada na solução do problema de planejamento é obter o mínimo custo para a FCT. Este ponto é caracterizado pela derivada nula da função. De forma análoga, este ponto é também onde se obtém derivadas iguais em módulo, mas com sinais opostos, para a FCF e FCI. O valor destas derivadas constitui o Valor da Água, mencionado anteriormente [de Siqueira, 2003].

Devido à sua complexidade, o problema de planejamento é dividido em uma cadeia de procedimentos, onde cada etapa tem horizontes de tempo distintos, mas objetivos complementares. À medida que se diminui o horizonte de tempo, ou seja, que se aproxima da operação diária, diminui-se as incertezas relativas àquela etapa de planejamento e

³ Segundo [EPE, b], o valor do patamar único de custo de déficit, utilizado nos estudos de planejamento da operação energética, é de R\$ 4.000,00/MWh.

⁴ Atualmente, no Brasil, o CMO é limitado por um limite superior e um limite inferior, que constituem o Preço de Liquidação de Diferenças, já mencionado anteriormente. Os valores monetários destes limites são R\$ 533,82/MWh e R\$ 33,68/MWh, respectivamente [ANEEL, 2016].

aumenta-se o detalhamento da representação do sistema nos modelos matemáticos. Em uma ordem cronológica, tem-se as seguintes etapas[Dias, 2010, Marcato, 2002, Silva, 2012]:

1. Planejamento de médio-prazo: O horizonte é de cinco anos com etapas mensais. Aqui são feitas diversas simplificações na representação do sistema elétrico, como por exemplo a utilização de reservatórios equivalentes⁵ e produtividade constante para as unidades hidroelétricas. No entanto, há uma detalhada representação do processo estocástico referente às vazões afluentes, com o uso de modelos Periódicos Autorregressivos (PAR), para sua previsão [Maceira and Damázio, 2004, Maceira et al., 1987]. Também são representadas as trocas de energia entre os subsistemas equivalentes e suas limitações, previsões de demanda e cronograma de entrada de novas usinas. O produto final desta etapa é a FCF, que define o valor econômico da energia armazenada nos reservatórios e irá fornecer informações para a próxima etapa do planejamento.
2. Planejamento de curto-prazo: O horizonte é de um ano com etapas semanais. Há aqui uma representação individualizada das usinas – ou seja, estas não estão agregadas em reservatórios equivalentes como na etapa anterior – e mais detalhamento nos modelos matemáticos, como por exemplo a produtividade em função da altura de queda e a consideração de inflexibilidades de geração das unidades termoeletricas. Com base na FCF recebida do modelo de médio-prazo, aqui se estabelece a contribuição de cada unidade geradora para o despacho ótimo, alocando estas contribuições em etapas semanais para o primeiro mês e etapas mensais para os demais. Determina-se também a evolução temporal dos níveis de armazenamento dos reservatórios e os respectivos valores da água. O produto final desta etapa é uma nova FCF que traduza em níveis econômicos os volumes de água⁶ armazenados nos reservatórios e que também irá fornecer informações para a próxima etapa do planejamento.
3. Programação da operação: Esta cadeia de processos se encerra com a programação da operação e despacho do sistema. O horizonte é de uma semana com etapas horárias ou menores. Não se considera aqui a estocasticidade das vazões afluentes, podendo tratar as afluições como conhecidas no início do período em questão. A representação das usinas, entretanto, é bastante enriquecida com relação às etapas anteriores, afim de se produzir resultados condizentes com os limites operativos do sistema. Informações como faixas operativas das turbinas, tomada e alívio de carga,

⁵ Por ser de grande porte, a solução do problema de planejamento só foi possível durante muitos anos graças a algumas simplificações. Uma das principais é a utilização de reservatórios equivalentes, que agrega os reservatórios situados em locais com características hidrográficas similares em um reservatório equivalente, diminuindo a dimensão do problema a se resolver [Marcato, 2002].

⁶ Notar que, nesta etapa, a FCF valora os volumes de água armazenada e não de energia equivalente armazenada.

tempo de viagem da água, restrições de rampa das termoelétricas, equações de fluxo de potência, entre várias outras, são aqui consideradas. Com base nas informações da FCF fornecida pela etapa anterior, acrescidas das projeções diárias de demanda e afliência, tem-se o produto final desta etapa, que é a estratégia de despacho das unidades geradoras, associada aos custos marginais de operação.

Na Tabela 1 estão sintetizados os principais conceitos abordados até então.

Termo	Definição
Função de Custo Imediato (FCI)	Função matemática que relaciona o volume de água armazenada com um valor econômico de se atender a demanda no presente.
Função de Custo Futuro (FCF)	Função matemática que relaciona o volume de água armazenada com um valor econômico esperado de se atender à demanda futura.
Custo Marginal da Operação (CMO)	Custo de se atender um incremento na demanda por energia.
Valor da Água	No contexto de planejamento, é o custo indireto relacionado a se utilizar geração hidráulica, deslocando temporalmente o uso da geração termoelétrica, mais onerosa.
Reservatório equivalente	Simplificação utilizada no planejamento da operação de médio-prazo. Agrega usinas situadas em locais com características hidrográficas similares, criando reservatórios equivalentes de energia.
Usinas individualizadas	Representação desagregada das usinas do sistema hidrotérmico, com detalhes do acoplamento hidráulico e representações das vazões de forma individual.
Despacho	Determinação dos montantes de energia que devem ser entregues ao sistema por cada unidade geradora.

Tabela 1: Elementos do planejamento da operação.

2.2 POLÍTICA E SIMULAÇÃO FINAL

Calcular a política é construir a função de custo futuro(FCF). Tal cálculo é feito através de modelos de programação estocástica (PDE ou PDDE), que utilizam técnicas amostrais e de decomposição, por meio de simulações *forward* e recursões backward.

Já a simulação final é composta por diversas simulações *forward*, onde deve-se solucionar os problemas de programação linear (PLs) para cada uma das séries de afliência e, então, calcular estatísticas sobre as variáveis de interesse, como por exemplo geração termoelétrica, hidroelétrica, CMO, etc.

2.3 PRINCIPAIS MODELOS UTILIZADOS NO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO

As simulações da operação do sistema são parte importante do estudo de planejamento. Estas análises são realizadas por modelos computacionais de apoio à decisão, que auxiliam na verificação da adequação das estratégias planejadas no que diz respeito à otimalidade da solução, segurança operativa (limites de tensão e frequência, por exemplo), confiabilidade e também determinam os custos esperados de operação.

Todos os modelos citados a seguir foram desenvolvidos pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), do grupo Eletrobrás [Maceira et al., 2002].

Modelos da etapa de médio-prazo:

- **Newave:** Foi desenvolvido para o planejamento da operação de longo prazo. Calcula, para cada mês dos cinco (até dez) anos do horizonte de estudo, a contribuição ótima dos geradores hidroelétricos e termoeletrônicos para decisão que minimiza o custo esperado de operação. É utilizado um modelo a reservatórios equivalentes. A solução é obtida através da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), que será discutida no próximo capítulo. Com base em séries sintéticas de aflúências⁷, este modelo calcula índices importantes no tocante a operação do sistema, tais quais o risco de déficit, o valor esperado da energia não suprida, o valor esperado dos intercâmbios, valor esperado dos custos marginais e suas distribuições de probabilidade.
- **Gevazp :** É um modelo estocástico gerador de séries de aflúências mensais, que fornece informações para o Newave, Decomp e Suishi-o. Utiliza modelos PAR(p), sendo capaz de representar as características das séries históricas nas séries sintéticas criadas.
- **Suishi-o:** É um detalhado modelo a usinas individualizadas, para sistemas hidrotérmicos interconectados. É capaz de simular as conexões elétricas do sistema, porém considera as usinas desacopladas hidráulicamente. Considera restrições de múltiplos usos da água, tais como máxima vazão para controle de cheias e mínima vazão para navegabilidade ou irrigação. Pode ser acoplado ao modelo Newave, através da FCF, realizando a desagregação dos resultados obtidos naquele modelo. Simula séries de vazões multivariadas: aquelas observadas do histórico e aquelas geradas pelo modelo Gevazp, produzindo assim índices probabilísticos referentes à operação do sistema.

⁷ Uma série histórica de aflúências a uma usina é uma sequência de valores mensais de aflúência natural, correspondente à média dos valores instantâneos observados no posto fluviométrico. Uma série sintética de aflúências a uma usina é uma sequência de aflúências (mensais, semanais ou diárias) gerada por um modelo estocástico, com base nas séries históricas. No Brasil o primeiro ano do histórico é 1931 [Silva, 2012].

Modelos da etapa de curto-prazo:

- **Decomp:** Este é um modelo a usinas individualizadas, que determina o cronograma de geração para cada unidade geradora do sistema, de modo a suprir a demanda e minimizar o custo esperado de operação, em etapas semanais no primeiro mês e etapas mensais para os demais, levando em consideração o comportamento estocástico de longo termo das vazões afluentes. A solução é novamente obtida através da PDDE. O problema é resolvido de forma determinística para o primeiro mês – com apenas uma série de afluições, obtida do modelo Previvaz – e estocástica para os demais meses – com séries obtidas do modelo Gevazp.
- **Previvaz:** É um modelo estocástico gerador de séries de afluições semanais, que prevê até seis semanas à frente do período atual. Fornece informações para o modelo Decomp. O modelo analisa dados históricos, em etapas semanais, para cada usina do sistema e escolhe, para cada uma, o melhor modelo estocástico baseado no erro quadrático médio.
- **SPEC:** Uma cadeia de modelos para controle de cheias.
- **Confint:** Modelo utilizado nas análises de confiabilidade. O sistema é representado por um modelo linear de redes de fluxo, onde cada nó é um subsistema e os arcos – tratados como variáveis aleatórias – são a geração, demanda e intercâmbio de cada um dos subsistemas. Os índices de confiabilidade são calculados via integração ou Simulação de Monte Carlo. Este modelo também produz índices referentes à necessidade reforços na transmissão e geração.
- **Previcar:** Modelo de previsão de carga semanal ou mensal, para até doze meses à frente do período atual. As previsões são baseadas em séries históricas e em modelos de redes neurais.

Modelos da etapa de programação da operação:

- **Dessem:** Modelo desenvolvido para o despacho hidrotérmico. Calcula as metas de geração para cada meia hora da próxima semana, por meio de simulações determinísticas e levando em conta uma detalhada formulação do parque hidrotérmico. Um fluxo de potência linear representa a rede de transmissão. Este modelo aplica a Programação Dinâmica Dual (PDD) a um problema multiestágio, minimizando a soma dos custos imediato e futuro e calculando custos marginais para cada barra do sistema.
- **Pre desp:** Modelo que calcula o despacho da geração para cada meia hora do dia seguinte, levando em consideração as restrições hídricas dos reservatórios e também

as restrições associadas à representação da rede em corrente alternada. O programa minimiza a soma dos custos imediato e futuro, provendo custos marginais para cada barra do sistema. Como resultado se obtém as informações referentes aos reservatórios – volumes turbinados, vertidos e armazenados – e à rede elétrica – tensões nas barras, perfis de potência ativa e reativa, fluxos de corrente, etc.

- **Previvazh:** É um modelo estocástico gerador de séries de afluições diárias, que prevê até duas semanas à frente do período atual e que fornece informações para o modelo Dessem. A metodologia é baseada na desagregação das previsões semanais do modelo Previvaz, gerando sequências sintéticas diárias baseadas nas vazões observadas nos dois últimos dias. Este modelo preserva o caráter de dependência temporal dos modelos de previsão de longo prazo, adicionando as características particulares das vazões diárias, como a grande sazonalidade e assimetria.

2.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema do planejamento da operação hidrotérmica é objeto de constantes investigações e estudos com a finalidade do aprimoramento das metodologias matemáticas utilizadas.

Segundo Kligerman [1992], na década de 80 o planejamento da operação passou a perceber a necessidade de se representar os intercâmbios de energia entre os subsistemas das regiões sul/sudeste e, um pouco depois, das regiões norte/nordeste. À época não se dispunha de modelos capazes de representar tais interligações e também não se podia expandir o modelo baseado na Programação Dinâmica Estocástica (PDE), devido ao esforço computacional. Várias técnicas e proposições foram largamente investigadas para solucionar o problema. Dentre estas técnicas estavam a utilização de curvas-guia para o armazenamento, modelos iterativos de trocas de energia – o chamado modelo a equicusto –, a utilização de programação dinâmica amostral, dentre outros.

Nesta época [Pereira, 1989, Pereira and Pinto, 1991, 1985] utilizaram uma técnica iterativa baseada na *decomposição de Benders*, onde não há a necessidade de se discretizar o espaço de estados como na PDE. Isto tornou possível realizar a otimização estocástica de um sistema a múltiplos reservatórios, tratando o problema de forma analítica ao invés de enumeração, tal qual feito anteriormente. Este método foi chamado de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE). Presente nos cinco continentes, esta técnica é o estado da arte na solução de problemas de programação estocástica multiestágios, sendo utilizada em mais de 30 países incluindo América do Sul, América Central, América do Norte, Áustria, Espanha, Noruega, Turquia, Nova Zelândia e China [da Costa Jr., 2013]. Alguns autores compartilham um pouco da experiência e sucesso da aplicação desta metodologia em seus respectivos países, como [Maceira et al., 2008] no Brasil e [Gjelsvik et al., 2010] nos países nórdicos.

Desde sua criação, a PDDE obteve grande atenção de diversos pesquisadores e foi tema de muitas investigações. Em muitos trabalhos, a PDE também continua figurando dentre as metodologias investigadas e servindo como base de comparação de resultados. [Kligerman, 1992] mostrou uma comparação entre a utilização da PDDE e o modelo oficial da época, que utilizava um esquema com PDE e trocas de energia a equicusto, onde através da PDDE foi possível obter uma redução global nos custos de cerca de 18%.

Uma vez que o algoritmo da PDDE permite que vários cálculos sejam feitos de forma simultânea, [Finardi, 1999] apresentou a aplicação de processamento paralelo na solução do problema de planejamento da operação, tornando possível utilizar uma representação a usinas individualizadas, o que aumenta o detalhamento na representação do sistema hidrotérmico.

[Marcato, 2002] trouxe a discussão da representação híbrida do sistema elétrico, isto é, certas usinas continuariam sendo representadas através de sistemas equivalentes mas, ao mesmo tempo, outras usinas seriam representadas de forma individualizada. Em outras palavras, haveriam diversos sistemas equivalentes, onde alguns deles seriam compostos por uma única usina. Esta abordagem se mostrou extremamente vantajosa, uma vez que foi possível inserir maior detalhamento na representação de importantes usinas do sistema brasileiro, como Itaipu. Foi possível também separar usinas que se encontram sob regimes hidrológicos distintos – fato que, teoricamente, impossibilitaria sua agregação em um sistema equivalente em um primeiro momento – dentre outras vantagens.

Sabendo que a produtividade das usinas hidroelétricas é função direta do nível dos reservatórios, do nível do canal de fuga e que existem diversos fenômenos não-lineares relacionados aos reservatórios, [Ramos, 2011] realizou um estudo onde a etapa de simulação final era resolvida utilizando programação não-linear e um modelo a usinas individualizadas, sendo a política calculada através do modelo Newave. Com esta modificação já foi possível observar um aumento na trajetória de armazenamento e também uma diminuição na solicitação de geração termoelétrica no sistema elétrico brasileiro. Mais tarde, [Ramos, 2015] progrediu nesta mesma linha, desta vez incluindo as premissas citadas anteriormente no cálculo da política. Em tempo: a ideia geral deste trabalho foi aproximar a função de produtividade hidráulica dos reservatórios – não-linear e não convexa – por uma função convexa e linear por partes, utilizando o algoritmo *Convex-Hull*. Um sistema híbrido foi utilizado onde, durante a construção da FCF, uma parcela do parque gerador hidroelétrico era modelado utilizando estas funções de produtividade construídas.

Outros autores advogam pela representação das não-linearidades no problema de planejamento. Em diversos trabalhos, [Carneiro et al., 1990, Carvalho and Soares, 1987, Martinez and Soares, 2004, Zambelli et al., 2006, Zambelli and Soares, 2009, Zambelli et al., 2009, 2011], são levantadas as discussões do compromisso entre utilizar um modelo determinístico para as vazões afluentes (o que reduz o esforço computacional pela redução

dos cenários a se investigar) com maior detalhamento do sistema hidrotérmico – incluindo as não-linearidades do problema – ou utilizar um modelo estocástico para as vazões sem considerar tanto detalhamento na representação dos reservatórios – principalmente na função de produtividade das hidroelétricas e nos custos da geração termoelétrica. É importante ressaltar que esta relação de compromisso existe apenas pelas limitações computacionais de se utilizar um modelo estocástico, cuja solução se baseia em técnicas amostrais e onde são resolvidos diversos problemas de otimização, se cada um destes problemas for de grande complexidade. Em sua maioria, estes trabalhos utilizam fluxo de redes para solução dos problemas de otimização e um modelo de controle preditivo para a geração das séries determinísticas. Estudos foram feitos com sistemas de grande escala, como por exemplo os subsistemas sul e sudeste do Brasil, mostrando as vantagens do maior detalhamento do sistema.

Se não há dúvidas dos benefícios de um maior detalhamento na representação do parque hidrotérmico, a discussão entre a utilização de modelos estocásticos ou de seus equivalentes determinísticos, por outro lado, trouxe maiores discussões. [Bezerra, 2015, Neto et al., 1985] advogam que, no caso brasileiro, em virtude da não-linearidade dos custos de geração termoelétrica, a modelagem das vazões afluentes deve considerar a estocasticidade e utilizar modelos autorregressivos. Estes modelos para representação do processo estocástico das vazões são tratados, por exemplo, por [Maceira and Damázio, 2004, Maceira et al., 1987, Pereira et al., 1984].

Ainda sobre os modelos estocásticos utilizados para a representação das vazões afluentes, [Bezerra, 2015] traz a análise da consideração de incertezas nos próprios parâmetros do modelo autorregressivo utilizado. A justificativa para tanto é que tais modelos são construídos com base em dados históricos, um processo que implica em erros de estimação e que, portanto, cria a incerteza sobre qual modelo deve ser utilizado. Além do mais, o autor advoga que os modelos que não consideram a incerteza nos parâmetros tendem a ser otimistas.

Maiores investigações relacionadas à PDE também foram realizadas. Dias [2010] utilizou o algoritmo *Convex-Hull* para realizar o cálculo da FCF de um sistema com múltiplos reservatórios. Em linhas gerais, dada uma etapa do problema de planejamento, soluciona-se diversos problemas de otimização para diversas condições iniciais arbitradas em um primeiro momento – discretizações. Para cada uma destas condições iniciais obtém-se um custo associado, formando uma *malha* ou *grid* de pontos no espaço N-dimensional. A contribuição foi uma forma genérica de construir a FCF a partir deste grid, que não dependesse de suas dimensões. Esta aplicação foi realizada com sucesso, sendo o esforço computacional sua maior fraqueza. É válido lembrar que, antes da utilização da PDDE, a FCF era calculada utilizando a PDE e era construída através da combinação convexa dos vértices daquele *grid*.

Com o objetivo de diminuir os custos computacionais na solução do problema via PDE [da Silva, 2011] propôs um algoritmo que utiliza as restrições da FCF de forma seletiva, visto que um grande número de reservatórios implica em uma FCF com muitos segmentos. Isto é, uma vez que deve-se resolver diversos PLs em cada etapa, para construir o *grid* de *volumes vs. custo*, cada um dos problemas de otimização é resolvido com um subconjunto do conjunto de restrições. Uma lógica foi implementada para que, uma vez selecionado um subconjunto de restrições, este fosse mantido para os próximos PLs, a menos que a aproximação não atendesse à uma tolerância arbitrada. O processamento paralelo foi também utilizado para oferecer ganhos no tempo de solução.

Seguindo a linha de aprimoramentos nas técnicas, desta vez na PDDE, [de Matos et al., 2015] propõem e discutem interessantes alternativas para a obtenção de ganhos em tempo de solução. Foram propostas formas alternativas de se percorrer o conjunto de cenários amostrados, realizando a simulação *forward* e a recursão *backward* para cada cenário por vez, de forma serial. Outra proposição foi de aumentar, a cada iteração, o número de cenários percorridos, neste caso mantendo o esquema clássico de solução da PDDE. Outras investigações foram voltadas ao uso seletivo das restrições da FCF, o que os autores chamaram de dominância de nível N. Para cada nível um número N de restrições deveria ser armazenada em uma lógica que selecionava os segmentos da FCF que melhor representassem o custo futuro dos estados visitados.

Mais tarde [da Silva, 2016] trouxe outras duas contribuições. Utilizando a PDE, propôs uma metodologia capaz de realizar discretizações eficientes do espaço de estados, utilizando um critério de tolerância entre a aproximação obtida através destas discretizações e a FCF para encerrar o algoritmo. Em linhas gerais, como as maiores diferenças entre uma aproximação tangente – linear por partes – e a FCF real estão nos vértices desta aproximação (quando comparados à FCF real), utilizou-se o algoritmo de *Half-Space Intersection* para determinar quais são estes vértices e, então, criar novas restrições em torno dos vértices que oferecessem maiores benefícios para a aproximação da FCF. Sua segunda contribuição, inspirada nesta primeira, foi a proposição de um novo critério de convergência para a PDDE, um que pode ser utilizado no caso avesso a risco – isto é, com utilização do Conditional Value at Risk (CVaR). O critério se baseava em calcular os benefícios das restrições construídas com base em cada série *forward* e, caso este benefício fosse muito pequeno, o algoritmo era dado como encerrado. É uma técnica possível de ser utilizada, também, para a redução do conjunto de cenários investigados na PDDE.

Já a respeito da aversão ao risco, [da Costa Jr., 2013, Philpott et al., 2012, Shapiro, 2011] trouxeram discussões e proposições da incorporação de medidas de risco na solução da PDDE. Em particular, [da Costa Jr., 2013] mostrou como seria possível incorporar as restrições de aversão ao risco na própria formulação dos problemas de otimização de modo que ainda fosse possível utilizar a PDDE para sua solução. As restrições de risco envolvem

variáveis de decisão de diferentes cenários o que, a princípio, impediria sua solução através de métodos de decomposição – como a PDDE. No entanto, foi realizada a dualização da restrição de risco (através de relaxação Lagrangeana), o que possibilitou sua solução através daquele método.

[Thomé, 2013] tratou o problema da não convexidade relacionada à produtividade das usinas hidroelétricas através de duas maneiras: a primeira estratégia envolvia a solução de um problema utilizando relaxação Lagrangeana, cujas condições iniciais eram dadas pela solução prévia do problema com variáveis binárias fixas, de modo a obter restrições válidas para uma aproximação convexa da FCF do problema original. Já a outra abordagem envolvia uma modificação na formulação do problema, reescrevendo as partes não convexas como aproximações convexas: como funções lineares por partes ou através de uma mudança de variáveis que faz a produtividade uma função da própria energia armazenada.

Recentemente [Metello, 2016] apresentou uma alternativa para a representação intra-horária através da PDDE, calculando a Função de Custo Imediato de forma analítica e a representando através de um conjunto de hiperplanos - de forma semelhante ao que é feito para o custo futuro. Sua motivação residiu na grande penetração das *novas renováveis*, como solar e eólica, o que criou a necessidade de menores intervalos temporais na solução dos problemas de planejamento.

[Donohue and Birge, 2006, Philpott and Guan, 2008, Shapiro, 2011] discutem a convergência dos métodos de programação estocástica – dentre eles da PDDE. Em linhas gerais, o principal argumento sobre a *quase certa convergência* da PDDE é baseado na hipótese de que existe um número finito de realizações para a construção da FCF e na amostragem independente dos cenários – note que a utilização de modelos autorregressivos não anula esta afirmação.

[Maceira et al., 2002, Pereira et al., 1987] trazem um panorama sobre todas as etapas da cadeia de planejamento da operação de sistemas elétricos, com enfoque no caso brasileiro. [Pereira et al., 1987] faz um descritivo das metodologias computacionais utilizadas à época pelo CEPEL, discutindo desde a programação da operação diária até o planejamento da expansão do sistema elétrico, passando pelos problemas de suporte de reativo, confiabilidade, cálculo da política ótima para o longo prazo, dentre outros. Já [Maceira et al., 2002] traz uma revisão da cadeia de modelos computacionais oficiais utilizados no Brasil, contextualizando seu papel no atual modelo do setor elétrico brasileiro.

Por fim, mas não menos importante, [Rani and Moreira, 2010] traz uma cuidadosa revisão bibliográfica acerca do tema.

3 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA E O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO

Este capítulo traz uma revisão metodológica que abrange os dois principais métodos de solução para problemas de programação estocástica multi-estágio, quando aplicados no planejamento da operação hidrotérmica. Será feita uma breve discussão e revisão qualitativa sobre programação estocástica na seção 3.1. Em seguida, na seção 3.2, será formalizado matematicamente o problema de planejamento da operação hidrotérmica de médio-prazo, foco deste trabalho. Serão apresentadas duas ferramentas para a solução deste problema, sendo a Programação Dinâmica Estocástica(PDE) a primeira – seção 3.3. Por fim é desenvolvida, na seção 3.4, a discussão da Programação Dinâmica Dual Estocástica(PDDE), estado da arte para problemas de programação estocástica multiestágios. Para ambas as metodologias foram resolvidos exemplos tutoriais, com o intuito de tornar as discussões mais didáticas.

3.1 DISCUSSÃO QUALITATIVA

A necessidade de se tomar decisões face à incertezas está presente em diversas áreas do conhecimento. Estas decisões, por vezes, exercem impacto durante um grande período de tempo posterior à sua implementação. Especificamente no problema de planejamento da operação energética, as decisões são tomadas para problemas de otimização estocásticos, dinâmicos e multiestágio.

Isto significa que existem incertezas, ou seja, variáveis aleatórias relacionadas ao processo decisório (afluências futuras, preços de combustível e demanda por energia, por exemplo), que são informações exógenas ao modelo matemático; que o problema possui correlação temporal entre suas variáveis, ou seja, as condições operativas que o sistema pode assumir (estados, que neste caso são os níveis de armazenamento e afluências passadas¹) em um dado momento se relacionam com as condições passadas e influenciarão as condições futuras; e que, portanto, o problema deve ser resolvido por etapas, onde cada etapa é definida como um estágio do problema de otimização que, no planejamento de médio-prazo, corresponde ao período de um mês. A transição de um estágio para outro é feita através de uma equação de recursão, que relaciona o estado (consequência das decisões tomadas) em um estágio t aos estágios posteriores [Bezerra, 2015, Kligerman, 1992]. Também deve-se lembrar que existe o acoplamento hidráulico entre etapas subsequentes, isto é, o volume armazenado em uma etapa t é o inicial da etapa $t + 1$.

Outra definição comum nos estudos de planejamento é a política, que é um conjunto de decisões que relacionam o estado atual do sistema a possíveis estados futuros, mapeando-

¹ É importante destacar que, no desenvolvimento deste trabalho, apenas os volumes armazenados foram considerados como variáveis de estado.

os em decisões, associadas a seus respectivos custos. A política pode ser representada, por exemplo, através uma função que valora, a partir do estado em que o sistema se encontra, os custos futuros de operação. O objetivo dos estudos de planejamento é estabelecer a política ótima, isto é, definir a decisão ótima em cada estágio do problema, cujo custo associado contribua de forma ótima para o mínimo custo total. Em outras palavras, deseja-se construir uma função que valora os custos futuros da operação a partir do estado em que o sistema se encontra no presente estágio.

Isto só seria possível, em uma determinada etapa, havendo conhecimento das possíveis consequências operativas futuras, decorrentes da decisão tomada nesta etapa. Como decorrência direta deste raciocínio, haveria a necessidade de se conhecer, em tal etapa, as afluências que ocorreriam no futuro. Como não existe, a priori, este conhecimento, as etapas devem ser investigadas em sentido reverso no tempo, isto é, do futuro para o presente. Desta maneira, o "Princípio da Otimalidade de Bellman"[Bellman, 1954] é satisfeito.

A métrica usualmente utilizada para mensurar a qualidade da solução obtida é a mínima soma dos custos CI e CF, que já foram discutidos anteriormente. É possível também utilizar métricas de risco associadas à função objetivo do problema [da Costa Jr., 2013, da Silva, 2016, Philpott et al., 2012], como estipular níveis desejados que as variáveis de armazenamento devem atingir ao fim do horizonte de estudo, ao invés de unicamente minimizar o custo de operação.

A tabela 2 traz uma síntese destes conceitos, contextualizados para o caso do planejamento da operação hidrotérmica de médio-prazo.

Termo	Definição
Variável aleatória	Uma variável aleatória é uma função que associa elementos de um espaço amostral probabilístico a valores numéricos. Usualmente, apenas as afluências são tratadas como tal.
Estado	É a mínima informação conhecida e necessária no estágio t para tomada de decisão no estágio $t+1$. O estado é composto pelo armazenamento e pelas afluências passadas.
Estágio	É uma variável discreta que representa as etapas temporais do problema de otimização. No presente contexto, cada estágio corresponde a um mês.
Equação de recursão	Equação que acopla o estágio t aos estágios subsequentes.
Política	Conjunto de decisões viáveis que podem ser tomadas, a partir de um dado estado do sistema.
Objetivo	É a minimização dos custos associados à política adotada. Devido ao caráter estocástico deste problema, a minimização é realizada sobre o valor esperado ou sobre alguma métrica de risco associada a estes custos.

Tabela 2: Elementos da otimização dinâmica estocástica.

3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A formulação matemática para o problema de planejamento é apresentada nas equações de 3.2.1a até 3.2.1k.

$$\text{minimizar } \sum_{j \in \mathbf{J}} (gt_{j,t} \times ct_j) + def_t \times c_{def} + \frac{1}{1 + \beta} \times \alpha_t(va_{i,t}) \quad (3.2.1a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{i,t} + gt_{i,t} + def_t = d_t \quad (3.2.1b)$$

$$va_{i,t} + \left(vt_{i,t} + vv_{i,t} - \sum_{l \in \mathbf{L}} (vt_{l,t} + vv_{l,t}) \right) \times c_v = va_{i,t-1} + y_{i,t} \times c_v \quad (3.2.1c)$$

$$gh_{i,t} = \rho_i \times vt_{i,t} \quad (3.2.1d)$$

$$ut_{i,t} = vt_{i,t} + vv_{i,t} \quad (3.2.1e)$$

$$\alpha_t \geq \sum_{i \in \mathbf{I}} (a_{i,t}^k \times va_{i,t}) + b_t^k \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad (3.2.1f)$$

$$\underline{gt}_j \leq gt_{j,t} \leq \overline{gt}_j \quad (3.2.1g)$$

$$\underline{va}_i \leq va_{i,t} \leq \overline{va}_i \quad (3.2.1h)$$

$$\underline{vt}_i \leq vt_{i,t} \leq \overline{vt}_i \quad (3.2.1i)$$

$$\underline{vv}_i \leq vv_{i,t} \leq \overline{vv}_i \quad (3.2.1j)$$

$$\underline{ut}_i \leq ut_{i,t} \leq \overline{ut}_i \quad (3.2.1k)$$

$$\forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}, \forall t \in \mathbf{T}$$

onde:

I: conjunto de usinas hidroelétricas do sistema;

J: conjunto de usinas termoelétricas do sistema;

K: conjunto de restrições da FCF do estágio t ;

L: conjunto de usinas hidroelétricas imediatamente à montante da usina i ;

T: conjunto de estágios do problema;

i : índice referente às usinas hidroelétricas, que pertencem ao conjunto **I**;

j : índice referente às usinas termoelétricas, que pertencem ao conjunto **J**;

k : é o índice referente às restrições de custo futuro, que pertencem ao conjunto **K**;

l : índice referente às usinas à montante da usina i , que pertencem ao conjunto **L**;

t : índice referente aos estágios do problema;

c_v : fator de conversão² de $\frac{m^3}{s}$ para $\frac{hm^3}{mês}$;

² Este fator pode ser calculado multiplicando 1 $\frac{m^3}{s}$ pelo número de segundos em um mês, e

- $va_{i,t}$: volume armazenado da usina i ao final do estágio t [hm^3];
 $y_{i,t}$: volume afluyente à usina hidroelétrica i no estágio t [$\frac{m^3}{s}$];
 $vt_{i,t}$: volume turbinado pela usina i no estágio t [$\frac{m^3}{s}$];
 $vv_{i,t}$: volume vertido pela usina i no estágio t [$\frac{m^3}{s}$];
 $ut_{i,t}$: volume deplecionado pela usina i no estágio t [$\frac{m^3}{s}$];
 $gh_{i,t}$: geração de energia da usina hidroelétrica i no estágio t [\widetilde{MW}];
 $gt_{j,t}$: geração de energia da usina termoelétrica j no estágio t [\widetilde{MW}];
 \overline{va}_i : limite superior para o volume armazenado da usina hidroelétrica i [hm^3];
 \overline{vt}_i : limite superior para o volume turbinado pela usina hidroelétrica i [$\frac{m^3}{s}$];
 \overline{vv}_i : limite superior para o volume vertido pela usina hidroelétrica i [$\frac{m^3}{s}$];
 \overline{ut}_i : limite superior para o deplecionamento da usina hidroelétrica i [$\frac{m^3}{s}$];
 \overline{gt}_j : limite superior para a geração da usina termoelétrica j [\widetilde{MW}];
 \underline{va}_i : limite inferior para o volume armazenado da usina hidroelétrica i [hm^3];
 \underline{vt}_i : limite inferior para o volume turbinado da usina hidroelétrica i [$\frac{m^3}{s}$];
 \underline{vv}_i : limite inferior para o volume vertido da usina hidroelétrica i [$\frac{m^3}{s}$];
 \underline{ut}_i : limite inferior para o deplecionamento da usina hidroelétrica i [$\frac{m^3}{s}$];
 \underline{gt}_j : limite inferior para a geração da usina termoelétrica j [\widetilde{MW}];
 d_t : demanda por energia elétrica no estágio t [\widetilde{MW}];
 def_t : déficit de energia elétrica no estágio t [\widetilde{MW}];
 ct_j : custo de geração da usina termoelétrica j [$\frac{\$}{MW}$];
 c_{def} : custo do déficit [$\frac{\$}{MW}$];
 β : taxa de de atualização monetária;
 α : valor da FCF, que é o valor esperado do custo de operação do sistema, do estágio $t + 1$ até o fim do horizonte de estudo [\$];
 $a_{i,t}^k$: coeficiente de índice k da FCF para a usina hidroelétrica i , no estágio t [$\frac{\$}{hm^3}$];
 $b_{i,t}^k$: coeficiente de índice k da FCF para a usina hidroelétrica i , no estágio t [\$];
 ρ_i : produtibilidade da usina hidroelétrica i [$\frac{\widetilde{MW}}{m^3}$].

lembrando que $1 hm^3 = 10^{-6} m^3$. Adotando 30 dias para a duração do mês, o fator então é calculado como $1 \times 30 \times 24 \times 60 \times 60 \times 10^{-6} = 2,592$.

A equação (3.2.1a) é a função objetivo do problema, que é minimizar o valor esperado da soma dos custos imediato e futuro.

A equação (3.2.1b) representa o balanço de demanda do sistema, que garante a igualdade entre os montantes de energia elétrica produzida e demandada. Deve-se destacar que def_t é uma variável de folga do problema de otimização, diferente de zero apenas no caso onde não é possível atender toda a demanda por energia elétrica naquele estágio. Seu multiplicador dual é o CMO, mencionado anteriormente.

A equação (3.2.1c) representa o balanço hídrico da usina hidroelétrica i , garantindo a conservação de água nos reservatórios. Seu multiplicador dual é o valor da água, mencionado anteriormente.

A equação (3.2.1d) representa a geração de energia elétrica proveniente da usina hidroelétrica i . Neste trabalho, considerou-se produtividade constante, como em [Pereira, 1989, Pereira and Pinto, 1991]. No entanto, vários trabalhos investigaram os impactos de se modelar a produtividade como função do nível de armazenamento do reservatório [Ramos, 2015, Ramos et al., 2015, Zambelli et al., 2006, 2011].

A equação (3.2.1e) representa o deplecionamento total da usina hidroelétrica i . Esta representação é necessária em virtude da necessidade de se manter uma vazão mínima, para preservar o curso dos rios [Kelman et al., 2004, Marcato, 2002].

A equação (3.2.1f) representa o custo futuro de operação, que é o valor esperado dos custos operativos de todos os estágios à frente do estágio t , função do volume armazenado ao final deste estágio. Será mostrado adiante que a FCF pode ser modelada como uma função linear por partes [Martinez and Soares, 2004, Pereira and Pinto, 1991], formando um poliedro que, por definição, é convexo [Boyd and Vandenberghe, 2004]. Esta é a função utilizada para aproximar a equação de recursão do problema de planejamento.

As equações (3.2.1g) até (3.2.1k) representam os limites operativos das demais variáveis. No caso da geração termoeétrica, os limites podem ser constituídos por restrições operativas das usinas ou cláusulas contratuais, como por exemplo contratos *take-or-pay*.

Assim sendo, pode-se definir que, matematicamente, resolver o problema de planejamento da operação energética de médio-prazo de um sistema hidrotérmico é solucionar um problema de programação estocástica, cuja finalidade é determinar os volumes de água turbinada pelas usinas hidroelétricas e os montantes de geração termoeétrica, que serão necessários para atender à demanda por energia elétrica com o menor custo esperado. Tal solução deve respeitar limites operativos do sistema em questão. As estratégias de solução para este problema passam por técnicas de programação estocástica, apresentadas na próxima seção.

As técnicas de programação estocástica são capazes de fornecer soluções ótimas quando se considera um conjunto de cenários – cada qual relacionado à uma probabilidade

de ocorrência. Tais soluções não são ótimas quando se considera cada cenário de forma individual, mas sim ao se considerar o conjunto. Estas técnicas são aplicadas no planejamento da operação através de uma grande amostra de cenários equiprováveis, baseando-se na *Teoria dos Grandes Números* – a qual garante que se a amostragem for grande o suficiente, a média simples das realizações destes cenários se iguala ao valor esperado.

3.3 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA

A utilização da PDE foi possível a partir da agregação do sistema em um único reservatório equivalente. A PDE foi formulada por [Bellman, 1954] em meados dos anos 50, introduzida no planejamento da operação no Brasil em 1972 e incorporada aos modelos oficiais em 1979. À época, sua utilização foi responsável por uma redução de 28% nos custos operacionais do sistema interligado brasileiro, o que representou uma economia de US\$ 260 milhões em valores absolutos, no quinquênio de 1979 a 1984 [Kligerman, 1992].

A estratégia de solução é dividir o problema de otimização em estágios, que são visitados no sentido reverso do tempo, de modo a garantir a otimalidade da solução, como já foi discutido. Matematicamente pode-se dizer que se Ω^* é uma política ótima para o sistema, uma vez que este se encontra no estado x_0 no estágio t , para os estágios $t = t + 1 \dots T$, então esta mesma política Ω^* será ótima para o sistema, quando este se encontrar no estágio $t + 1$, com condição inicial x_0 , para os estágios $t = t + 2 \dots T$.

Como é necessário haver informação sobre as várias condições operativas que o sistema pode assumir, ou seja, pode-se verificar vários níveis de armazenamento, é necessário discretizar o espaço de estados e estudar cada um dos possíveis níveis de armazenamento separadamente. Ademais o problema é estocástico, e isto significa que, para cada estado do sistema, deve-se investigar as possíveis realizações de afluições futuras, que são condicionadas às suas respectivas probabilidades de ocorrência. De acordo com a formulação convencional, cada uma destas realizações irá contribuir com um custo de operação para aquele estado, e o custo efetivamente associado ao estado em questão será o custo esperado destas realizações.

O problema é então percorrido do último estágio, onde a FCF $\alpha_t(v_t)$ é assumida conhecida, e com valor nulo, em direção ao primeiro estágio – realiza-se uma recursão *backward*. A busca pela política ótima é realizada a cada etapa, visitando todos os possíveis estados que o sistema pode assumir. Na transição de um estágio t para o estágio $t - 1$, é passada a FCF $\alpha_{t-1}(v_{t-1})$, que é função dos volumes armazenados ao final do estágio $t - 1$, mas que foi construída com informações referentes aos custos de operação estágio t em diante.

É importante destacar que, no cálculo da política, ou seja, na etapa de construção da função α_t , os volumes armazenados ao final de um estágio t não são informações

necessárias para a solução do estágio $t + 1$, tendo em vista que o espaço de estados foi discretizado. Já na simulação final existe o acoplamento entre os volumes armazenados em estágios subsequentes.

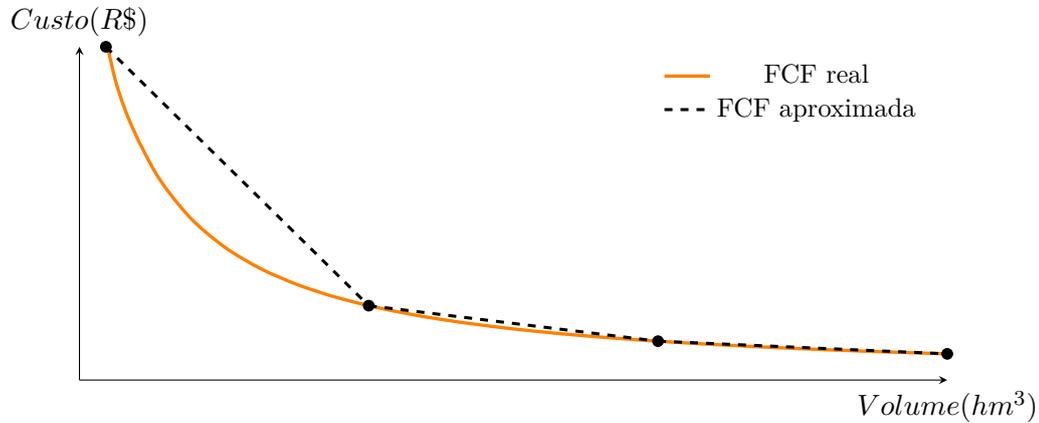


Figura 3 – FCF real vs. FCF aproximada pela PDE

Também deve-se mencionar que a construção da função α_t , utilizando a PDE, é feita neste trabalho através da interpolação dos valores esperados dos custos associados às discretizações, de modo que se obtém como resultado uma função linear por partes e que constitui uma aproximação *secante* da FCF real. A figura 3 ilustra como é o processo de construção da aproximação da FCF utilizando a PDE. Uma alternativa seria construir estas retas – hiperplanos, no caso geral – com base nos multiplicadores duais, criando uma aproximação *tangente* da FCF [da Silva, 2016]. Não é difícil perceber que a primeira pode superestimar os custos, enquanto a segunda pode subestimá-los caso as discretizações sejam insuficientes para uma boa representação.

O algoritmo 1 mostra como é feito o cálculo da política utilizando a PDE.

3.3.1 Algoritmo para cálculo da política utilizando a PDE

Algoritmo 1: POLÍTICA PDE (EVENTOS INDEPENDENTES E UM RESERVATÓRIO)

Entrada:

Seja $T \in \mathbf{T}$ o último estágio do horizonte de estudos.

Seja \mathbf{Y} o conjunto de afluições futuras possíveis.

Seja $y_t \in \mathbf{Y}$ uma possível afluição em um estágio t .

Seja p_{y_t} a probabilidade associada à afluição y_t .

Saída: Conjunto de funções $\alpha_t \forall t \in \mathbf{T}$

1 **início**

2 Enumere um conjunto \mathbf{V} de variáveis discretas, composto por $v_{i=1\dots N}$ volumes iniciais, onde N é o número de discretizações.

3 **para** $t = T, T - 1, \dots, 2$ **faça**

4 **para** cada $v_i \in \mathbf{V}$ **faça**

5 Inicialize $\tilde{\omega}_i = 0$

6 **para** cada $y_t \in \mathbf{Y}$ **faça**

7 Solucione o problema de otimização definido pelas equações (3.2.1a) até (3.2.1k), para a condição inicial v_i e y_t .

8 Seja ω o custo associado à solução obtida. Atualize o custo da discretização em questão: $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i + p_{y_t} \times \omega$

9 **fim**

10 **fim**

11 **para** cada $v_i \in \mathbf{V}$ **faça**

$$12 \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i & 1 \\ v_{i+1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i \\ \tilde{\omega}_{i+1} \end{bmatrix}$$

13 Adicione a equação $\alpha_{t-1} \geq a \times v_{a_{t-1}} + b$ ao conjunto das restrições de custo futuro do estágio $t - 1$.

14 **fim**

15 **fim**

16 **fim**

3.3.2 Maldição da dimensionalidade

Uma vez que a PDE é resolvida através da enumeração de possíveis estados que o sistema pode assumir, esta técnica tem a si associada o entrave do crescimento da dimensão do problema de otimização a medida que se aumenta o número de estados a serem investigados. Pela formulação do algoritmo 1, seja N o número de discretizações, T o número de estágios, R o número de reservatórios e Y o número de possíveis afluições em cada estágio. O total de problemas de programação linear (PLs) a serem resolvidos no

cálculo da política pode ser obtido através de $(N \times Y)^R \times T$. Para $N = 100$ discretizações, $Y = 10$ afluições e para apenas uma etapa do período de estudos, tem-se:

Reservatórios	PLs
1	$(100 \times 10)^1 \times 1 = 10^3$
2	$(100 \times 10)^2 \times 1 = 10^6$
3	$(100 \times 10)^3 \times 1 = 10^9$
4	$(100 \times 10)^4 \times 1 = 10^{12}$

Tabela 3: Maldição da dimensionalidade

3.3.3 Exemplo tutorial

3.3.3.1 Dados

Com o intuito de ilustrar a aplicação da PDE na construção da política e o cálculo da simulação final de um problema de planejamento da operação energética, será apresentado um caso exemplo [Finardi et al., 2013] resolvido em forma de um tutorial.

O sistema deste exemplo é constituído por uma usina hidroelétrica e quatro usinas termoelétricas, cujos dados estão nas tabelas 4 e 5. A carga a ser atendida é de $1000 \widetilde{MW}$ e o custo de déficit é $500,00 \frac{\$}{\widetilde{MW}}$.

Volume máximo [hm^3]	Volume mínimo [hm^3]	Turbinamento Máximo [hm^3]	Produtibilidade [$\frac{\widetilde{MW}}{hm^3}$]
4100,00	0,00	3888,00	0,3704

Tabela 4: Dados da usina hidroelétrica

Termoelétrica	Capacidade [\widetilde{MW}]	Custo [$\frac{\$}{\widetilde{MW}}$]
1	100	10
2	150	20
3	200	40
4	250	80

Tabela 5: Dados das usinas termoelétricas

A árvore de cenários utilizada neste exemplo é apresentada na figura 4. Como esta é uma árvore a eventos independentes, pode se realizar os cálculos da política apenas

para os dois cenários de cada etapa, os quais estão sumarizados na tabela 6 – já em $\frac{hm^3}{mês}$. Note que neste caso a vazão da primeira etapa é assumida como conhecida, porém poderiam haver dois cenários diferentes para a primeira etapa.

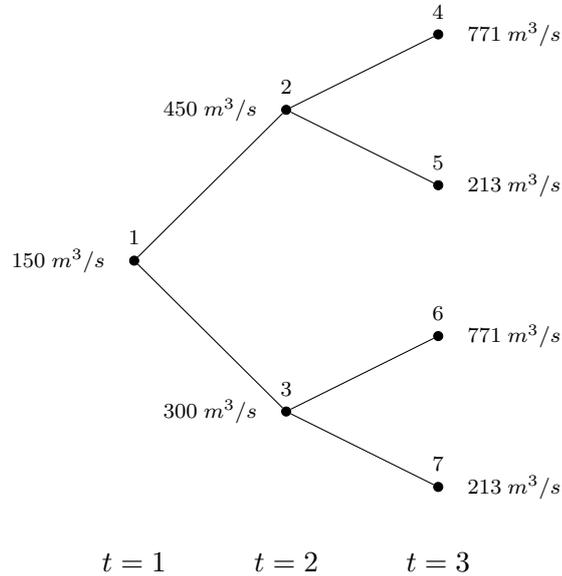


Figura 4 – Árvore de cenários, a eventos independentes, para três etapas.

Cenário	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3
1	388,80	777,60	552,10
2	388,80	1166,40	1998,43

Tabela 6: Cenários de afluência

Com o intuito de dar maior ênfase ao processo de obtenção da FCF, algumas simplificações foram feitas no exemplo: utilização das unidades das variáveis de vazão, volumes turbinado e vertido já em hm^3 ; taxa de desconto desconsiderada; não se considerou a restrição de deplecionamento mínimo da usina hidroelétrica e o vertimento da usina é ilimitado.

3.3.3.2 Solução: cálculo da política

Neste exemplo utilizou-se três discretizações, $0 hm^3$, $2050 hm^3$ e $4100 hm^3$. Isto significa que existem três possíveis volumes iniciais para a usina hidroelétrica, em cada estágio. Ademais, pode-se concluir que existem seis estados a serem investigados a cada etapa, pois para cada discretização deve-se investigar duas possibilidades de afluência. O problema de terceiro estágio é formulado a seguir, para a discretização de $4100 hm^3$ e a

afluência de 552,10 hm^3 :

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,3} + 20 \, gt_{2,3} + 40 \, gt_{3,3} + 80 \, gt_{4,3} + 500 \, def_3 \quad (3.3.1a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3} + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3 = 1000 \quad (3.3.1b)$$

$$va_{1,3} + vt_{1,3} + vv_{1,3} = 4100 + 552,10 \quad (3.3.1c)$$

$$gh_{1,3} = 0.3704 \, vt_{1,3} \quad (3.3.1d)$$

$$0 \leq gt_{1,3} \leq 100 \quad (3.3.1e)$$

$$0 \leq gt_{2,3} \leq 150 \quad (3.3.1f)$$

$$0 \leq gt_{3,3} \leq 200 \quad (3.3.1g)$$

$$0 \leq gt_{4,3} \leq 250 \quad (3.3.1h)$$

$$0 \leq va_{1,3} \leq 4100 \quad (3.3.1i)$$

$$0 \leq vt_{1,3} \leq 1500 \quad (3.3.1j)$$

$$0 \leq vv_{1,3} \leq \infty \quad (3.3.1k)$$

$$0 \leq def_3 \leq \infty \quad (3.3.1l)$$

Seguindo o procedimento descrito no algoritmo 1, em um determinado estágio, deve-se resolver o problema de otimização definido pelas equações 3.3.1a até 3.3.1l para cada discretização e para cada possível cenário. Para tanto, é necessário apenas alterar o lado direito da equação de balanço hídrico, equação 3.3.1c, substituindo os respectivos valores de volume inicial e afluência. Como temos 3 discretizações e duas etapas, para cada estágio investigado será necessário resolver seis problemas de otimização.

As soluções para os problemas de otimização do terceiro estágio estão sumarizadas na tabela 7, onde $vi_{i,t}$ representa o volume inicial da usina hidroelétrica i no estágio t – que são as discretizações utilizadas.

Variável	Discretização 1		Discretização 2		Discretização 3	
$vi_{1,3}$	4100,00	4100,00	2050,00	2050,00	0,00	0,00
$y_{1,3}$	552,10	1998,43	552,10	1998,43	552,10	1998,43
$va_{1,3}$	1952,10	3398,43	0,00	1348,43	0,00	0,00
$vt_{1,3}$	2700,00	2700,00	2602,10	2700,00	552,10	1998,43
$vv_{1,3}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$gt_{1,3}$	0,00	0,00	36,26	0,00	100,00	100,00
$gt_{2,3}$	0,00	0,00	0,00	0,00	150,00	150,00
$gt_{3,3}$	0,00	0,00	0,00	0,00	200,00	9,84
$gt_{4,3}$	0,00	0,00	0,00	0,00	250,00	0,00
def_3	0,00	0,00	0,00	0,00	95,52	0,00
ω	0,00	0,00	362,61	0,00	79760,00	4393,60
$\tilde{\omega}_i$	0,00		181,30		42076,80	

Tabela 7: Resultados do terceiro estágio

O próximo passo é, em posse dos resultados do terceiro estágio, construir as equações da função $\alpha_2(va_{1,2})$, que serão restrições do problema de otimização do segundo estágio. Cada par *volume discretizado/custo esperado* constitui um ponto desta função, que é uma aproximação linear por partes da FCF real. Cada dois pontos subsequentes definem uma reta, que é uma das equações da FCF. Tais equações são calculadas, neste trabalho, por interpolação:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4100 & 1 \\ 2050 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 181,30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0884 \\ 362,6070 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2050 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 181,30 \\ 42076,80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20,4368 \\ 42076,80 \end{bmatrix}$$

O que resulta nas seguintes equações:

$$\alpha_2 \geq -0,0884 \times va_{1,2} + 362,6070 \quad (3.3.2a)$$

$$\alpha_2 \geq -20,4368 \times va_{1,2} + 42076,80 \quad (3.3.2b)$$

Estas equações, que compõem a função α_2 , devem ser adicionadas ao problema de otimização do segundo estágio. A figura 5 traz o perfil desta função.

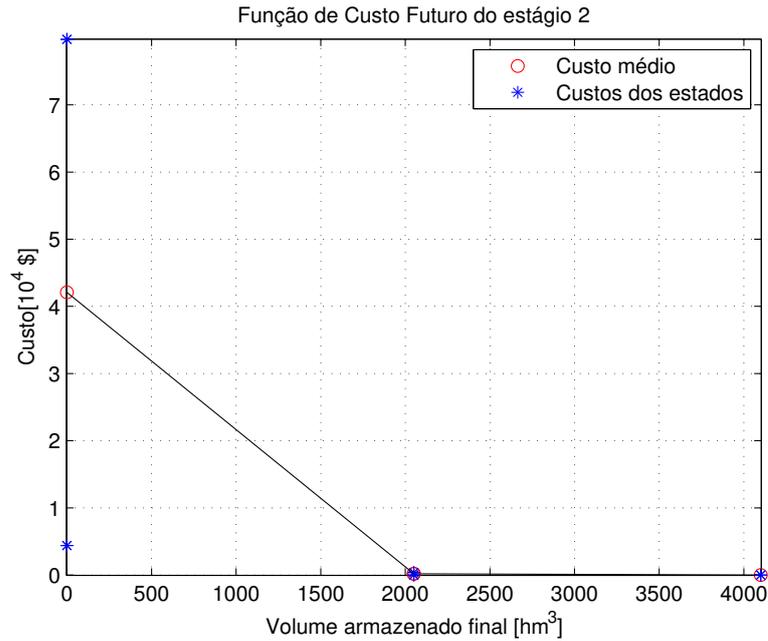


Figura 5 – FCF do estágio 2

O problema de otimização para o segundo estágio será escrito de forma simplificada, omitindo os limites operativos das usinas termoeletricas e da usina hidroeletrica – esta formulação simplificada será adotada daqui em diante. O problema é apresentado para a discretização 2050 hm^3 e para o cenário $777,60 \text{ hm}^3$.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \text{ } gt_{1,2} + 20 \text{ } gt_{2,2} + 40 \text{ } gt_{3,2} + 80 \text{ } gt_{4,2} + 500 \text{ } def_2 + \alpha_2 \quad (3.3.3a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2} + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2 = 1000 \quad (3.3.3b)$$

$$va_{1,2} + vt_{1,2} + vv_{1,2} = 2050 + 777,60 \quad (3.3.3c)$$

$$\alpha_2 \geq -0,0884 \times va_{1,2} + 362,6070 \quad (3.3.3d)$$

$$\alpha_2 \geq -20,4368 \times va_{1,2} + 42076,80 \quad (3.3.3e)$$

É importante notar a adição do termo α_2 na função objetivo do problema, equação 3.3.3a e também a adição das restrições da FCF do segundo estágio, equações 3.3.3d e 3.3.3e. Novamente, seis problemas de otimização devem ser resolvidos nesta etapa, com o fim de construir a FCF que será passada para o problema de primeiro estágio. A única diferença entre estes problemas será o lado direito da equação de balanço hídrico – 3.3.3c – que será atualizado para cada par *discretização/cenário*. As soluções destes PLs estão sumarizadas na tabela 8.

Variável	Discretização 1		Discretização 2		Discretização 3	
$vi_{1,2}$	4100,00	4100,00	2050,00	2050,00	0,00	0,00
$y_{1,2}$	777,60	1166,40	777,60	1166,40	777,60	1166,40
$va_{1,2}$	2177,60	2566,40	1342,60	1731,40	0,00	0,00
$vt_{1,2}$	2700,00	2700,00	1485,00	1485,00	777,60	1166,40
$vv_{1,2}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$gt_{1,2}$	0,00	0,00	100,00	100,00	100,00	100,00
$gt_{2,2}$	0,00	0,00	150,00	150,00	150,00	150,00
$gt_{3,2}$	0,00	0,00	200,00	200,00	200,00	200,00
$gt_{4,2}$	0,00	0,00	0,00	0,00	250,00	118,00
def_2	0,00	0,00	0,00	0,00	12,00	0,00
ω	170,02	135,63	26638,32	18692,48	80076,80	63516,80
$\tilde{\omega}_i$	152,83		22665,40		71796,80	

Tabela 8: Resultados do segundo estágio

Agora é necessário construir as equações da função $\alpha_1(va_{1,1})$, que serão restrições do problema de primeiro estágio.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4100 & 1 \\ 2050 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 152,83 \\ 22665,40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10,9817 \\ 45177,97 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2050 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 22665,40 \\ 71796,80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,9665 \\ 71796,80 \end{bmatrix}$$

O que resulta nas seguintes equações:

$$\alpha_1 \geq -10,9817 \times va_{1,1} + 45177,97 \quad (3.3.4a)$$

$$\alpha_1 \geq -23,9665 \times va_{1,1} + 71796,80 \quad (3.3.4b)$$

Estas restrições devem ser adicionadas ao problema de otimização do primeiro estágio, o que encerra a construção da política. A figura 6 ilustra o perfil da FCF do primeiro estágio, que acabara de ser construída.

Apesar de não ser necessário resolver o problema de primeiro estágio para construir a política, sua formulação é aqui apresentada, para a discretização de 0 hm^3 e a afluência

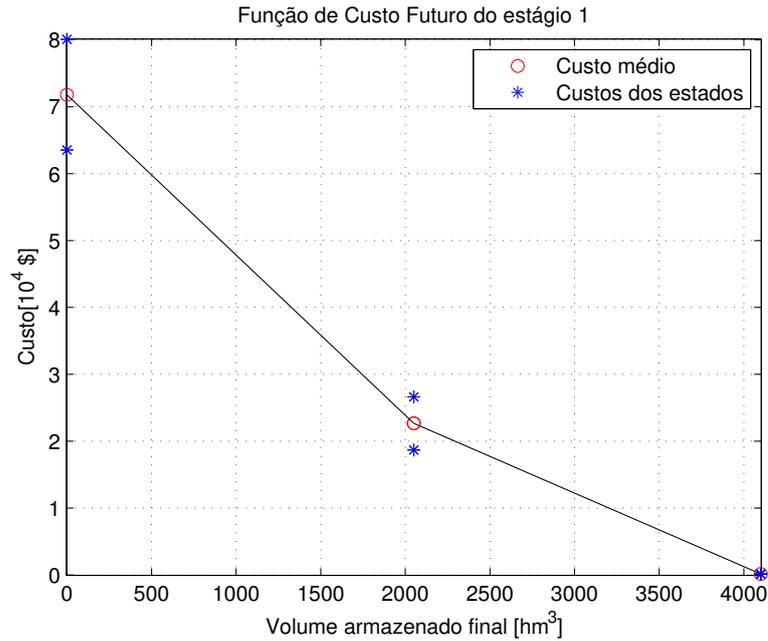


Figura 6 – FCF do estágio 1

de $388,80 \text{ hm}^3$ – neste caso há apenas um cenário para a primeira etapa:

$$\text{minimizar } \omega = 10 \text{ } gt_{1,1} + 20 \text{ } gt_{2,1} + 40 \text{ } gt_{3,1} + 80 \text{ } gt_{4,1} + 500 \text{ } def_1 + \alpha_1 \quad (3.3.5a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,1} + gt_{1,1} + gt_{2,1} + gt_{3,1} + gt_{4,1} + def_1 = 1000 \quad (3.3.5b)$$

$$va_{1,1} + vt_{1,1} + vv_{1,1} = 0 + 388,80 \quad (3.3.5c)$$

$$\alpha_1 \geq -10,9817 \times va_{1,1} + 45177,97 \quad (3.3.5d)$$

$$\alpha_1 \geq -23,9665 \times va_{1,1} + 71796,80 \quad (3.3.5e)$$

Note que a FCF do primeiro estágio não incorpora, de forma explícita, as informações da FCF do terceiro estágio. Estas informações estão implícitas nestas restrições, uma vez que a FCF do primeiro estágio foi construída com custos das soluções do problema de segundo estágio que, por sua vez, incorporava os custos futuros do terceiro estágio. Percebe-se, portanto, que este acoplamento é válido para qualquer horizonte de estudo, onde as informações das etapas $t + 2, \dots, T$ estão implícitas na FCF da etapa t – construída a partir das soluções de problemas de otimização da etapa $t + 1$. Esta é a aproximação equação de recursão deste problema de programação estocástica.

3.3.3.3 Solução: simulação final

Na etapa de simulação final, ou simulação da operação hidrotérmica, deve-se simular a operação do sistema para diversos cenários de aflúências (sintéticos ou históricos), utilizando a política previamente calculada, com a finalidade de se obter estatísticas importantes sobre as variáveis do problema. Isto é, deve-se resolver o problema de otimização definido pelas equações 3.2.1a até 3.2.1k, para todo o horizonte de estudos, para

várias séries de afluições, sorteadas previamente. Um volume inicial de armazenamento para o primeiro estágio também deve ser definido.

A árvore da figura 4 apresenta quatro possíveis realizações de séries *forward* para simulação final. Portanto, devido ao pequeno espaço amostral, todas as possibilidades serão investigadas. Em um caso real, no entanto, o espaço amostral de séries é muito grande e apenas um conjunto de séries *forward* é percorrido na simulação final. A tabela 9 traz as informações sobre todas as possíveis realizações que serão investigadas nesta etapa.

Séries <i>forward</i> [hm^3]				
Série	1	2	3	4
Estágio 1	388,80	388,80	388,80	388,80
Estágio 2	777,60	777,60	1166,40	1166,40
Estágio 3	552,10	1998,43	552,10	1998,43

Tabela 9: Séries *forward* - Simulação final

O resultado da simulação final será o valor esperado – média simples, neste caso – dos resultados de cada uma das séries *forward*. Por exemplo, o valor esperado do volume turbinado da usina hidroelétrica no terceiro estágio, $vt_{1,3}$, será obtido como $\sum_{s=1}^4 \frac{vt_{1,3,s}}{4}$ onde s é um índice referente às séries *forward* percorridas. O mesmo é válido para cada uma das demais variáveis do problema de otimização.

Os PLs a serem resolvidos são, basicamente, os formulados pelas equações 3.3.1a até 3.3.1l para o terceiro estágio, 3.3.3a até 3.3.3e para o segundo e 3.3.5a até 3.3.5e para o primeiro, exceto pelo fato de que o lado direito das equações de balanço hídrico deve ser atualizado para cada possível realização a ser investigada. A estratégia de solução é, portanto, partir de um volume inicial armazenado no primeiro estágio, definido previamente, e solucionar os PLs para cada um dos estágios do período de estudos. O volume final do estágio t é passado como condição inicial do estágio $t + 1$, isto é, aquele volume entrará no lado direito da equação de balanço hídrico deste estágio. Este processo deve ser efetuado para cada uma das séries *forward* selecionadas, armazenando-se os resultados para cada uma das simulações. Ao fim destas, calcula-se o valor esperado das variáveis armazenadas, para cada estágio.

O procedimento será feito para a série *forward* 1 e, depois, será apresentado apenas o resultado final, por simplicidade. O volume inicial escolhido para o primeiro estágio foi $2050 \text{ } hm^3$. O problema de otimização é formulado a seguir, novamente de forma simplificada, e sua solução é apresentada na tabela 10. Adotemos como ϕ a parcela de

custo imediato, α a parcela de custo futuro e ω o custo total, soma das duas anteriores.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,1} + 20 \, gt_{2,1} + 40 \, gt_{3,1} + 80 \, gt_{4,1} + 500 \, def_1 + \alpha_1 \quad (3.3.6a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,1} + gt_{1,1} + gt_{2,1} + gt_{3,1} + gt_{4,1} + def_1 = 1000 \quad (3.3.6b)$$

$$va_{1,1} + vt_{1,1} + vv_{1,1} = 2050 + 388,80 \quad (3.3.6c)$$

$$\alpha_1 \geq -10,9817 \times va_{1,1} + 45177,97 \quad (3.3.6d)$$

$$\alpha_1 \geq -23,9665 \times va_{1,1} + 71796,80 \quad (3.3.6e)$$

$vi_{1,1}$	$y_{1,1}$	$va_{1,1}$	$vt_{1,1}$	$vv_{1,1}$	$gt_{1,1}$	$gt_{2,1}$	$gt_{3,1}$	$gt_{4,1}$	def_1	α_1	ϕ
2050,00	388,80	953,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	48937,52	12000,00

Tabela 10: Simulação do primeiro estágio para a série 1

O próximo passo é resolver o problema de segundo estágio, com o volume inicial dado pelo armazenamento do primeiro estágio. O problema de otimização a se resolver é apresentado a seguir e sua solução é apresentada na tabela 11.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,2} + 20 \, gt_{2,2} + 40 \, gt_{3,2} + 80 \, gt_{4,2} + 500 \, def_2 + \alpha_2 \quad (3.3.7a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2} + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2 = 1000 \quad (3.3.7b)$$

$$va_{1,2} + vt_{1,2} + vv_{1,2} = 953,80 + 777,60 \quad (3.3.7c)$$

$$\alpha_2 \geq -0,0884 \times va_{1,2} + 362,6070 \quad (3.3.7d)$$

$$\alpha_2 \geq -20,4368 \times va_{1,2} + 42076,80 \quad (3.3.7e)$$

$vi_{1,2}$	$y_{1,2}$	$va_{1,2}$	$vt_{1,2}$	$vv_{1,2}$	$gt_{1,2}$	$gt_{2,2}$	$gt_{3,2}$	$gt_{4,2}$	def_2	α_2	ϕ
953,80	777,60	246,40	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	37041,17	12000,00

Tabela 11: Simulação do segundo estágio para a série 1

Por fim, deve-se resolver o problema de terceiro estágio, cujo volume inicial é dado pelo armazenamento final do segundo estágio. Tal problema é formulado a seguir e é acompanhado pela sua solução, sumarizada na tabela 12.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,3} + 20 \, gt_{2,3} + 40 \, gt_{3,3} + 80 \, gt_{4,3} + 500 \, def_3 \quad (3.3.8a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3} + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3 = 1000 \quad (3.3.8b)$$

$$va_{1,3} + vt_{1,3} + vv_{1,3} = 246,40 + 552,10 \quad (3.3.8c)$$

$vi_{1,3}$	$y_{1,3}$	$va_{1,3}$	$vt_{1,3}$	$vv_{1,3}$	$gt_{1,3}$	$gt_{2,3}$	$gt_{3,3}$	$gt_{4,3}$	def_3	α_3	ϕ
246,40	552,10	0,00	798,50	0,00	100,00	150,00	200,00	250,00	4,26	0,00	34130,37

Tabela 12: Simulação do terceiro estágio para a série 1

Os valores esperados das variáveis, considerando as quatro séries *forward*, tabela 9, investigadas estão sumarizados na tabela 13.

	$vi_{1,t}$	$y_{1,t}$	$va_{1,t}$	$vt_{1,t}$	$vv_{1,t}$	$gt_{1,t}$	$gt_{2,t}$	$gt_{3,t}$	$gt_{4,t}$	def_t	α_t	ϕ
Estágio 1	2050,00	388,80	953,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	48937,52	12000,00
Estágio 2	953,80	972,00	440,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	33068,25	12000,00
Estágio 3	440,80	1275,26	0,00	1716,06	0,00	81,15	92,15	100,00	90,07	1,07	0,00	14392,16

Tabela 13: Valores esperados da simulação final com três discretizações

3.3.3.4 Solução: comentários adicionais

Analisando os resultados da tabela 13 é possível notar que, com apenas três discretizações, o custo futuro do primeiro estágio, α_1 , apresenta um desvio em relação à soma dos custos realmente observados nos estágios posteriores – ϕ . Isto é um indicativo de que seria necessário construir uma melhor aproximação da FCF para obter resultados mais realísticos. Uma alternativa é aumentar o número de discretizações utilizadas no cálculo da política. Por exemplo, na tabela 14 são apresentados os resultados da mesma simulação final, porém agora utilizando uma política construída com cem discretizações.

	$vi_{1,t}$	$y_{1,t}$	$va_{1,t}$	$vt_{1,t}$	$vv_{1,t}$	$gt_{1,t}$	$gt_{2,t}$	$gt_{3,t}$	$gt_{4,t}$	def_t	α_t	ϕ
Estágio 1	2050,00	388,80	953,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	26170,34	12000,00
Estágio 2	953,80	972,00	461,10	1464,70	0,00	100,00	150,00	200,00	7,52	0,00	13568,86	12601,48
Estágio 3	461,10	1275,26	0,00	1736,36	0,00	81,15	88,39	100,00	87,37	0,00	0,00	13568,86

Tabela 14: Valores esperados da simulação final com cem discretizações

É possível notar que o custo futuro do primeiro estágio, α_1 , possui o mesmo valor que a soma dos custos imediatos das etapas posteriores e que, portanto a soma do custo imediato, ϕ , e do custo futuro do primeiro estágio resultam no mesmo valor que a soma dos custos imediatos das três etapas, \$38170,34.

Na contramão, as dimensões do problema a ser resolvido aumentam à medida que se adicionam discretizações no cálculo da política, como foi explicado na seção 3.3.2. Além disso, a dimensão de cada um dos PLs a serem resolvidos também cresce (exceto para o último estágio), uma vez que mais restrições de custo futuro estão sendo acrescentadas.

No exemplo tutorial apresentado, com cem discretizações, os problemas de otimização para o primeiro ou segundo estágio possuíam 110 restrições, enquanto o problema da terceira etapa possuía apenas 11. No cálculo da política, eram resolvidos $(100 \times 2)^1 = 200$ PLs a cada etapa, mais $3 \times 4 = 12$ PLs na etapa de simulação final, totalizando 412 PLs resolvidos em todo o processo – lembrando que a primeira etapa não é investigada na fase *backward*. Já com três discretizações, os problemas de otimização para o primeiro e segundo estágio contavam com 13 restrições, enquanto que o da terceira etapa contava com 11. No cálculo da política, eram resolvidos $(3 \times 2)^1 = 6$ PLs a cada etapa, mais 12 PLs na simulação final, totalizando 24 PLs resolvidos.

3.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL

A Programação Dinâmica Dual (PDD) é uma metodologia proposta por [Pereira, 1989, Pereira and Pinto, 1991], baseada na "Decomposição de Benders", criada na tentativa

de solucionar a questão da maldição da dimensionalidade. Esta é uma técnica amostral e iterativa, onde não há a necessidade de se discretizar o espaço de estados como na PDE. Isto tornou possível realizar a otimização estocástica de um sistema a múltiplos reservatórios, tratando o problema de forma analítica ao invés de enumeração, tal qual era feito na PDE.

Em um primeiro momento será apresentado o desenvolvimento para o caso determinístico, que é a Programação Dinâmica Dual Determinística (PDDD) e, em seguida, será feita a extensão para o caso estocástico a eventos independentes [Finardi, 1999, Pereira and Pinto, 1991].

3.4.1 Caso determinístico

O modelo matemático do problema de otimização determinístico pode ser apresentado como um PL de dois estágios, como a seguir:

$$\text{minimizar } c_1x_1 + c_2x_2 \quad (3.4.1a)$$

$$\text{sujeito a } A_1x_1 \geq b_1 \quad (3.4.1b)$$

$$E_1x_1 + A_2x_2 \geq b_2 \quad (3.4.1c)$$

onde:

x_1, x_2 : são vetores coluna de variáveis de estado do primeiro e segundo estágio.

A_1, A_2 : são matrizes que compõe o lado esquerdo das restrições do primeiro e segundo estágio.

b_1, b_2 : são vetores coluna que compõe o lado direito das restrições do primeiro e segundo estágio.

c_1, c_2 : são vetores linha de custos do primeiro e segundo estágio.

E_1 : matriz que acopla a decisão do primeiro estágio à condição inicial do segundo. Basicamente, é um elemento -1 na posição referente ao volume armazenado, que fará este se somar à afluência e compor a condição inicial do próximo estágio.

Tal problema pode ser compreendido como um processo decisório de duas etapas, e cada uma pode ser resolvida separadamente.

$$\text{minimizar } c_1x_1 + \alpha_1(x_1) \quad (3.4.1d)$$

$$\text{sujeito a } A_1x_1 \geq b_1 \quad (3.4.1e)$$

$$\alpha_1(x_1) = \text{minimizar } c_2x_2 \quad (3.4.1f)$$

$$\text{sujeito a } A_2x_2 \geq b_2 - E_1x_1 \quad (3.4.1g)$$

É importante notar que a função $\alpha_1(x_1)$ traduz os custos do segundo estágio como função das variáveis de estado da primeira etapa. Já as parcelas c_1x_1 e c_2x_2 representam os custos imediatos do primeiro e segundo estágio, respectivamente. A estrutura da FCF pode ser caracterizada através do dual do problema de segundo estágio, definido pelas equações 3.4.1f até 3.4.1g.

$$\alpha_1(x_1) = \text{maximizar } \pi(b_2 - E_1x_1) \quad (3.4.1h)$$

$$\text{sujeito a } \pi A_2 \leq c_2 \quad (3.4.1i)$$

onde π é o vetor linha de variáveis duais.

A grande vantagem desta representação é que, em 3.4.1i, a região viável de soluções independe das variáveis de estado da primeira etapa, x_1 . Isto significa que os vértices do problema dual podem ser caracterizados sem o prévio conhecimento de x_1 .

Seja $\mathbf{\Pi}\{\pi_{i=1\dots n}\}$ o conjunto de variáveis duais do problema definido pelas equações 3.4.1h e 3.4.1i. Estas variáveis duais são também os vértices da região de soluções viáveis deste problema. Como a solução de qualquer PL é um vértice da região viável, e todos os vértices estão contidos naquele conjunto, o problema dual pode, a princípio, ser resolvido por enumeração.

$$\alpha_1(x_1) = \max \{ \pi_i(b_2 - E_1x_1) \forall \pi_i \in \mathbf{\Pi} \} \quad (3.4.1j)$$

Sem perda de generalidade, o problema pode ser agora reescrito como a seguir.

$$\alpha_1(x_1) = \text{minimizar } \alpha \quad (3.4.1k)$$

$$\text{sujeito a } \alpha \geq \pi_i(b_2 - E_1x_1) \forall \pi_i \in \mathbf{\Pi} \quad (3.4.1l)$$

É possível perceber a equivalência entre a 3.4.1j e o problema de otimização definido pelas equações 3.4.1k e 3.4.1l ao se notar que α é maior ou igual que cada uma das parcelas $\pi_{i=1\dots n}(b_2 - E_1)$, logo deve também ser maior ou igual ao máximo argumento do conjunto $\{ \pi_i(b_2 - E_1x_1) \forall \pi_i \in \mathbf{\Pi} \}$. Isto posto, é possível então reescrever o problema definido pelas equações 3.4.1d e 3.4.1e.

$$\text{minimizar } c_1x_1 + \alpha \quad (3.4.1m)$$

$$\text{sujeito a } A_1x_1 \geq b_1 \quad (3.4.1n)$$

$$\alpha \geq \pi_i(b_2 - E_1x_1) \forall \pi_i \in \mathbf{\Pi} \quad (3.4.1o)$$

Da teoria de programação linear, sabe-se que o dual de um PL é um limitante da solução do problema primal (neste caso, um limitante inferior) e que, no ponto ótimo, ambas as soluções possuem o mesmo valor [Boyd and Vandenberghe, 2004]. Portanto, o problema definido pelas equações 3.4.1m até 3.4.1o possibilita uma interpretação geométrica bastante

interessante, que pode ser observada com o auxílio da figura 7. Tal formulação mostra que a FCF pode ser aproximada por uma função linear por partes, e portanto convexa, definida pelos hiperplanos suporte $\pi_{i=1\dots n}(b_2 - E_1x_1)$. Esta também é a prova de que a FCF pode ser determinada sem a discretização do espaço de estados, bastando o conhecimento do conjunto de coeficientes dos hiperplanos suporte, Π .

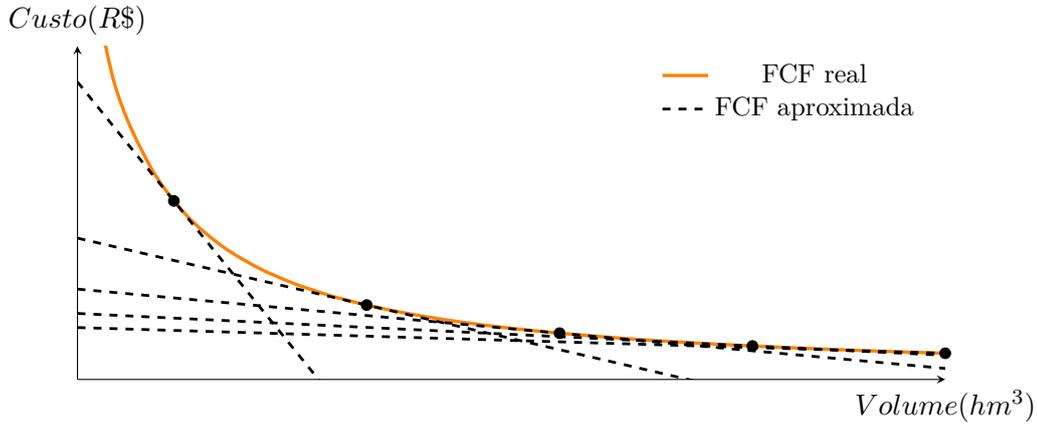


Figura 7 – FCF real vs. FCF aproximada pela PDDE

Ademais, como a equação 3.4.1o contém apenas parte do conjunto dos vértices do problema original, esta aproximação é um limite inferior da FCF real. Devido ao fato de haver uma aproximação da FCF, não é possível garantir que a solução do problema originalmente estabelecido pelas equações 3.4.1a até 3.4.1c – e posteriormente reescrito – é a solução ótima para o problema de dois estágios. Isto é, o custo de sua solução pode ser interpretado como um limite superior, \bar{z} , para o custo ótimo.

Por outro lado, como a aproximação da FCF é um limitante inferior da FCF real, é possível dizer que o custo advindo do problema definido pelas equações 3.4.1m até 3.4.1o constitui também um limite inferior, \underline{z} , do custo ótimo advindo do problema de dois estágios. Isto é:

$$\underline{z} = c_1x_1 + \alpha(x_1) \quad (3.4.2a)$$

$$\bar{z} = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (3.4.2b)$$

$$\underline{z} \leq \bar{z} \quad (3.4.2c)$$

Note que \underline{z} é calculado utilizando a aproximação construída da FCF durante o algoritmo. Como novas restrições são inseridas a cada iteração e não são retiradas em nenhum momento, seu comportamento é estritamente crescente. Já o limite superior, \bar{z} , pode ter um comportamento oscilatório durante o processo de convergência – isto é, decrescer e depois crescer novamente.

Ainda assim, investigar todos os componentes deste conjunto é uma tarefa bastante custosa, de tal modo que a estratégia de solução da PDDE é aproximar a FCF pela

construção dos hiperplanos utilizando um conjunto finito de variáveis de estado "de interesse", iterativamente. Em outras palavras, dado um conjunto de estados $\{x_1, \dots, x_k\}$, é possível calcular, através do problema de segundo estágio definido pelas equações 3.4.1f e 3.4.1g, o conjunto de variáveis duais associadas, $\mathbf{\Pi} = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$, e então construir uma aproximação para a FCF.

Um critério de parada utilizado para o processo iterativo, por exemplo, é justamente a proximidade entre os custos \underline{z} e \bar{z} , que deve ser menor que alguma tolerância especificada. Outro critério de convergência é avaliar se o limite inferior, \underline{z} , está dentro do intervalo de confiança 95% do limite superior, \bar{z} [Pereira and Pinto, 1991]. Existem, no entanto, discussões na literatura sobre qual deve ser este critério. [Shapiro, 2011] advoga que, possivelmente, avaliar a proximidade entre os limites utilizando uma tolerância, que foi o primeiro critério mencionado, seja mais confiável que a avaliação do intervalo de confiança.

3.4.1.1 Construção da FCF

Seja x_1^* a solução do problema de primeiro estágio, definido pelas equações 3.4.1d e 3.4.1e, repetidas aqui por conveniência.

$$\text{minimizar } c_1 x_1 + \alpha_1(x_1) \quad (3.4.1d)$$

$$\text{sujeito a } A_1 x_1 \geq b_1 \quad (3.4.1e)$$

Seja π^* o vetor de multiplicadores duais associados à solução do problema de segundo estágio, resolvido para a condição inicial x_1^* . Seja w^* o valor da solução deste problema, que é definido pelas equações 3.4.1f e 3.4.1g, também repetidas aqui por conveniência.

$$w^* = \alpha_1(x_1^*) = \text{minimizar } c_2 x_2 \quad (3.4.1f)$$

$$\text{sujeito a } A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1^* \quad (3.4.1g)$$

O dual do problema de segundo estágio, como já foi mostrado, pode também ser escrito como:

$$\alpha_1(x_1) = \text{minimizar } \alpha \quad (3.4.1k)$$

$$\text{sujeito a } \alpha \geq \pi_i(b_2 - E_1 x_1) \quad \forall \pi_i \in \mathbf{\Pi} \quad (3.4.1l)$$

Da teoria de programação linear, sabe-se que a solução dos problemas primal e dual coincidem no ponto ótimo. Portanto:

$$\pi^*(b_2 - E_1 x_1^*) = w^* \quad (3.4.3a)$$

Rearranjando, é possível escrever:

$$\pi^* b_2 = w^* + \pi^* E_1 x_1^* \quad (3.4.3b)$$

Como a região viável de soluções do problema de segundo estágio é dada por $\alpha \geq \pi_i(b_2 - E_1x_1) \forall \pi_i \in \Pi$, que tem π^* como um de seus vértices, é possível escrever:

$$\pi^*(b_2 - E_1x_1) - \alpha \leq 0 \quad (3.4.3c)$$

$$\pi^*b_2 - \pi^*E_1x_1 - \alpha \leq 0 \quad (3.4.3d)$$

Por fim, substituindo 3.4.3b na equação 3.4.3d, obtém-se uma expressão independente de b_2 para a restrição:

$$w^* + \pi^*E_1x_1^* - \pi^*E_1x_1 - \alpha \leq 0 \quad (3.4.3e)$$

Evidenciando a parcela do custo futuro, α , obtém-se a expressão final para a nova restrição desta etapa. Esta equação é um pouco diferente da formulação convencional dos "Cortes de Benders", porém será útil no caso estocástico que será abordado mais adiante.

$$\alpha \geq w^* + \pi^*E_1x_1^* - \pi^*E_1x_1 \quad (3.4.3f)$$

3.4.2 Caso estocástico com eventos independentes

A técnica da Programação Dinâmica Dual pode ser estendida para o caso estocástico, como foi dito anteriormente. Seja $\mathbf{X}\{x_{n=1\dots m}\}$ o conjunto de possíveis estados que podem ser assumidos pelo sistema no segundo estágio, condicionados às suas respectivas probabilidades $p_{i=1\dots n}$, onde $\sum_{n=1}^m p_n = 1$. O problema de otimização de duas etapas pode ser formulado como se segue:

$$\text{minimizar} \quad c_1x_1 + \sum_{n=1}^m p_n c_2x_{2,n} \quad (3.4.4a)$$

$$\text{sujeito a} \quad A_1x_1 \geq b_1 \quad (3.4.4b)$$

$$E_1x_1 + A_2x_{2,n} \geq b_{2,n} \quad \forall x_n \in \mathbf{X} \quad (3.4.4c)$$

Tal problema pode ser compreendido como um processo decisório de duas etapas, e cada uma pode ser resolvida separadamente. O objetivo é minimizar os custos do primeiro estágio somados ao valor esperado dos custos do segundo estágio.

$$\text{minimizar} \quad c_1x_1 + \tilde{\alpha}_1(x_1) \quad (3.4.4d)$$

$$\text{sujeito a} \quad A_1x_1 \geq b_1 \quad (3.4.4e)$$

$$\tilde{\alpha}_1(x_1) = \text{minimizar} \quad \sum_{n=1}^m p_n c_2x_{2,n} \quad (3.4.4f)$$

$$\text{sujeito a} \quad E_1x_1 + A_2x_{2,n} \geq b_{2,n} \quad \forall x_n \in \mathbf{X} \quad (3.4.4g)$$

3.4.2.1 Construção da FCF

Seja x_1^* a solução do problema de primeiro estágio, definido pelas equações 3.4.4d e 3.4.4e. Sejam $\pi_{n=1\dots m}^*$ os multiplicadores duais associados a cada um dos subproblemas de segundo estágio, definidos pelas equações 3.4.4f e 3.4.4g, quando resolvidos para a condição inicial x_1^* , e sejam $w_{n=1\dots m}^*$ os valores de cada uma destas soluções.

De forma análoga ao que foi feito para o caso determinístico, é possível escrever:

$$\sum_{n=1}^m p_n (\pi_n^* b_{2,n} - \pi_n^* E_1 x_1) - \tilde{\alpha} \leq 0 \quad (3.4.5a)$$

É possível também escrever que:

$$\pi_n^* b_{2,n} = w_n^* + \pi_n^* E_1 x_1^* \quad n = 1, \dots, m \quad (3.4.5b)$$

Portanto, substituindo a equação 3.4.5b na equação 3.4.5a, é possível obter:

$$\sum_{n=1}^m p_n (w_n + \pi_n^* E_1 x_1^* - \pi_n^* E_1 x_1) - \tilde{\alpha} \leq 0 \quad (3.4.5c)$$

Abrindo o somatório e substituindo $\tilde{\pi} = \sum_{n=1}^m p_n \pi_n^*$ e também $\tilde{w} = \sum_{n=1}^m p_n w_n^*$, é possível reescrever a equação 3.4.5c:

$$\tilde{w} + \tilde{\pi} E_1 x_1^* - \tilde{\pi} E_1 x_1 - \tilde{\alpha} \leq 0 \quad (3.4.5d)$$

Evidenciando a parcela de custo futuro, $\tilde{\alpha}$, obtém-se a expressão final que será utilizada como restrição do problema de primeiro estágio no caso estocástico:

$$\tilde{\alpha} \geq \tilde{w} + \tilde{\pi} E_1 x_1^* - \tilde{\pi} E_1 x_1 \quad (3.4.5e)$$

Por fim, para o caso de um único reservatório, substituindo $E_1 x_1$ por $-va_{1,t-1}$, $E_1 x_1^*$ por $-va_{i,t-1}^*$, pode-se escrever a equação 3.4.5f, que será utilizada no algoritmo da construção da política utilizando a PDDE. Deve-se ressaltar que $va_{1,t-1}$ é variável do problema de otimização – para o estágio $t - 1$, para a usina i – e $va_{i,t-1}^*$ é o estado de interesse, para o qual se calculou o hiperplano suporte. Por outro lado, \tilde{w} e $\tilde{\pi}_i$ são as esperanças do custo total e dos multiplicadores duais da equação de balanço hídrico – para a usina i – obtidos na recursão *backward* na etapa t .

$$\tilde{\alpha}_{t-1} \geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^* + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \quad (3.4.5f)$$

Da mesma forma que no exemplo anterior, no caso de apenas um reservatório, a FCF é bidimensional, uma vez que esta modelagem não considera a vazão como variável de estado. Neste caso, portanto, o hiperplano suporte é uma reta, com coeficiente angular

$\tilde{\pi}_i$ e coeficiente linear ($\tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n}$). A função α será composta por um conjunto de retas que aproximam a FCF real de forma tangente, como ilustrado na figura 7.

A extensão para o caso a múltiplos reservatórios pode ser feita de forma direta. Será calculado, para cada equação de balanço hídrico, referente à variável $va_{i,t-1}$ e ao volume de interesse $va_{i,t-1}^{*n}$, um multiplicador dual médio, $\tilde{\pi}_i$. O custo médio da solução, \tilde{w} , continua a ser único – que é o valor da solução do PL – e calculado da mesma forma que no caso com um único reservatório. Portanto, no caso de dois reservatórios cada hiperplano suporte seria construído como a seguir:

$$\tilde{\alpha}_{t-1} \geq \tilde{\pi}_1 va_{1,t-1} + \tilde{\pi}_2 va_{2,t-1} - \tilde{\pi}_1 va_{1,t-1}^{*n} - \tilde{\pi}_2 va_{2,t-1}^{*n} + \tilde{w} \quad (3.4.5g)$$

É possível observar que a equação 3.4.5g representa um plano, uma vez que pode-se agrupar os termos $\tilde{w} - \tilde{\pi}_1 va_{1,t-1}^{*n} - \tilde{\pi}_2 va_{2,t-1}^{*n}$ em um só coeficiente, C , por exemplo, e lembrando que $va_{1,t-1}$ e $va_{2,t-1}$ são variáveis do problema de otimização. Poderia-se reescrever tal equação como:

$$\tilde{\alpha}_{t-1} \geq \tilde{\pi}_1 va_{1,t-1} + \tilde{\pi}_2 va_{2,t-1} + C \quad (3.4.5h)$$

No algoritmo 2 está demonstrado o procedimento de utilização da PDDE na etapa de cálculo da política do problema de planejamento.

3.4.3 Algoritmo para cálculo da política utilizando a PDDE

Algoritmo 2: POLÍTICA PDDE (CENÁRIOS INDEPENDENTES EM ÁRVORE)**Entrada:**

Seja T o último estágio do horizonte de estudos.

Seja Ψ_t^n um nó da árvore de cenários, com probabilidade p^n .

Seja ψ_t^m um nó filho m que parte do nó pai Ψ_{t-1}^n , com probabilidade p^m .

Saída: Conjunto de funções $\alpha_t \forall t \in T$

1 Procedimento**2 repita**

3 %*Simulação Forward*

4 Inicialize $\bar{z} = 0$ e $z = 0$

5 Defina um volume inicial, $va_{1,1}^{*1}$, para o primeiro estágio, nó Ψ_1^1 .

6 **para** $t = 1, 2, \dots, T$ **faça**

7 **para** cada nó Ψ_t^n do estágio t **faça**

8 Solucione o problema de otimização definido pelas equações (3.2.1a) até (3.2.1k), sendo $va_{i,t}^{*n}$ e $y_{i,t}^n$ as condições iniciais.

9 Seja ϕ^n o custo imediato e w^n o custo total, associados à solução obtida.

10 **se** $t = 1$ **então**

11 | $z = w^n$

12 **fim**

13 Atualize $va_{i,t+1}^{*m} = va_{i,t} \forall m$ e $\bar{z} = \bar{z} + \phi^n \times p^n$

14 **fim**

15 **fim**

16 %*Recursão Backward*

17 **para** $t = T, T - 1, \dots, 2$ **faça**

18 **para** cada conjunto de nós filhos que partem de um nó pai Ψ_{t-1}^n **faça**

19 Inicialize $\tilde{w} = 0$ e $\tilde{\pi}_i = 0$

20 **para** cada nó filho ψ_t^m desse conjunto **faça**

21 Solucione o problema de otimização definido pelas equações (3.2.1a) até (3.2.1k), sendo $va_{i,t-1}^{*n}$ e $y_{i,t}^m$ as condições iniciais.

22 Seja w o custo total e π o multiplicador dual da equação de balanço hídrico, associados à solução obtida.

23 Atualize $\tilde{w} = \tilde{w} + w \times p^m$ e $\tilde{\pi}_i = \tilde{\pi}_i + \pi \times p^m$

24 **fim**

25 Adicione a restrição $\tilde{\alpha}_{t-1} \geq \sum_i [\tilde{\pi}_i va_{i,t-1} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n}] + \tilde{w}$ ao conjunto de restrições do estágio $t - 1$

26 **fim**

27 **fim**

28 **até** $|\bar{z} - z| \leq Tol;$

3.4.4 Exemplo tutorial

Com o intuito de ilustrar a aplicação da PDDE na construção da política, esta será calculada para o problema da subseção 3.3.3, que já foi resolvido via PDE. A construção da FCF seguirá o algoritmo 2, para uma estrutura arborescente de cenários de vazão. Todas as considerações simplificadoras utilizadas na solução via PDE continuam válidas. A árvore de cenários é apresentada novamente na figura 8, por comodidade.

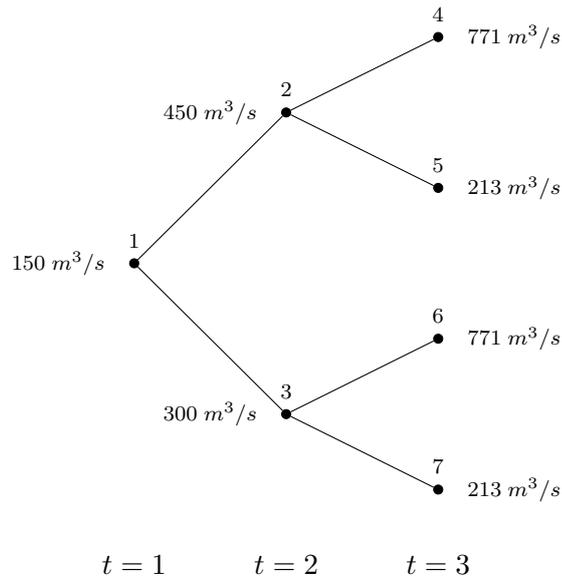


Figura 8 – Árvore de cenários, a eventos independentes, para três etapas.

É importante enfatizar quais são os objetivos das fases *forward* e *backward* da PDDE:

- Na simulação *forward* quer-se calcular: (i) os volumes finais de cada um dos nós da árvore – para os estágios de 1 até $T - 1$ – que são os anteriormente chamados "pontos de interesse"; (ii) o custo total da solução do problema de primeiro estágio – nó 1 – que será o valor \bar{z} e (iii) os custos imediatos de cada um dos nós da árvore, uma vez que a soma das esperanças destes custos para cada etapa constituirá o valor \underline{z} .
- Na recursão *backward* deve-se calcular, utilizando os volumes finais (obtidos na simulação forward) dos nós pais, Ψ_{t-1}^n , como condições iniciais para os nós filhos, ψ_t^m , os multiplicadores duais das equações de balanço hídrico e os custos totais da solução de cada um dos nós da árvore. Em posse destes valores, constrói-se as equações da função de custo futuro – usualmente conhecidos como *cortes de Benders*, ou apenas *cortes* – em torno dos pontos de interesse.

Outro detalhe a ser lembrado é que a restrição da FCF de uma etapa t é construída com: (i) o volume final $-va_{i,t}^{*n}$ da etapa t , obtido da simulação *forward*; (ii) o valor esperado dos multiplicadores duais $-\tilde{\pi}_i^*$ das equações de balanço hídrico dos nós filhos, isto é, problemas da etapa $t+1$ resolvidos na recursão *backward* e (iii) o valor esperado dos custos totais $-\tilde{\omega}^*$ das soluções dos nós filhos, novamente obtidos da recursão *backward* para a etapa $t+1$.

Apesar de serem calculados \bar{z} e \underline{z} , este exemplo foi resolvido sem utilizar o critério de convergência, isto é, arbitrou-se que seriam realizadas cinco iterações. Para facilitar a interpretação, as variáveis possuirão um sobrescrito que as relacionam aos nós da árvore de cenários, figura 8.

Por conta desta estrutura arborescente, é possível observar que o volume armazenado do nó 1 será condição inicial dos nós 2 e 3; que o volume armazenado do nó 2 será condição inicial dos nós 4 e 5 e que o volume final do nó 3 será condição inicial dos nós 6 e 7. Outra particularidade é a respeito dos limites superior e inferior dos custos da simulação, \bar{z} e \underline{z} . Seja $\omega^{1\dots 7}$ o custo total e $\phi^{1\dots 7}$ o custo imediato de solução de cada um dos nós da árvore de cenários. O limite superior \bar{z} pode ser calculado como $\phi^1 + \frac{1}{2}(\phi^2 + \phi^3) + \frac{1}{4}(\phi^4 + \phi^5 + \phi^6 + \phi^7)$ e o limite inferior \underline{z} é o custo total do primeiro estágio, ω^1 .

3.4.4.1 Solução: cálculo da política

Primeira iteração

Simulação forward

Deve-se resolver os problemas de otimização para os sete nós da árvore de cenários, partindo de um volume inicial arbitrário de 2050 hm^3 para o primeiro estágio. A formulação para o problema do nó 1 é mostrada a seguir. Note que, na primeira iteração, não há informação sobre o custo futuro em nenhuma das etapas.

$$\text{minimizar } \omega^1 = 10 \text{ } gt_{1,1}^1 + 20 \text{ } gt_{2,1}^1 + 40 \text{ } gt_{3,1}^1 + 80 \text{ } gt_{4,1}^1 + 500 \text{ } def_1^1 \quad (3.4.6a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,1}^1 + gt_{1,1}^1 + gt_{2,1}^1 + gt_{3,1}^1 + gt_{4,1}^1 + def_1^1 = 1000 \quad (3.4.6b)$$

$$va_{1,1}^1 + vt_{1,1}^1 + vv_{1,1}^1 = 2050 + 388,80 \quad (3.4.6c)$$

A solução deste PL nos dá um volume armazenado de 0 hm^3 . O custo imediato é $\phi^1 = \$967,40$ e é igual ao custo total, ω^1 . Portanto $\bar{z} = \$0,00 + \$967,40 = \$967,40$ e $\underline{z} = \$967,40$. Deve-se então resolver os PLs 2 e 3, com a condição inicial $va_{1,1}^1 = 0 \text{ hm}^3$.

$$\text{minimizar } \omega^2 = 10 \text{ } gt_{1,2}^2 + 20 \text{ } gt_{2,2}^2 + 40 \text{ } gt_{3,2}^2 + 80 \text{ } gt_{4,2}^2 + 500 \text{ } def_2^2 \quad (3.4.7a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^2 + gt_{1,2}^2 + gt_{2,2}^2 + gt_{3,2}^2 + gt_{4,2}^2 + def_2^2 = 1000 \quad (3.4.7b)$$

$$va_{1,2}^2 + vt_{1,2}^2 + vv_{1,2}^2 = 0 + 1166,40 \quad (3.4.7c)$$

$$\text{minimizar } \omega^3 = 10 gt_{1,2}^3 + 20 gt_{2,2}^3 + 40 gt_{3,2}^3 + 80 gt_{4,2}^3 + 500 def_2^3 \quad (3.4.8a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^3 + gt_{1,2}^3 + gt_{2,2}^3 + gt_{3,2}^3 + gt_{4,2}^3 + def_1^3 = 1000 \quad (3.4.8b)$$

$$va_{1,2}^3 + vt_{1,2}^3 + vv_{1,2}^3 = 0 + 777,60 \quad (3.4.8c)$$

A solução destes PLs nos dá volumes armazenados $va_{1,2}^2 = va_{1,2}^3 = 0 \text{ hm}^3$. O custos imediatos são $\phi^2 = \$21440,00$ e $\phi^3 = \$38000,00$. Deve-se atualizar o limite superior $\bar{z} = \$967,40 + \frac{1}{2}(\$21440,00 + \$38000,00) = \$30687,41$.

Note que, neste momento, as condições iniciais dos PLs da terceira etapa são iguais. Portanto o PL 4 é igual ao PL 6 e o PL 5 é igual ao PL 7 – o que não irá ocorrer nas outras iterações e nem sempre é verdade, mesmo na primeira iteração. Por simplicidade, apenas as formulações dos PLs 4 e 5 serão apresentadas a seguir.

$$\text{minimizar } \omega^4 = 10 gt_{1,3}^4 + 20 gt_{2,3}^4 + 40 gt_{3,3}^4 + 80 gt_{4,3}^4 + 500 def_3^4 \quad (3.4.9a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3}^4 + gt_{1,3}^4 + gt_{2,3}^4 + gt_{3,3}^4 + gt_{4,3}^4 + def_1^4 = 1000 \quad (3.4.9b)$$

$$va_{1,3}^4 + vt_{1,3}^4 + vv_{1,3}^4 = 0 + 1998,43 \quad (3.4.9c)$$

$$\text{minimizar } \omega^5 = 10 gt_{1,3}^5 + 20 gt_{2,3}^5 + 40 gt_{3,3}^5 + 80 gt_{4,3}^5 + 500 def_3^5 \quad (3.4.10a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3}^5 + gt_{1,3}^5 + gt_{2,3}^5 + gt_{3,3}^5 + gt_{4,3}^5 + def_1^5 = 1000 \quad (3.4.10b)$$

$$va_{1,3}^5 + vt_{1,3}^5 + vv_{1,3}^5 = 0 + 552,10 \quad (3.4.10c)$$

A solução destes PLs nos dá custos imediatos $\phi^{4,6} = \$4393,60$ e $\phi^{5,7} = \$79760,00$. Deve-se atualizar o limite superior $\bar{z} = \$967,40 + \frac{1}{4}(\$4393,60 + \$79760,00 + \$4393,60 + \$79760,00) = \$72764,21$. Isto encerra a simulação *forward* da primeira iteração.

Recursão backward:

É preciso percorrer a árvore de cenários no sentido reverso do tempo. Portanto, deve-se primeiramente resolver os PLs 4,5,6 e 7, que são do terceiro estágio. Em posse dos multiplicadores duais e custos totais de simulação destes quatro problemas de otimização é possível construir restrições para FCF do segundo estágio.

$$\text{minimizar } \omega^4 = 10 gt_{1,3}^4 + 20 gt_{2,3}^4 + 40 gt_{3,3}^4 + 80 gt_{4,3}^4 + 500 def_3^4 \quad (3.4.11a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3}^4 + gt_{1,3}^4 + gt_{2,3}^4 + gt_{3,3}^4 + gt_{4,3}^4 + def_1^4 = 1000 \quad (3.4.11b)$$

$$va_{1,3}^4 + vt_{1,3}^4 + vv_{1,3}^4 = 0 + 1998,43 : \pi^4 \quad (3.4.11c)$$

$$\text{minimizar } \omega^5 = 10 gt_{1,3}^5 + 20 gt_{2,3}^5 + 40 gt_{3,3}^5 + 80 gt_{4,3}^5 + 500 def_3^5 \quad (3.4.12a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3}^5 + gt_{1,3}^5 + gt_{2,3}^5 + gt_{3,3}^5 + gt_{4,3}^5 + def_1^5 = 1000 \quad (3.4.12b)$$

$$va_{1,3}^5 + vt_{1,3}^5 + vv_{1,3}^5 = 0 + 552,10 : \pi^5 \quad (3.4.12c)$$

A solução destes PLs nos dá custos totais $\omega^{4,6} = \$4393,60$ e $\omega^{5,7} = \$79760,00$. Os multiplicadores duais são $\pi^{4,6} = -14,81 \frac{\$}{hm^3}$ e $\pi^{5,7} = -185,19 \frac{\$}{hm^3}$. Estes valores resultam em $\tilde{\omega}^* = \frac{1}{2}(\$4393,60 + \$79760,00) = \$42076,80$ e $\tilde{\pi}^* = \frac{1}{2}(-14,81 - 185,19) = -100,00 \frac{\$}{hm^3}$.

Particularmente neste momento, as restrições construídas com os resultados dos dois conjuntos de nós filhos serão iguais. De acordo com a equação 3.4.5f:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_2 &\geq 42076,80 - (-100,00) \times 0,00 + (-100,00) \times va_{1,2} \\ \alpha_2 &\geq -100,00 \times va_{1,2} + 42076,80\end{aligned}$$

O próximo é resolver os PLs 2 e 3, já incorporando nas formulações a FCF do segundo estágio, à qual foi adicionada uma restrição.

$$\text{minimizar } \omega^2 = 10 gt_{1,2}^2 + 20 gt_{2,2}^2 + 40 gt_{3,2}^2 + 80 gt_{4,2}^2 + 500 def_2^2 + \alpha_2 \quad (3.4.13a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^2 + gt_{1,2}^2 + gt_{2,2}^2 + gt_{3,2}^2 + gt_{4,2}^2 + def_1^2 = 1000 \quad (3.4.13b)$$

$$va_{1,2}^2 + vt_{1,2}^2 + vv_{1,2}^2 = 0 + 1166,40 : \pi^2 \quad (3.4.13c)$$

$$\alpha_2 \geq -100,00 \times va_{1,2}^2 + 42076,80 \quad (3.4.13d)$$

$$\text{minimizar } \omega^3 = 10 gt_{1,2}^3 + 20 gt_{2,2}^3 + 40 gt_{3,2}^3 + 80 gt_{4,2}^3 + 500 def_2^3 + \alpha_2 \quad (3.4.14a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^3 + gt_{1,2}^3 + gt_{2,2}^3 + gt_{3,2}^3 + gt_{4,2}^3 + def_2^3 = 1000 \quad (3.4.14b)$$

$$va_{1,2}^3 + vt_{1,2}^3 + vv_{1,2}^3 = 0 + 777,60 : \pi^3 \quad (3.4.14c)$$

$$\alpha_2 \geq -100,00 \times va_{1,2}^3 + 42076,80 \quad (3.4.14d)$$

A solução destes PLs nos dá custos totais $\omega^2 = \$38436,80$ e $\omega^3 = \$80076,80$. Os multiplicadores duais são $\pi^2 = -14,81 \frac{\$}{hm^3}$ e $\pi^3 = -185,19 \frac{\$}{hm^3}$. Estes valores resultam em $\tilde{\omega}^* = \frac{1}{2}(\$38436,80 + \$80076,80) = \$59256,80$ e $\tilde{\pi}^* = \frac{1}{2}(-100,00 - 185,19) = -142,59 \frac{\$}{hm^3}$.

A FCF do primeiro estágio é construída a seguir:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_1 &\geq 59256,80 - (-142,59) \times 0,00 + (-142,59) \times va_{1,2} \\ \alpha_1 &\geq -142,59 \times va_{1,1} + 59256,80\end{aligned}$$

Segunda iteração

O procedimento da primeira iteração deve ser repetido por completo, considerando agora as restrições de custo futuro calculadas para o primeiro e segundo estágio. Para não tornar esta solução cansativa, apenas serão apresentados os resultados e principais considerações daqui em diante.

Simulação forward:

PL	$vi = va_{i,t}^{*n}$	va	ϕ	ω
1	2050,00	415,57	4026,18	4026,18
2	415,57	420,77	21594,10	21594,10
3	415,57	383,17	32000,00	35760,08
4	420,77	0,00	1080,00	1080,00
5	420,77	0,00	27174,40	27174,40
6	383,17	0,00	1358,52	1358,52
7	383,17	0,00	28288,50	28288,50

Tabela 15: Resultados da simulação *forward* da iteração 2

O limite inferior dos custos desta iteração é $z = \$4026,18$. Já o limite superior pode ser calculado como $\bar{z} = \$4026,18 + \frac{1}{2}(\$21594,10 + \$35760,08) + \frac{1}{4}(\$1080,00 + \$27174,40 + \$1358,52 + \$28288,50) = \$45298,59$.

Recursão backward:

Para o terceiro estágio, resolvendo-se os PLs 4,5,6 e 7 têm-se os resultados apresentados na tabela 16.

π^4	π^5	ω^4	ω^5	$\tilde{\pi}^*$	$\tilde{\omega}^*$	$vi = va_{1,2}^{*2}$
-7,41	-29,63	1080,00	27174,40	-18,52	14127,20	420,77
π^6	π^7	ω^6	ω^7	$\tilde{\pi}^*$	$\tilde{\omega}^*$	$vi = va_{1,2}^{*3}$
-7,41	-29,63	1358,52	28288,50	-18,52	14823,51	383,17

Tabela 16: Resultados parciais da recursão *backward* da iteração 2

Com estas informações, constrói-se as novas restrições da FCF do segundo estágio. Para os resultados advindos dos PLs 4 e 5:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_2 &\geq 14127,20 - (-18,52) \times 420,77 + (-18,52) \times va_{1,2} \\ \alpha_2 &\geq -18,52 \times va_{1,2} + 21919,20\end{aligned}$$

Para os resultados dos PLs 6 e 7:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_2 &\geq 14823,51 - (-18,52) \times 383,17 + (-18,52) \times va_{1,2} \\ \alpha_2 &\geq -18,52 \times va_{1,2} + 21919,20\end{aligned}$$

Por coincidência, os dois conjuntos de nós filhos geraram restrições iguais. Isto nem sempre será verdade, mesmo em um modelo que, como este, não considere as vazões como variável de estado – isto é, um modelo autorregressivo de ordem 0. Agora deve-se solucionar os PLs 2 e 3, para construir uma nova restrição para a FCF do primeiro estágio, finalizado a segunda iteração. Note que os PLs 2 e 3 terão, agora, duas restrições de custo futuro – estas se acumulam a cada iteração. Os resultados estão na tabela 17.

π^2	π^3	ω^2	ω^3	$\tilde{\pi}^*$	$\tilde{\omega}^*$	$vi = va_{1,1}^*$
-29,63	-29,63	33794,86	45314,86	-29,63	39554,86	415,57

Tabela 17: Resultados parciais da recursão *backward* da iteração 2

Construindo a nova restrição para a FCF da primeira etapa:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^* + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_1 &\geq 39554,86 - (-29,63) \times 415,57 + (-29,63) \times va_{1,1} \\ \alpha_1 &\geq -29,63 \times va_{1,1} + 51867,96\end{aligned}$$

Terceira iteração

Simulação forward:

PL	$vi = va_{i,t}^*$	va	ϕ	ω
1	2050,00	1009,49	13649,99	35607,22
2	1009,49	690,89	12000,00	21124,99
3	1009,49	302,09	12000,00	28324,99
4	690,89	0,00	39,56	39,56
5	690,89	0,00	19170,87	19170,87
6	302,09	0,00	1959,12	1959,12
7	302,09	0,00	30690,87	30690,87

Tabela 18: Resultados da simulação *forward* da iteração 3

O limite inferior dos custos desta iteração é $z = \$35607,22$. Já o limite superior pode ser calculado como $\bar{z} = \$13649,99 + \frac{1}{2}(\$12000,00 + \$12000,00) + \frac{1}{4}(\$39,56 + \$19170,87 + \$1959,12 + \$30690,87) = \$38615,10$.

Recursão backward:

Para o terceiro estágio, resolvendo-se os PLs 4,5,6 e 7 têm-se os resultados apresentados na tabela 19.

π^4	π^5	ω^4	ω^5	$\tilde{\pi}^*$	$\tilde{\omega}^*$	$vi = va_{1,2}^{*2}$
-3,70	-29,63	39,56	19170,87	-16,67	9605,21	690,89
π^6	π^7	ω^6	ω^7	$\tilde{\pi}^*$	$\tilde{\omega}^*$	$vi = va_{1,2}^{*3}$
-7,41	-29,63	1959,12	30690,87	-18,52	16324,99	302,09

Tabela 19: Resultados parciais da recursão *backward* da iteração 3

Com estas informações, constrói-se as novas restrições da FCF do segundo estágio. Para os resultados dos PLs 4 e 5:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_2 &\geq 9605,21 - (-16,67) \times 690,89 + (-16,67) \times va_{1,2} \\ \alpha_2 &\geq -16,67 \times va_{1,2} + 21120,00\end{aligned}$$

Para os resultados dos PLs 6 e 7:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_2 &\geq 16324,99 - (-18,52) \times 302,09 + (-18,52) \times va_{1,2} \\ \alpha_2 &\geq -18,52 \times va_{1,2} + 21919,20\end{aligned}$$

Deve-se agora proceder com a solução dos PLs 2 e 3, para construir uma nova restrição para a FCF do primeiro estágio. Note que os PLs 2 e 3 terão, agora, três restrições de custo futuro. Os resultados estão na tabela 20.

π^2	π^3	ω^2	ω^3	$\tilde{\pi}^*$	$\tilde{\omega}^*$	$vi = va_{1,1}^{*1}$
-16,67	-18,52	21605,21	28324,99	-17,59	24965,10	1009,49

Tabela 20: Resultados parciais da recursão *backward* da iteração 3

Construindo a nova restrição para a FCF da primeira etapa:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{t-1} &\geq \tilde{w} - \tilde{\pi}_i va_{i,t-1}^{*n} + \tilde{\pi}_i va_{1,t-1} \\ \alpha_1 &\geq 24965,10 - (-17,59) \times 1009,49 + (-17,59) \times va_{1,1} \\ \alpha_1 &\geq -17,59 \times va_{1,1} + 42724,60\end{aligned}$$

Resultados

Repetindo este mesmo procedimento para as iterações 4 e 5 é possível obter as funções de custo futuro para o primeiro e segundo estágio. As expressões destas funções estão apresentadas na figura 9, para cada uma das iterações. Um detalhe interessante nesta modelagem é que os cortes da FCF do segundo estágio são compartilhados pelos PLs 2 e 3. Isto é, aquelas restrições que foram construídas com resultados da solução dos PLs 4 e 5, podem ser (e foram) utilizadas tanto na formulação do PL 2 quanto do PL 3. O mesmo vale para os cortes construídos a partir da solução dos PLs 6 e 7.

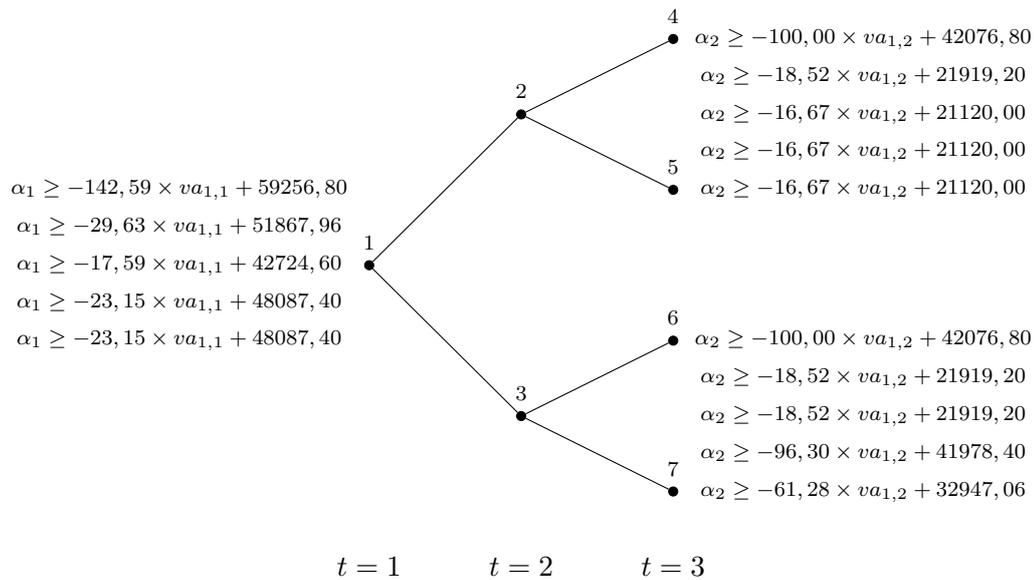


Figura 9 – Árvore de cenários, a eventos independentes, para três etapas.

Na figura 10 está apresentada a evolução dos limites \underline{z} e \bar{z} . Note que, à medida que se realiza iterações os limites tendem a se aproximar. Na realidade, como neste caso exemplo percorre-se toda a árvore de cenários nas simulações *forward* e nas recursões *backward*, os limites irão convergir para um mesmo valor. Esta proximidade, ou igualdade entre os limites, significa que no primeiro estágio, utilizando a FCF construída, é possível prever com certa precisão qual a esperança dos custos totais de operação.

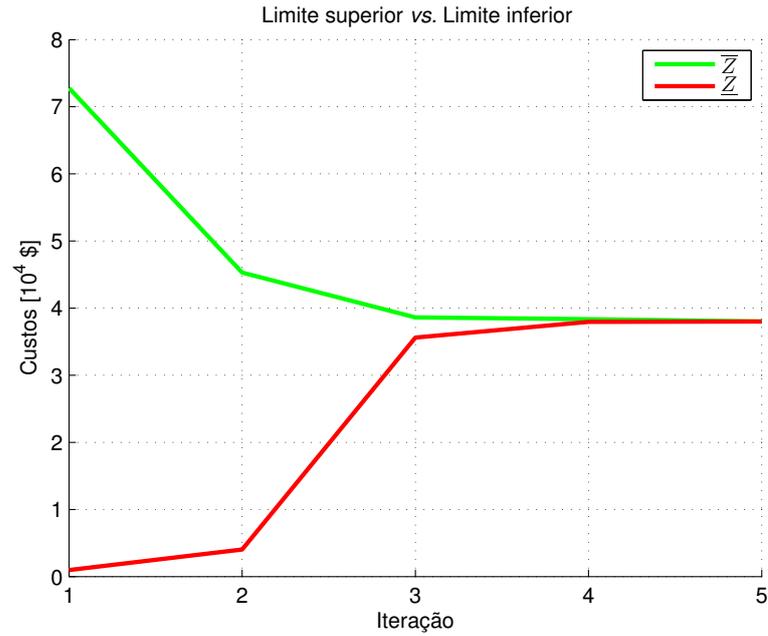


Figura 10 – Limites superior e inferior dos custos de simulação

Por fim, são apresentados os perfis das funções de custo futuro construídas através da PDDE, comparados com os construídos utilizando a PDE com 100 discretizações – o que torna a aproximação da PDE muito próxima da FCF real. Estas comparações estão apresentadas nas figuras 11 para o primeiro estágio e 12 para o segundo.

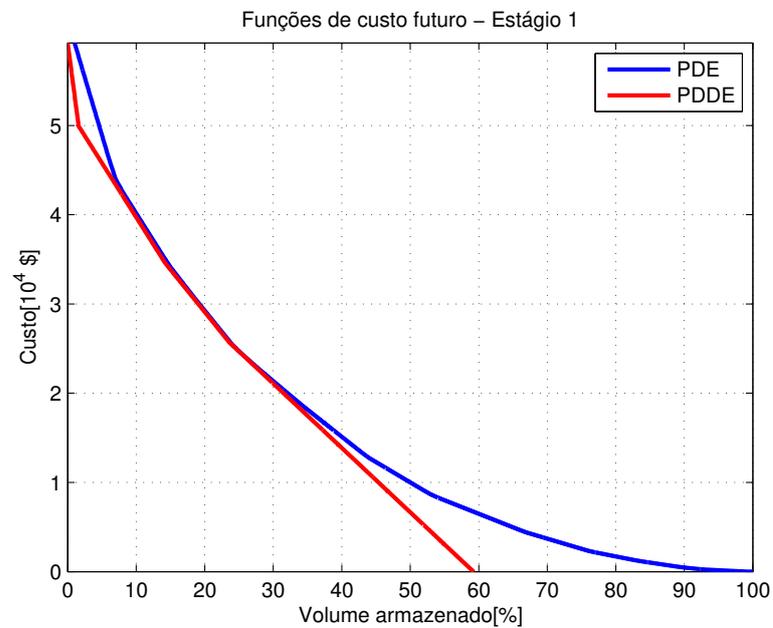


Figura 11 – FCF do primeiro estágio: PDE vs. PDDE

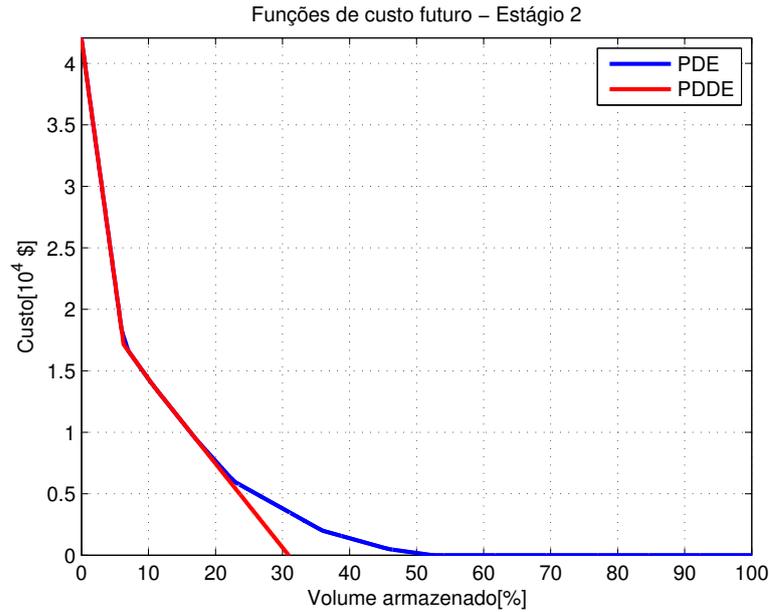


Figura 12 – FCF do segundo estágio: PDE *vs.* PDDE

Fica evidente, portanto, a diferença entre as aproximações da FCF realizadas pelos dois métodos. Como já foi mencionado, enquanto a PDE – utilizando interpolação – realiza uma aproximação *secante* da FCF real, amostrando diversos possíveis estados, a PDDE realiza uma aproximação *tangente*, visitando apenas estados considerados interessantes pelo próprio algoritmo [da Silva, 2016].

3.4.4.2 Solução: simulação final

A simulação final é resolvida do mesmo modo que na subseção 3.3.3, partindo de um volume inicial de 2050 hm^3 para o primeiro estágio. São feitas as simulações *forward* para as quatro séries da árvore de cenários da figura 8, calculando-se os resultados esperados para cada etapa. Estes resultados estão apresentados na tabela 21.

	$vi_{1,t}$	$y_{1,t}$	$va_{1,t}$	$vt_{1,t}$	$vv_{1,t}$	$gt_{1,t}$	$gt_{2,t}$	$gt_{3,t}$	$gt_{4,t}$	def_t	α_t	ϕ
Estágio 1	2050,00	388,80	953,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	26008,70	12000,00
Estágio 2	953,80	972,00	446,55	1479,25	0,00	100,00	150,00	200,00	2,13	0,00	13838,27	12170,43
Estágio 3	446,55	1236,38	0,00	1721,82	0,00	81,15	91,08	100,00	90,07	0,00	0,00	13838,27

Tabela 21: Valores esperados da simulação final com cem discretizações

Somando as esperanças dos custos imediatos para cada etapa, temos um valor de \$38008,70. Para este exemplo, a esperança dos custos obtidos utilizando a PDDE foi ligeiramente inferior ao valor encontrado ao se adotar a política construída via PDE, que foi \$38170,34.

4 ACASO-DECISÃO *vs.* DECISÃO-ACASO

Em um problema de programação estocástica, existem diferentes maneiras de se modelar as incertezas, o que se refletirá no modo de solucionar tal problema. É interessante, portanto, optar pelo modelo que melhor representa o processo físico que se está investigando.

Toda a discussão está embasada e foi motivada na maneira com que os modelos de curto-prazo calculam o despacho semanal no Brasil, contextualização apresentada na seção 4.1. Na seção 4.2 são apresentadas três maneiras de se formular o processo decisório: (i) acaso-decisão(AD), (ii) valor esperado (VE) e (iii) decisão-acaso (DA) [Birge and Louveaux, 2011, Kligerman, 1992, Wets, 2002]. Com o intuito de realizar uma discussão e comparações conceituais entre as abordagens, estas são formuladas na seção 4.3 e a seção 4.4 traz um exemplo didático, cujos resultados embasam toda a discussão teórica da seção 4.5. Por fim, as implementações propostas para a análise conceitual desejada são apresentadas na seção 4.6 e, para tornar mais didática a exposição dos conceitos, acompanhadas de um exemplo tutorial na seção 4.7.

4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO: O DESPACHO HIDROTÉRMICO NO BRASIL

O processo decisório do problema de planejamento energético consiste, por natureza, na tomada de decisão para uma dada etapa antes que se possa observar quais serão os valores de afluência desta etapa. Isto é, se desejássemos determinar o despacho termoeletrico para janeiro, a decisão deveria ser tomada – no máximo – até imediatamente antes do dia primeiro de janeiro, não no último dia deste mês. Dito isto, considerar conhecidas as vazões ao início de cada etapa, ainda que seja utilizada uma FCF construída com base nos resultados esperados de diversos cenários, pode caracterizar um erro conceitual, uma vez que o processo físico não ocorre desta maneira.

Em outras palavras, apesar da otimização estocástica envolvida no cálculo da FCF, cada um dos PLs é resolvido assumindo-se conhecida a afluência que chegará ao reservatório naquela etapa. Até mesmo na própria fase de construção da FCF os problemas de otimização são resolvidos para cada cenário, uma vez que a consideração da incerteza se dá no cálculo do valor esperado dos custos e multiplicadores duais, obtidos na solução de cada um dos PLs, referentes a cada um dos cenários.

Neste contexto, podemos destacar dois pontos cruciais na metodologia adotada atualmente no Brasil: (i) a política é calculada, pelo Newave, através de um procedimento que considera conhecidas, para cada etapa, as vazões que na verdade ainda serão verificadas; (ii) por outro lado, o despacho é feito com base em uma simulação final *determinística* para o primeiro mês do horizonte de planejamento, onde a vazão deste mês é assumida como igual à média das afluências previstas, e o despacho semanal é feito, pelo Decomp,

também de forma determinística, assumindo-se conhecidas as afluências a cada semana, cujos valores são também assumidos como a média. Em outras palavras, utiliza-se uma projeção média das vazões para acessar a FCF¹ do primeiro mês do horizonte de estudos e, utilizando esta FCF, calcula-se o despacho semanal com base em afluências determinísticas.

Pela discussão prévia pode-se perceber que o ponto (i) traz o problema de ser demasiadamente otimista, por considerar uma realidade diferente do processo físico que se está modelando, e que o ponto (ii) caracteriza uma decisão míope uma vez que, ao se tomar a decisão com base em uma projeção média das afluências, fica-se exposto aos altos custos dos cenários mais secos.

Para justificar este raciocínio é importante destacar que, mesmo para horizontes mensais, existem grandes incertezas com relação à previsão das afluências futuras. Para citar um exemplo recente, a partir de dados do relatório do Programa Mensal da Operação (PMO) [ONS, a,b] – elaborado pelo Operador Nacional do Sistema (ONS) – de março de 2017, cuja primeira versão foi lançada na última semana de fevereiro deste mesmo ano e cuja revisão final – de número 4 – foi lançada na última semana de março, é possível perceber o grande desvio entre os valores previstos dentro de um intervalo mensal. Os dados semanais para as vazões naturais afluentes do sudeste são mostrados na tabela 22, em percentuais da Média de Longo Termo (MLT).

Semana	25/02 a 03/03	04/03 a 10/03	11/03 a 17/03	18/03 a 24/03	25/03 a 31/03
Versão inicial	68%	79%	83%	84%	84%
Versão final	62%	74%	70%	67%	76%

Tabela 22: Previsões de vazão natural afluente para o Sudeste. PMO de março de 2017.

Por fim, também é importante destacar que, uma vez definido o despacho energético em um nível estratégico, este não é modificado em razão dos erros de previsão de vazão. O despacho somente é alterado por questão de restrições elétricas da operação do sistema.

4.2 ABORDAGENS

1. **Abordagem acaso-decisão:** esta abordagem é a utilizada pelos modelos de médio-prazo atualmente. É assumido o conhecimento prévio das vazões que serão observadas em um determinado estágio e, portanto, os cálculos da política e simulação final são feitos investigando cada possível ocorrência separadamente. A distribuição das

¹ Deve-se lembrar que os modelos de planejamento são autorregressivos, isto é, utilizam a vazão como variável de estado para prever o custo futuro. Na prática, existem deslocamentos aplicados sobre os hiperplanos da FCF para cada série *forward*, que são dependentes das vazões desta própria série e dos multiplicadores duais. Ou seja, cada série *forward* utiliza a FCF sob uma diferente perspectiva, com deslocamentos aplicados sobre cada hiperplano.

vazões afluentes é representada por um conjunto equiprovável para cada estágio. Portanto, em cada estado de armazenamento de um estágio, são calculadas decisões de geração e seus respectivos custos associados para cada uma destas afluências, o que resulta em múltiplos resultados para cada estado. Os custos que serão realmente atribuídos ao estado são os valores esperados (média simples, neste caso) dos vários custos calculados, referentes a cada uma das várias afluências visitadas. Têm-se, portanto, uma estimativa do custo esperado de operação, mas não uma decisão a ser utilizada por todos os cenários – é definido um montante de geração para cada cenário.

2. **Abordagem do valor esperado:** ao se resolver problemas de programação estocástica, uma tentativa natural é substituir as variáveis aleatórias pelo seu valor esperado e resolver apenas um problema determinístico. Formalmente, tal artifício se embasa no *Princípio do Equivalente Certo*, que será discutido adiante. No presente contexto, resolve-se o PL para um cenário médio de vazões afluentes, de onde se obtém a decisão de geração. Será mostrado adiante que o custo associado a esta decisão não pode ser assumido como o custo futuro do estágio anterior. Deve-se considerar que, tomada a decisão de geração, cenários mais secos ou úmidos que o cenário projetado podem ocorrer, o que trará custos diferentes do previsto – o que concorda com a *Desigualdade de Jensen*, que também será discutida em detalhes neste capítulo.
3. **Abordagem decisão-acaso:** admitindo que não são conhecidas as afluências ao início do mês, as decisões são tomadas com base em uma distribuição de probabilidades amostral das vazões afluentes. Isto é, faz-se um modelo matemático com formulação aumentada, onde se considera os possíveis cenários futuros simultaneamente. Nesta abordagem a decisão de geração termoelétrica – montante de energia gerada – é única, e é tomada diante uma relação de compromisso entre os diversos cenários considerados. É importante notar que esta formulação é feita para cada um dos conjuntos de nós filhos, isto é, os m nós do estágio t que partem de um nó n da etapa $t - 1$. Este detalhe ficará mais claro com os exemplos apresentados.

4.3 FORMULAÇÃO

Com a finalidade de formalizar os conceitos que são abordados neste trabalho, será apresentada a formulação de um exemplo literal para um sistema com uma usina hidroelétrica com reservatório e múltiplas termoelétricas. Será dada ênfase ao processo de tomada de decisão apenas do segundo estágio, com o intuito de estabelecer o custo futuro da primeira etapa, o que será suficiente para a explicação desejada.

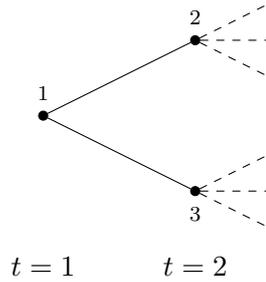


Figura 13 – Árvore do problema multi-etapas

Os sobrescritos das variáveis são referentes aos nós da árvore de cenários da figura 13. As restrições de limites operativos (turbinamento máximo, geração máxima, etc.) foram omitidas por simplicidade.

1. Acaso-decisão

Para cada nó m do segundo estágio:

$$\text{minimizar } \omega^m = \sum_{i \in \mathbf{J}} (gt_j^m \times ct_j) + def^m \times c_{def} + \alpha(va^m) \quad (4.3.1)$$

$$\text{sujeito a } \rho \times vt^m + \sum_{j \in \mathbf{J}} gt_j^m + def^m = d \quad (4.3.2)$$

$$va^m + vt^m + vv^m = va^n + y^m \quad (4.3.3)$$

$$\alpha \geq a^k \times va^m + b^k \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad (4.3.4)$$

Note que a condição de volume inicial é dado pelo volume armazenado no nó n , isto é, va^n . O custo futuro do estágio 1 pode ser calculado como: $\alpha_{t=1}(va^n) = \omega_{AD} = \mathbb{E}_m[\omega^m]$.

2. Valor esperado

Resolve-se um único PL para um cenário médio de afluências $\tilde{y} = \mathbb{E}_m[y^m]$:

$$\text{minimizar } \omega_{VE} = \sum_{j \in \mathbf{J}} (\tilde{gt}^j \times ct_j) + \tilde{def} \times c_{def} + \tilde{\alpha}(\tilde{va}) \quad (4.3.5)$$

$$\text{sujeito a } \rho \times \tilde{vt} + \sum_{j \in \mathbf{J}} \tilde{gt}^j + \tilde{def} = d \quad (4.3.6)$$

$$\tilde{va} + \tilde{vt} + \tilde{vv} = va_1 + \tilde{y} \quad (4.3.7)$$

$$\tilde{\alpha} \geq a^k \times \tilde{va} + b^k \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad (4.3.8)$$

O custo futuro do estágio 1 é o próprio valor da solução deste PL: $\alpha_{t=1}(va^1) = \omega_{VE}$.

3. Decisão-acaso:

Soluciona-se um único PL que incorpora os possíveis cenários filhos – para cada conjunto de nós filhos, isto é, os m nós que partem de um nó n no estágio anterior – em

sua formulação:

$$\text{minimizar } \omega_{DA} = \sum_{j \in \mathbf{J}} (gt_j \times ct_j) + \mathbb{E}_m[def^m \times c_{def} + \alpha(va^m)] \quad (4.3.9)$$

$$\text{sujeito a } \rho \times vt^m + \sum_{j \in \mathbf{J}} gt_j + def^m = d \quad \forall m \quad (4.3.10)$$

$$va^m + vt^m + vv^m = va^n + y^m \quad \forall m \quad (4.3.11)$$

$$\alpha^m \geq a^k \times va^m + b^k \quad \forall m, \forall k \in \mathbf{K} \quad (4.3.12)$$

O custo futuro do estágio 1 é, novamente, o próprio valor da função objetivo deste PL: $\alpha_{t=1}(va^1) = \omega_{DA}$.

4.4 EXEMPLO DIDÁTICO DE DUAS ETAPAS

Será apresentado um exemplo didático de um sistema composto por uma usina hidroelétrica com reservatório, duas usinas termoelétricas e com duas etapas. Por simplicidade, foi desconsiderada a taxa de desconto, assumiu-se que as unidades de vazão, turbinamento e armazenamento estão em hm^3 e foram omitidas as restrições operativas das usinas – como geração mínima, limites de armazenamento, turbinamento, entre outras.

A usina hidroelétrica tem turbinamento e vertimento máximos de $100hm^3$, com produtibilidade de $1 \frac{\widetilde{MW}}{hm^3}$. A termoelétrica 1 tem capacidade de $40MW$ com custo unitário de $1 \frac{\$}{MW}$. Já a termoelétrica 2 possui capacidade de $60MW$ com custo unitário de $2 \frac{\$}{MW}$. A demanda de cada etapa é de $100\widetilde{MW}$ e o custo de déficit é de $3 \frac{\$}{MW}$. Os cenários da segunda etapa deste problema estão apresentados na figura 14.

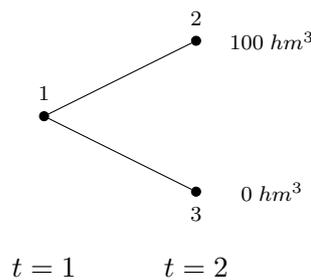


Figura 14 – Exemplo didático: árvore de cenários de duas etapas

O problema de planejamento – simplificado – para o primeiro estágio pode ser formulado como a seguir:

$$\text{minimizar } \omega_1 = \sum_{j \in \mathbf{J}} (gt_j^1 \times ct_j) + def^1 \times c_{def} + \alpha_{t=1}(va^1) \quad (4.4.1)$$

$$\text{sujeito a } \rho \times vt^1 + \sum_{j \in \mathbf{J}} gt_j^1 + def^1 = 100 \quad (4.4.2)$$

$$va^1 + vt^1 + vv^1 = vi^1 + y^1 \quad (4.4.3)$$

As informações contidas nesta formulação são conhecidas, exceto a parcela de custo futuro do primeiro estágio, $\alpha_{t=1}(va^1)$. É necessário, portanto, determiná-la. Este cálculo será feito através das três abordagens apontadas nas seções 4.2 e 4.3.

1. Solução através da abordagem acaso-decisão:

O problema para o cenário úmido é formulado abaixo:

$$\text{minimizar } \omega^2 = gt_1^2 \times 1 + gt_2^2 \times 2 + def^2 \times 3 \quad (4.4.4)$$

$$\text{sujeito a } vt^2 \times 1 + gt_1^2 + gt_2^2 + def^2 = 100 \quad (4.4.5)$$

$$va^2 + vt^2 + vv^2 = 0 + 100 \quad (4.4.6)$$

A solução para este problema é dada por $vt^2 = 100$, $va^2 = vv^2 = 0$, $gt_1^2 = 0$, $gt_2^2 = 0$ e $def^2 = 0$. O custo desta solução foi, portanto, $\omega^2 = \$0$.

O problema de para o cenário seco é formulado a seguir:

$$\text{minimizar } \omega^3 = gt_1^3 \times 1 + gt_2^3 \times 2 + def^3 \times 3 \quad (4.4.7)$$

$$\text{sujeito a } vt^3 \times 1 + gt_1^3 + gt_2^3 + def^3 = 100 \quad (4.4.8)$$

$$va^3 + vt^3 + vv^3 = 0 + 0 \quad (4.4.9)$$

A solução para este problema é dada por $vt^3 = va^2 = vv^2 = 0$, $gt_1^3 = 40$, $gt_2^3 = 60$ e $def^3 = 0$. O custo desta solução foi, portanto, $\omega^3 = \$160$.

O custo da solução baseada em acaso-decisão pode ser calculado como: $\omega_{AD} = \frac{1}{2} \times (0 + 160) = \80 .

2. Solução através do valor esperado:

O problema para o cenário médio é formulado abaixo:

$$\text{minimizar } \omega_{VE} = \widetilde{gt}_1 \times 1 + \widetilde{gt}_2 \times 2 + \widetilde{def} \times 3 \quad (4.4.10)$$

$$\text{sujeito a } \widetilde{vt} \times 1 + \widetilde{gt}_1 + \widetilde{gt}_2 + \widetilde{def} = 100 \quad (4.4.11)$$

$$\widetilde{va} + \widetilde{vt} + \widetilde{vv} = 0 + \frac{1}{2} \times (0 + 100) \quad (4.4.12)$$

A solução para este problema é dada por $\widetilde{vt} = 50$, $\widetilde{va} = \widetilde{vv} = 0$, $\widetilde{gt}_1 = 40$, $\widetilde{gt}_2 = 10$ e $\widetilde{def} = 0$. O custo da solução com base no valor esperado é $\omega_{VE} = \$60$.

3. Solução através da abordagem decisão-acaso:

O problema com formulação aumentada é apresentado a seguir:

$$\text{minimizar } \omega_{DA} = gt_1 \times 1 + gt_2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (def^2 \times 3 + def^3 \times 3) \quad (4.4.13)$$

$$\text{sujeito a } vt^2 \times 1 + gt_1 + gt_2 + def^2 = 100 \quad (4.4.14)$$

$$vt^3 \times 1 + gt_1 + gt_2 + def^3 = 100 \quad (4.4.15)$$

$$va^2 + vt^2 + vv^2 = 0 + 100 \quad (4.4.16)$$

$$va^3 + vt^3 + vv^3 = 0 + 0 \quad (4.4.17)$$

A solução para este problema é dada por $vt^2 = 60$, $va^2 = 40$, $vv^2 = 0$, $vt^3 = va^3 = vv^3 = 0$, $gt_1 = 40$, $gt_2 = 0$, $def^2 = 0$ e $def^3 = 60$. O custo desta solução é, portanto, $\omega_{DA} = \$130$.

4.5 DESIGUALDADES FUNDAMENTAIS

Por construção, a partir dos resultados da seção 4.4, é possível estabelecer as seguintes relações de desigualdade – conhecidas da teoria de programação estocástica [Birge and Louveaux, 2011]:

$$\omega_{VE} \leq \omega_{AD} \leq \omega_{DA} \quad (4.5.1)$$

Analisando a relação apresentada na equação 4.5.1, a pergunta que imediatamente surge é: qual a razão de se investigar a abordagem decisão-acaso, uma vez que esta apresenta os maiores custos?

A resposta para este questionamento deve levar em consideração três pontos: (i) o valor da decisão com base na média das afluências foi retirado de um PL que não considerou as possíveis realizações dos cenários; (ii) devido à forma não-linear da função de custo imediato, a decisão com base na média das afluências cria uma *exposição* aos altos custos dos cenários secos – não capturados ao se utilizar a média como único cenário; (iii) os custos da decisão tomada só serão efetivamente conhecidos depois da realização das afluências.

É possível explicar os pontos (i) e (ii) através da *Desigualdade de Jensen* [Birge and Louveaux, 2011, Boyd and Vandenberghe, 2004], equação 4.5.2. Esta relação determina que, para qualquer função f convexa, dada uma variável aleatória $x \in \mathbf{dom} f$ com probabilidade 1, tem-se:

$$f(\mathbb{E}[x]) \leq \mathbb{E}[f(x)] \quad (4.5.2)$$

Seja $f(x) = x^2$ a função convexa em questão, com a variável aleatória $x \in [0, \infty]$. Tomemos os pontos $x = 1$ e $x = 3$ para análise. A função avaliada nos dois pontos nos

dá $f(1) = 1$ e $f(3) = 9$. Portanto, o valor esperado da função é $\frac{1}{2}(1 + 9) = 5$. Já o valor esperado da variável aleatória é igual a $\frac{1}{2}(1 + 3) = 2$ e a função avaliada neste ponto vale $f(2) = 4$.

Uma interpretação gráfica para auxiliar o entendimento desta relação pode ser obtida através da figura 15, onde a função do valor esperado da variável é representada pelo ponto vermelho, enquanto que o valor esperado da função avaliada nos dois pontos é representado pela linha tracejada. Como a FCI é modelada com uma função linear por partes, convexa e monotonicamente crescente, a análise descrita pode ser aplicada diretamente.

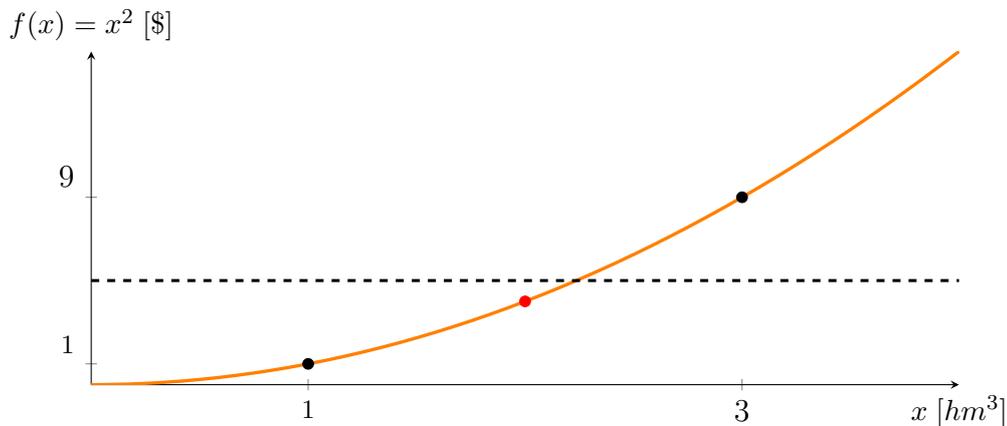


Figura 15 – Desigualdade de Jensen: análise na FCI

A decorrência direta deste fato para o presente contexto é que a decisão tomada com base no cenário esperado possui baixo custo, ω_{VE} . Em outras palavras, em um caso real esta decisão acionaria menos termoeletricas do que seria decidido através do problema estocástico. Esta decisão, porém, foi tomada antes de se ter certeza de quais seriam as vazões observadas, como foi exposto no ponto (iii). Quando estas se realizam, caso seja observado um cenário mais seco do que a média, é necessário despachar termoeletricas de custo elevado sem prévio planejamento. Em teoria, numa condição extrema, pode-se não atender à demanda por energia – pela falta de água, indisponibilidade das termoeletricas ou ambos.

Outra conclusão direta que se pode fazer a partir da *Desigualdade de Jensen* é que o *Princípio do Equivalente Certo* não se aplica em problemas de planejamento da operação – tal princípio é que, em certas classes de problemas de controle estocástico, as variáveis aleatórias podem ser substituídas pelo seu valor esperado, formando um problema determinístico que produz soluções equivalentes à abordagem estocástica.

Analisando a figura 16 suponha que, para o despacho hidrotérmico, seja tomada uma decisão com base no valor esperado das vazões – nó vermelho. No entanto, na realidade, ou será observada a vazão úmido ou a seca – nós 2 e 3, respectivamente. Portanto, o custo

esperado que efetivamente se realizará é o valor esperado de se utilizar a solução que foi tomada com base no cenário médio. Em outras palavras, toma-se a decisão para o nó vermelho e testa-se esta decisão para os nós 2 e 3. Calcula-se então o custo esperado de se utilizar esta decisão.

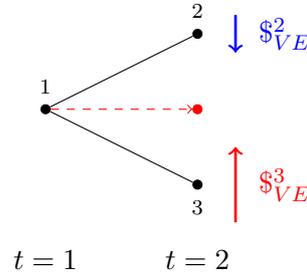


Figura 16 – Custo de se utilizar a solução do cenário médio

Pela figura 16 é possível recordar que o benefício da ocorrência do cenário úmido não compensa os altos custos que se obtém na ocorrência do cenário seco. Pode-se então definir o verdadeiro valor da solução com base no cenário médio, que é o valor esperado de se utilizar tal solução, dado por $\omega_{EVE} = \frac{1}{2}(\omega_{VE}^2 + \omega_{VE}^3)$. O exemplo didático deve ser revisitado, utilizando a geração termoeétrica pré-fixada – lembrando que o montante de geração obtido a partir do cenário médio foi $gt_1 = 40MW$, $gt_2 = 10MW$.

4. Teste da solução obtida através do cenário médio:

O problema para o cenário úmido é formulado abaixo:

$$\text{minimizar } \omega^2 = 40 \times 1 + 10 \times 2 + def^2 \times 3 \quad (4.5.3)$$

$$\text{sujeito a } vt^2 \times 1 + 40 + 10 + def^2 = 100 \quad (4.5.4)$$

$$va^2 + vt^2 + vv^2 = 0 + 100 \quad (4.5.5)$$

A solução para este problema é dada por $vt^2 = va^2 = 50$, $vv^2 = 0$, $gt_1 = 40$, $gt_2 = 10$ e $def^2 = 0$. O custo desta solução foi, portanto, $\omega^2 = \$60$.

O problema para o cenário seco é formulado abaixo:

$$\text{minimizar } \omega^3 = 40 \times 1 + 10 \times 2 + def^3 \times 3 \quad (4.5.6)$$

$$\text{sujeito a } vt^3 \times 1 + 40 + 10 + def^3 = 0 \quad (4.5.7)$$

$$va^3 + vt^3 + vv^3 = 0 + 0 \quad (4.5.8)$$

A solução para este problema é dada por $vt^3 = va^3 = vv^3 = 0$, $gt_1 = 40$, $gt_2 = 10$ e $def^3 = 50$. O custo desta solução foi, portanto, $\omega^3 = \$210$.

A esperança do custo de se utilizar a solução obtida com o cenário médio é: $\omega_{EVE} = \frac{1}{2} \times (60 + 210) = \135 .

Portanto as desigualdades fundamentais mostradas na equação 4.5.1 também devem ser revisitada, podendo ser reescritas como²:

$$\omega_{AD} \leq \omega_{DA} \leq \omega_{EVE} \quad (4.5.9)$$

Da equação 4.5.9 é possível quantificar a motivação para se investigar a abordagem DA frente à utilização da solução obtida com o cenário médio. Ademais, pode-se argumentar que, ainda que a solução AD tenha um menor custo total, esta não representa fielmente o processo de decisão do despacho hidrotérmico, por assumir conhecidas as afluências antes de sua realização.

4.6 IMPLEMENTAÇÃO

Para a implementação das abordagens DA e VE, utilizou-se uma estrutura de decomposição para os problemas resolvidos, onde um PL *mestre* determina os montantes de geração termoelétrica para os PLs *escravos*. A partir da solução do PL mestre, além da decisão de geração termoelétrica, são obtidos os custos marginais de operação. Da solução dos PLs escravos obtém-se os custos totais de simulação e volumes armazenados, que serão condições iniciais para os estágios subseqüentes. Todas as implementações foram feitas utilizando cenários dispostos em uma estrutura de árvore.

Não foram considerados, nesta implementação, os possíveis ajustes que o despacho poderia sofrer – acionando termoelétricas sem prévio planejamento e as remunerando pelo seu custo normal mais um prêmio por atender à demanda em uma situação emergencial. Isto é, toma-se a decisão de geração a partir do PL *mestre*; caso se realize uma vazão que impossibilite o atendimento à demanda com aquele montante de geração termoelétrica pré-fixado, haverá déficit.

Também é importante enfatizar que a esperança dos custos marginais de operação, obtida a partir dos montantes de geração determinados pelos PLs *mestres*, constitui uma previsão. Em outras palavras, caso a decisão não seja suficiente para atender à demanda na ocorrência de uma seca severa, a previsão CMO não irá capturar o efeito do déficit. Na contramão, os custos imediatos obtidos a partir dos PLs *escravos*, são uma constatação da operação que, de fato, fora realizada. Ou seja, no caso do déficit de energia teríamos altos custos de operação, mas os custos marginais refletiriam a decisão de geração tomada antes da realização das vazões.

Pode-se argumentar que estas simulações são míopes neste sentido, porém é importante lembrar que o CMO, na realidade, é determinado antes da própria operação semanal. Ainda mais, se existe despacho fora da ordem de mérito, este não influencia no CMO.

² Note que a formulação do caso DA já incorpora esta premissa de se "testar" a solução obtida nos diferentes cenários. Note também que a abordagem AD fornece, por definição, uma solução para cada cenário. Por isto só foi necessário redefinir o termo ω_{VE} como ω_{EVE} .

Nesse ponto reside, justamente, a reflexão proposta: *deve-se adotar modelos capazes de fornecer decisões sob incerteza, modelando o problema tal qual ele realmente ocorre, com uma correta sinalização econômica destas decisões e de suas possíveis consequências.*

Os objetivos da implementação são:

1. Emular a sistemática utilizada no despacho de curto-prazo, que utiliza o cenário médio de vazões, na simulação final de um modelo matemático de médio-prazo;
2. Propor uma modificação na simulação final para que esta seja feita baseada na abordagem decisão-acaso;
3. Inserir a mesma sistemática do item anterior no cálculo da política, uma vez que é razoável desejar que a função de custo futuro e a simulação final sejam calculadas com as mesmas premissas.

4.6.1 Simulação final com base no cenário médio

A ideia desta simulação é emular, na fase de simulação final de um modelo de médio-prazo, o procedimento realizado no despacho – curto-prazo – de modo a capturar o efeito nos custos totais e marginais. Uma vez que não se conhece, no estágio 1, qual será a afluência no estágio 2, toma-se a decisão de geração termoelétrica – montante de energia gerada – com base nos valores esperados das afluências (média simples, neste caso), que são representados pelos nós vermelhos – PLs mestres. Feito isto, deve-se percorrer a árvore normalmente, resolvendo os PLs escravos – nós pretos – com a geração termoelétrica pré-fixada. Todos os PLs resolvidos nesta simulação têm a formulação convencional, isto é, apenas um cenário de afluência considerado em cada PL.

Após realizado este procedimento obtém-se, para cada nó da árvore (nós pretos), um custo de simulação. Com estas informações é possível calcular a esperança dos custos totais de operação ao se utilizar a solução definida pelo cenário médio. Já os custos marginais de operação são obtidos através dos PLs mestres, aqueles representados pelos nós vermelhos.

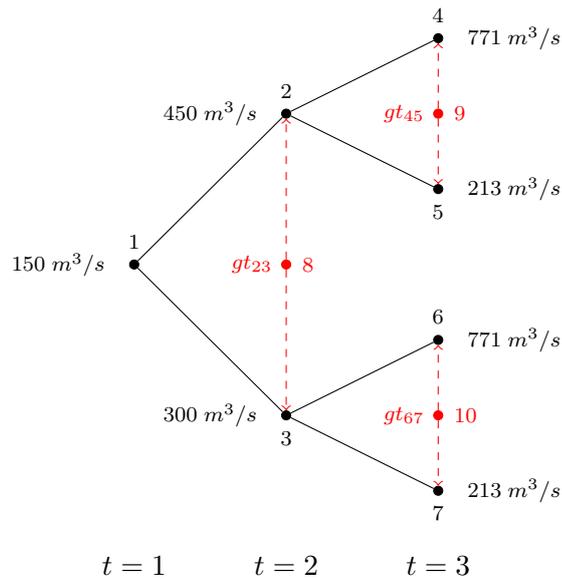


Figura 17 – Simulação final com base no cenário médio.

Com o auxílio da figura 17 e do passo abaixo pode-se entender melhor esta sistemática. Partindo do primeiro estágio:

1. Resolve-se o PL 1, que fornecerá volumes iniciais para os PLs 2, 3, 8 e CMO do estágio 1;
2. Resolve-se o PL 8, que fornecerá a geração termoelétrica para os PLs 2 e 3 e CMO do estágio 2;
3. Resolve-se o PL 2, que fornecerá volumes iniciais para os PLs 4,5 e 9;
4. Resolve-se o PL 3, que fornecerá volumes iniciais para os PLs 6,7 e 10;
5. Resolve-se o PL 9, que fornecerá a geração termoelétrica para os PLs 4, 5 e um valor de CMO para o estágio 3;
6. Resolve-se os PLs 4 e 5;
7. Resolve-se o PL 10, que fornecerá a geração termoelétrica para os PLs 6, 7 e outro valor de CMO para o estágio 3³;
8. Resolve-se os PLs 6 e 7.

4.6.2 Simulação final com base na abordagem decisão-acaso

Esta simulação final em muito se assemelha àquela apresentada na subseção 4.6.1. A diferença entre elas é que, neste momento, cada PL mestre é resolvido utilizando uma

³ Note que o CMO do estágio 3 será o valor esperado dos CMOs obtidos nos PLs 9 e 10.

formulação aumentada, baseada na abordagem decisão-acaso, apresentada no item 3 das seções 4.3 e 4.4. A figura 18 ilustra tal diferença, onde os retângulos tracejados indicam a solução de um problema de otimização que incorpora mais de um cenário em suas equações. Excetuando esta diferença, a sistemática de simulação é a mesma.

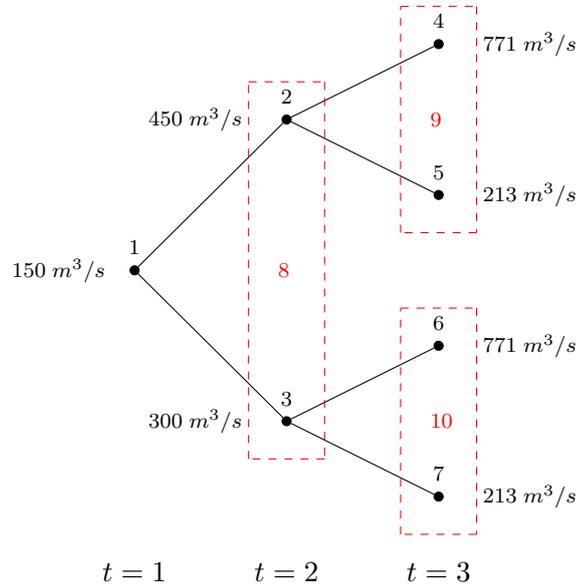


Figura 18 – Simulação final baseada na abordagem decisão-azar

4.6.3 Cálculo da política utilizando a abordagem decisão-acaso

O procedimento é bastante similar ao apresentado no algoritmo 1. Desta vez, no entanto, será apresentado um algoritmo para uma estrutura de cenários em árvore, que poderia ser utilizada, com algumas modificações na forma de se construir e utilizar a FCF, até para um modelo a eventos dependentes.

Algoritmo 3: POLÍTICA PDE DA (ESTRUTURA EM ÁRVORE E UM RESERVATÓRIO)

Entrada:

Seja T o último estágio do horizonte de estudos.

Seja Ψ_t^n um nó da árvore de cenários, com probabilidade p^n .

Seja ψ_t^m um nó filho m que parte do nó pai Ψ_{t-1}^n , com probabilidade p^m .

Saída: Conjunto de funções $\alpha_t \forall t \in \mathbf{T}$

1 **início**

2 Enumere um conjunto \mathbf{V} de variáveis discretas, composto por $v_{i=1\dots N}$ volumes iniciais, onde N é o número de discretizações.

3 **para** $t = T, T - 1, \dots, 2$ **faça**4 **para** cada $v_i \in \mathbf{V}$ **faça**5 **para** cada nó pai Ψ_{t-1}^n **faça**

6 Solucione o problema de otimização com formulação aumentada, definido pelas equações (4.3.9) até (4.3.12), para o volume inicial v_i considerando os nós filhos, que são os m cenários ψ_t^m do conjunto de nós filhos associados ao nó Ψ_{t-1}^n .

7 Seja ω_i^n o custo associado à solução obtida.

8 **fim**

9 Faça $\tilde{\omega}_i = \mathbb{E}_n[\omega_i^n]$.

10 **fim**11 **para** cada $v_i \in \mathbf{V}$ **faça**

$$12 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i & 1 \\ v_{i+1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i \\ \tilde{\omega}_{i+1} \end{bmatrix}$$

13 Adicione a equação $\alpha_{t-1} \geq a \times va_{t-1} + b$ ao conjunto das restrições de custo futuro do estágio $t - 1$.

14 **fim**15 **fim**16 **fim**

4.7 EXEMPLO TUTORIAL

Um novo exemplo tutorial será apresentado, desta vez com o intuito de tornar mais claras as implementações e discussões propostas neste trabalho. Serão detalhados os três desenvolvimentos discutidos na seção 4.6. O caso exemplo utilizado é o mesmo da subseção 3.3.3.

Os sobrescritos das variáveis se referem aos nós da árvore de cenários e serão utilizadas 3 discretizações. O último detalhe é a nomenclatura das políticas e simulações. Quando se fala em FCF AD, refere-se àquela construída na subseção 3.3.3, com base na

abordagem acaso-decisão. Por outro lado, ao se falar em FCF DA, refere-se àquela FCF proposta na seção 4.6, cuja construção é detalhada neste exemplo. A simulação AD é aquela desenvolvida na subseção 3.3.3, enquanto que a simulação a partir do cenário médio de vazões é aquela que tenta emular o despacho de curto-prazo. Por fim, a simulação DA é a proposta na seção 4.6.

4.7.1 Simulação com cenário médio utilizando a FCF AD

A solução da simulação final com o cenário médio é obtida executando o procedimento descrito na subseção 4.6.1. A partir da árvore da figura 17, o primeiro passo é resolver o PL do nó 1. Sua formulação é apresentada abaixo:

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,1} + 20 \, gt_{2,1} + 40 \, gt_{3,1} + 80 \, gt_{4,1} + 500 \, def_1^1 + \alpha_1^1 \quad (4.7.1a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,1}^1 + gt_{1,1} + gt_{2,1} + gt_{3,1} + gt_{4,1} + def_1^1 = 1000 \quad (4.7.1b)$$

$$va_{1,1}^1 + vt_{1,1}^1 + vv_{1,1}^1 = 2050 + 388,80 \quad (4.7.1c)$$

$$\alpha_1^1 \geq -10,9817 \times va_{1,1}^1 + 45177,97 \quad (4.7.1d)$$

$$\alpha_1^1 \geq -23,9665 \times va_{1,1}^1 + 71796,80 \quad (4.7.1e)$$

Este problema de otimização irá fornecer o custo de operação do estágio 1, além do volume inicial para os problemas dos nós 2,3 e 8. O volume armazenado obtido desta solução é $va_{1,1} = 953,80 \, hm^3$ e o custo imediato é \$12000,00 – isto é, excetuando a termoeletrica mais cara, todas foram despachadas em sua capacidade máxima. O próximo passo é resolver o problema do nó 8 com o cenário médio⁴, que é o PL mestre, cuja solução fornecerá o CMO do estágio 2, além dos montantes de geração termoeletrica para os problemas escravos, 2 e 3.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,2} + 20 \, gt_{2,2} + 40 \, gt_{3,2} + 80 \, gt_{4,2} + 500 \, def_2^8 + \alpha_2^8 \quad (4.7.2a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^8 + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2^8 = 1000 \quad (4.7.2b)$$

$$va_{1,2}^8 + vt_{1,2}^8 + vv_{1,2}^8 = 953,80 + 972,00 \quad (4.7.2c)$$

$$\alpha_2^8 \geq -0,0884 \times va_{1,2}^8 + 362,6070 \quad (4.7.2d)$$

$$\alpha_2^8 \geq -20,4368 \times va_{1,2}^8 + 42076,80 \quad (4.7.2e)$$

O montante de geração termoeletrica $gt_{j=1\dots 4,t=2}$ é dada pelo seguinte vetor [100,00 150,00 200,00 0,00] e o CMO é igual a \$40,00 – custo da termoeletrica marginal. Portanto, pode-se agora formular os PLs escravos 2 e 3 com a geração termoeletrica pré-fixada. A

⁴ Note que $0,5 \times (1166,40 + 777,60) = 972,00$.

formulação do PL 2 é apresentada a seguir:

$$\text{minimizar } \omega = 10 \times 100,00 + 20 \times 150,00 + 40 \times 200,00 + 500 \text{ def}_2^2 + \alpha_2^2 \quad (4.7.3a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^2 + 100,00 + 150,00 + 200,00 + \text{def}_2^2 = 1000 \quad (4.7.3b)$$

$$va_{1,2}^2 + vt_{1,2}^2 + vv_{1,2}^2 = 953,80 + 1166,40 \quad (4.7.3c)$$

$$\alpha_2^2 \geq -0,0884 \times va_{1,2}^2 + 362,6070 \quad (4.7.3d)$$

$$\alpha_2^2 \geq -20,4368 \times va_{1,2}^2 + 42076,80 \quad (4.7.3e)$$

Agora é formulado o PL 3:

$$\text{minimizar } \omega = 10 \times 100,00 + 20 \times 150,00 + 40 \times 200,00 + 500 \text{ def}_2^3 + \alpha_2^3 \quad (4.7.4a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^3 + 100,00 + 150,00 + 200,00 + \text{def}_2^3 = 1000 \quad (4.7.4b)$$

$$va_{1,2}^3 + vt_{1,2}^2 + vv_{1,2}^3 = 953,80 + 777,60 \quad (4.7.4c)$$

$$\alpha_2^3 \geq -0,0884 \times va_{1,2}^3 + 362,6070 \quad (4.7.4d)$$

$$\alpha_2^3 \geq -20,4368 \times va_{1,2}^3 + 42076,80 \quad (4.7.4e)$$

Excetuando o armazenamento – e por consequência a parcela de custo futuro – os PLs 2 e 3 possuem a mesma solução: turbinar 1485 hm^3 . É importante notar que uma vez fixada a geração termoeleétrica, para o caso de apenas uma hidroelétrica, torna-se fixa também a geração hidroelétrica – salvos os casos onde a vazão do PL escravo não é suficiente para atender à demanda, e ocorra um déficit.

Percorrendo toda a árvore de cenários da figura 4 e aplicando este procedimento, são obtidos os resultados apresentados na tabela 23, onde as informações em vermelho se referem aos PLs mestres.

PL	$Vi_{1,t}$	$y_{1,t}$	$Va_{1,t}$	$Vt_{1,t}$	$Vv_{1,t}$	$Gt_{1,t}$	$Gt_{2,t}$	$Gt_{3,t}$	$Gt_{4,t}$	Def_t	α_t	CI
1	2050,00	388,80	953,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	48937,52	12000,00
8	953,80	972,00	440,80	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	33068,25	12000,00
2	953,80	1166,40	635,20	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	29095,33	12000,00
3	953,80	777,60	246,40	1485,00	0,00	100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	37041,17	12000,00
9	246,40	1275,26	0,00	1521,66	0,00	100,00	150,00	186,42	0,00	0,00	0,00	11456,83
4	246,40	1998,43	723,17	1521,66	0,00	100,00	150,00	186,42	0,00	0,00	0,00	11456,83
5	246,40	552,10	0,00	798,50	0,00	100,00	150,00	186,42	0,00	267,84	0,00	145376,8
10	635,20	1275,26	0,00	1910,46	0,00	100,00	150,00	42,42	0,00	0,00	0,00	5696,83
6	635,20	1998,43	723,17	1910,46	0,00	100,00	150,00	42,42	0,00	0,00	0,00	5696,83
7	635,20	552,10	0,00	1187,30	0,00	100,00	150,00	42,42	0,00	267,84	0,00	139616,8

Tabela 23: Resultados da simulação com cenário médio - FCF AD com 3 discretizações

Ademais, pode-se concluir que os custos marginais foram \$40,00 para todas as etapas. É muito importante notar que o modelo é incapaz de prever, em seus custos marginais, os eventuais déficits que podem ocorrer quando da realização de cenários mais secos que a média projetada. Isto ocorre pois a previsão do CMO se dá através do PL mestre que, na realidade, é resolvido antes de que se tenha conhecimento das realizações de vazão.

Os custos imediatos esperados podem ser calculados, para cada etapa, fazendo a média dos custos imediatos dos respectivos PLs. Portanto, a esperança do custo total de se operar o sistema com base no cenário médio é $\$12000,00 + \frac{1}{2}(\$12000,00 + \$12000,00) + \frac{1}{4}(\$11456,83 + \$145376,80 + \$5696,83 + \$139616,80) = \$99536,83$.

4.7.2 Cálculo da FCF DA

O cálculo da política é realizado seguindo o algoritmo 3. No entanto, para o caso de uma árvore com cenários independentes – como é a utilizada neste exemplo – não é necessário percorrer toda a árvore, considerando que as vazões se repetem. Uma vez que cada nó pai dá origem a dois nós filhos, o PL a ser resolvido a cada etapa possui dois cenários. Utilizando 3 discretizações e lembrando que não se investiga o primeiro estágio na construção da política, é possível concluir que deve-se resolver 6 problemas de otimização – com formulação aumentada – para o cálculo da FCF com base na abordagem DA.

Para o terceiro estágio os cenários considerados são $1998,43 \text{ hm}^3$ e $552,10 \text{ hm}^3$. O PL 9, com formulação aumentada, será apresentado a seguir para a discretização 4100 hm^3 . A notação de sobrescritos referentes aos nós da árvore foi mantida por simplicidade, mas neste caso a mesma formulação se aplicaria ao PL 10, cujos cenários advêm dos nós 6 e 7.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \text{ } gt_{1,3} + 20 \text{ } gt_{2,3} + 40 \text{ } gt_{3,3} + 80 \text{ } gt_{4,3} + \frac{1}{2}(500 \text{ } def_3^4 + 500 \text{ } def_3^5)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,3}^4 + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3^4 = 1000 \quad (4.7.5a)$$

$$gh_{1,3}^5 + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3^5 = 1000 \quad (4.7.5b)$$

$$va_{1,3}^4 + vt_{1,3}^4 + vv_{1,3}^4 = 4100,00 + 1998,43 \quad (4.7.5c)$$

$$va_{1,3}^5 + vt_{1,3}^5 + vv_{1,3}^5 = 4100,00 + 552,10 \quad (4.7.5d)$$

Resolvendo este problema de otimização para as três discretizações – 0 hm^3 , 2050 hm^3 e 4100 hm^3 – são obtidos os custos apresentados na tabela 24.

Discretização [hm^3]	4100	2050	0
Custo [\$]	0,00	362,61	55880,00

Tabela 24: Custos das discretizações do terceiro estágio - FCF DA

A FCF é construída por interpolação, como apresentado no exemplo tutorial da subseção 3.3.3 e no algoritmo 3. Neste caso, no entanto, devem ser inseridas restrições para os volumes referentes a cada um dos cenários. Isto é:

$$\alpha_2 \geq -0,1769 \times va_{2,1}^2 + 725,2148 \quad (4.7.6a)$$

$$\alpha_2 \geq -27,0817 \times va_{2,1}^2 + 55880,00 \quad (4.7.6b)$$

$$\alpha_2 \geq -0,1769 \times va_{2,1}^3 + 725,2148 \quad (4.7.6c)$$

$$\alpha_2 \geq -27,0817 \times va_{2,1}^3 + 55880,00 \quad (4.7.6d)$$

Feito isto, o próximo passo é resolver os problemas de otimização para as três discretizações do segundo estágio, o que encerrará o cálculo da política. O problema de otimização de segundo estágio para a discretização 2050 hm^3 é formulado a seguir:

$$\text{minimizar } \omega = 10 \, gt_{1,2} + 20 \, gt_{2,2} + 40 \, gt_{3,2} + 80 \, gt_{4,2} + \frac{1}{2}(500 \, def_2^2 + 500 \, def_2^3 + \alpha_2^2 + \alpha_2^3)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^2 + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2^2 = 1000 \quad (4.7.7a)$$

$$gh_{1,2}^3 + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2^3 = 1000 \quad (4.7.7b)$$

$$va_{1,2}^2 + vt_{1,2}^2 + vv_{1,2}^2 = 2050,00 + 1166,40 \quad (4.7.7c)$$

$$va_{1,2}^3 + vt_{1,2}^3 + vv_{1,2}^3 = 2050,00 + 777,60 \quad (4.7.7d)$$

$$\alpha_2^2 \geq -0,1769 \times va_{2,1}^2 + 725,2148 \quad (4.7.7e)$$

$$\alpha_2^2 \geq -27,0817 \times va_{2,1}^2 + 55880,00 \quad (4.7.7f)$$

$$\alpha_2^3 \geq -0,1769 \times va_{2,1}^3 + 725,2148 \quad (4.7.7g)$$

$$\alpha_2^3 \geq -27,0817 \times va_{2,1}^3 + 55880,00 \quad (4.7.7h)$$

Os custos das três discretizações estão contidos na tabela 25.

Discretização [hm^3]	4100	2050	0
Custo [\$]	305,65	26255,50	86054,05

Tabela 25: Custos das discretizações do terceiro estágio - FCF DA

Por fim, as restrições da FCF do primeiro estágio são apresentadas a seguir – note que há apenas um cenário na árvore para esta etapa.

$$\alpha_1 \geq -12,6585 \times va_{1,1} + 52205,34 \quad (4.7.8a)$$

$$\alpha_1 \geq -29,1700 \times va_{1,1} + 86054,05 \quad (4.7.8b)$$

4.7.3 Simulação com PL aumentado utilizando a FCF DA

O cálculo da simulação final utilizando a abordagem DA, isto é, a formulação aumentada dos problemas de otimização, segue a sistemática apresentada na seção 4.6.

Para este exemplo, no entanto, não é necessário resolver todos os dez problemas de otimização apresentados na figura 18 – uma vez que há apenas uma usina hidroelétrica. Isto é, ao se fixar um montante de geração termoelétrica no PL *mestre*, também são obtidos volumes finais para cada um dos cenários de vazão considerados. Em outras palavras, se resolvermos os PLs escravos, fixando a geração termoelétrica, obteremos os mesmos volumes armazenados que já havíamos obtido com o PL *mestre*.

À respeito dos custos imediatos pode-se perceber a mesma particularidade já que, no PL *mestre*, são conhecidos os montantes de geração termoelétrica e déficit – parcelas contabilizadas neste custo. Ou seja, não é necessário calcular a esperança dos custos imediatos para as quatro séries da árvore, mas apenas os custos imediatos dos PLs *mestres*. Isto posto, será realizada a solução dos PLs 1, 8, 9 e 10 para este exemplo.

Da mesma forma que na subseção 4.7.2, da solução do PL 1 obtém-se o volume inicial para o PL 8 e o custo imediato do primeiro estágio. O problema de otimização é formulado a seguir, para um volume inicial de 2050 hm^3 :

$$\text{minimizar } \omega = 10 \text{ } gt_{1,1} + 20 \text{ } gt_{2,1} + 40 \text{ } gt_{3,1} + 80 \text{ } gt_{4,1} + 500 \text{ } def_1 + \alpha_1 \quad (4.7.9a)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,1} + gt_{1,1} + gt_{2,1} + gt_{3,1} + gt_{4,1} + def_1 = 1000 \quad (4.7.9b)$$

$$va_{1,1} + vt_{1,1} + vv_{1,1} = 2050 + 388,80 \quad (4.7.9c)$$

$$\alpha_1 \geq -12,6585 \times va_{1,1} + 52205,34 \quad (4.7.9d)$$

$$\alpha_1 \geq -29,1700 \times va_{1,1} + 86054,05 \quad (4.7.9e)$$

Apesar de ter sido utilizada outra FCF, a solução foi a mesma obtida na subseção 4.7.2: o volume armazenado é $va_{1,1} = 953,80 \text{ hm}^3$ e o custo imediato é \$12000,00. O próximo passo é solucionar o PL 8, utilizando este volume inicial.

$$\text{minimizar } \omega = 10 \text{ } gt_{1,2} + 20 \text{ } gt_{2,2} + 40 \text{ } gt_{3,2} + 80 \text{ } gt_{4,2} + \frac{1}{2}(500 \text{ } def_2^2 + 500 \text{ } def_2^3 + \alpha_2^2 + \alpha_2^3)$$

$$\text{sujeito a } gh_{1,2}^2 + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2^2 = 1000 \quad (4.7.10a)$$

$$gh_{1,2}^3 + gt_{1,2} + gt_{2,2} + gt_{3,2} + gt_{4,2} + def_2^3 = 1000 \quad (4.7.10b)$$

$$va_{1,2}^2 + vt_{1,2}^2 + vv_{1,2}^2 = 953,80 + 1166,40 \quad (4.7.10c)$$

$$va_{1,2}^3 + vt_{1,2}^3 + vv_{1,2}^3 = 953,80 + 777,60 \quad (4.7.10d)$$

$$\alpha_2^2 \geq -0,1769 \times va_{2,1}^2 + 725,2148 \quad (4.7.10e)$$

$$\alpha_2^2 \geq -27,0817 \times va_{2,1}^2 + 55880,00 \quad (4.7.10f)$$

$$\alpha_2^3 \geq -0,1769 \times va_{2,1}^3 + 725,2148 \quad (4.7.10g)$$

$$\alpha_2^3 \geq -27,0817 \times va_{2,1}^3 + 55880,00 \quad (4.7.10h)$$

A solução deste problema de otimização – cujo custo imediato foi de \$12000,00 – é apresentada na tabela 26.

$vi_{1,2}$	$y_{1,2}^2$	$y_{1,2}^3$	$va_{1,2}^2$	$vt_{1,2}^2$	$vv_{1,2}^2$	$va_{1,2}^3$	$vt_{1,2}^3$	$vv_{1,2}^3$
953,8	1166,40	777,60	635,20	1485,00	0,00	246,40	1485,00	0,00
$gt_{1,2}$	$gt_{2,2}$	$gt_{3,2}$	$gt_{4,2}$	def_2^2	def_2^3	α_2^2	α_2^3	
100,00	150,00	200,00	0,00	0,00	0,00	38677,73	49207,08	

Tabela 26: Simulação com PL aumentado - resultados para o PL 8

Deve-se então utilizar o volume armazenado $va_{1,2}^2$ como condição inicial para o PL 9 e o volume $va_{1,2}^3$ para o PL 10. O PL 9 é formulado a seguir:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \omega &= 10 \, gt_{1,3} + 20 \, gt_{2,3} + 40 \, gt_{3,3} + 80 \, gt_{4,3} + \frac{1}{2}(500 \, def_3^4 + 500 \, def_3^5) \\ \text{sujeito a } gh_{1,3}^4 + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3^4 &= 1000 & (4.7.11a) \\ gh_{1,3}^5 + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3^5 &= 1000 & (4.7.11b) \\ va_{1,3}^4 + vt_{1,3}^4 + vv_{1,3}^4 &= 635,20 + 1998,43 & (4.7.11c) \\ va_{1,3}^5 + vt_{1,3}^5 + vv_{1,3}^5 &= 635,20 + 552,10 & (4.7.11d) \end{aligned}$$

A solução deste problema de otimização, cujo custo imediato foi de \$20820,86, é apresentada na tabela 27.

$vi_{1,2}$	$y_{1,2}^2$	$y_{1,2}^3$	$va_{1,2}^2$	$vt_{1,2}^2$	$vv_{1,2}^2$	$va_{1,2}^3$	$vt_{1,2}^3$	$vv_{1,2}^3$
635,20	1998,43	552,10	1446,34	1187,30	0,00	0,00	1187,30	0,00
$gt_{1,2}$	$gt_{2,2}$	$gt_{3,2}$	$gt_{4,2}$	def_2^2	def_2^3	α_2^2	α_2^3	
100,00	150,00	200,00	110,26	0,00	0,00	0,00	0,00	

Tabela 27: Simulação com PL aumentado - resultados para o PL 8

Por fim soluciona-se o PL 10, formulado em seguida e cuja solução está na tabela 28, com um custo imediato de \$33065,19.

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \omega &= 10 \, gt_{1,3} + 20 \, gt_{2,3} + 40 \, gt_{3,3} + 80 \, gt_{4,3} + \frac{1}{2}(500 \, def_3^6 + 500 \, def_3^7) \\ \text{sujeito a } gh_{1,3}^6 + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3^6 &= 1000 & (4.7.12a) \\ gh_{1,3}^7 + gt_{1,3} + gt_{2,3} + gt_{3,3} + gt_{4,3} + def_3^7 &= 1000 & (4.7.12b) \\ va_{1,3}^6 + vt_{1,3}^6 + vv_{1,3}^6 &= 246,40 + 1998,43 & (4.7.12c) \\ va_{1,3}^7 + vt_{1,3}^7 + vv_{1,3}^7 &= 246,40 + 552,10 & (4.7.12d) \end{aligned}$$

$vi_{1,2}$	$y_{1,2}^6$	$y_{1,2}^7$	$va_{1,2}^6$	$vt_{1,2}^6$	$vv_{1,2}^6$	$va_{1,2}^7$	$vt_{1,2}^7$	$vv_{1,2}^7$
246,40	1998,43	552,10	1434,83	810,00	0,00	0,00	798,50	0,00
$gt_{1,2}$	$gt_{2,2}$	$gt_{3,2}$	$gt_{4,2}$	def_6^6	def_6^7	α_6^6	α_6^7	
100,00	150,00	200,00	250,00	0,00	4,26	0,00	0,00	

Tabela 28: Simulação com PL aumentado - resultados para o PL 8

O custo esperado de se operar o sistema com esta abordagem é, portanto, $\$12000 + \$12000 + \frac{1}{2}(\$20820,86 + \$33065,19) = \$50943,03$. Note que este custo é bastante inferior aos $\$99536,83$ obtidos na simulação baseada no cenário médio.

Os custos marginais esperados foram $\$40,00$ para o primeiro estágio, $\$40,00$ para o segundo e $\$165,00$ para o terceiro⁵. Note que, desta vez, a previsão de CMO do modelo – através do PL mestre – foi capaz de oferecer alguma sinalização da possibilidade de ocorrência do déficit de energia.

⁵ Note que este CMO é calculado como $0,5 \times (\$80,00 + \$250,00)$, onde a primeira parcela é obtida do PL 9 e a segunda do PL 10.

5 ESTUDO DE CASO

Neste momento serão apresentados os resultados obtidos com as análises propostas no capítulo 4 aplicadas em um estudo de caso originalmente apresentado por [Bezerra, 2015].

Dados

O sistema conta com uma usina hidroelétrica com produtibilidade ($\rho = 0.7755 \frac{MW}{m^3/s}$), volume útil de 6618 hm^3 , turbinamento máximo de $1479 \frac{m^3}{s}$, sem limite máximo para o vertimento e sem limite mínimo de deplecionamento. Existem três unidades termoelétricas sem limite mínimo para geração, com geração máxima (MW) e custo unitário ($\frac{\$}{MWh}$) dados na tabela 29. O custo de déficit foi estipulado como $1000 \frac{\$}{MWh}$ e a demanda por energia é de 496 GWh por etapa. A taxa de desconto, mais uma vez, foi desconsiderada. Foi considerado um horizonte de estudo composto por 12 meses, cada um com 30 dias de duração.

\overline{gt}	80	110	90
ct	8	30	115

Tabela 29: Dados das unidades termoelétricas

Uma árvore a eventos dependentes, construída com base em um modelo autorregressivo de ordem 1, com 12 etapas e 2 aberturas – composta por 4096 séries de vazão – foi utilizada para os cálculos da política e simulação final. Apesar disto, o modelo de otimização utilizado continuou sendo a eventos independentes¹. No gráfico da figura 19 estão plotados os valores esperados da vazão de cada mês, somados e subtraídos com seus respectivos desvios padrões – já em hm^3 – como um indicativo dos valores utilizados. Note que o tracejado vermelho indica a vazão acima da qual é possível atender à demanda do mês somente com geração hidroelétrica, independentemente do nível armazenamento. Ou seja, a linha vermelha é a demanda convertida para hm^3 , considerando a produtibilidade da usina em questão.

¹ Ou seja, é possível obter melhores políticas, tanto através da abordagem AD quanto da abordagem DA, utilizando um modelo autorregressivo de ordem 1 para este exemplo.

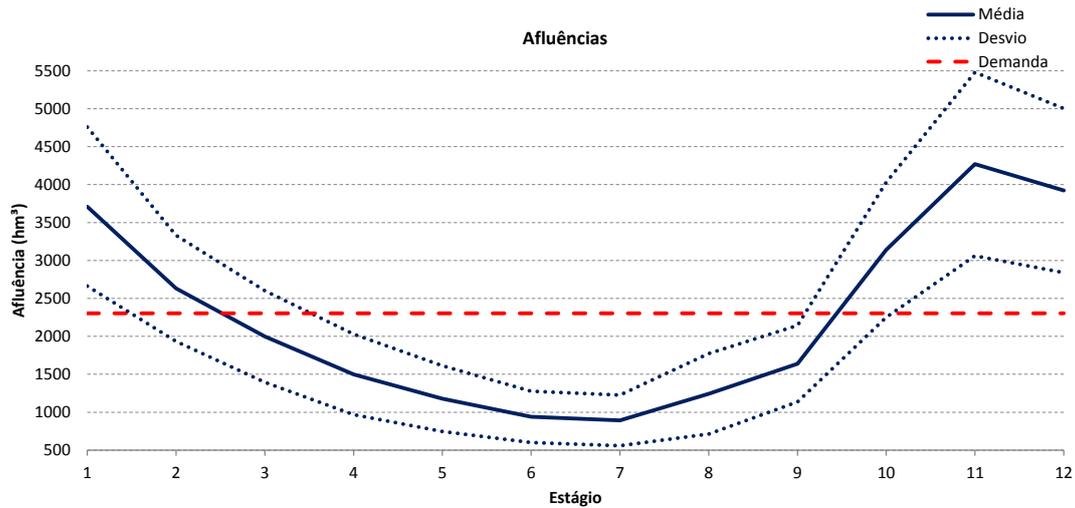


Figura 19 – Série média das 4096 séries *forward*

É muito importante notar que a usina hidroelétrica tem capacidade – supondo um reservatório completamente cheio – para atender quase 3 meses de consumo (sendo que o horizonte possui 12 etapas), sem reenchimentos parciais. Também é importante o fato de que, durante 5 meses do ano, é esperado que seja possível atender à demanda apenas com a hidroelétrica. Estas considerações implicam que a premissa adotada na abordagens DA e VE, de não permitir o ajuste do despacho termoeletrico, não deve ser tão prejudicial – energeticamente – para o sistema.

Análise da esperança dos custos totais de operação

Para a obtenção dos resultados apresentados nesta seção foram realizadas simulações finais para diferentes volumes iniciais do primeiro estágio. Os custos apresentados na figura 20 são as esperanças dos custos totais de operação para todo o horizonte, partindo destes volumes iniciais na primeira etapa.

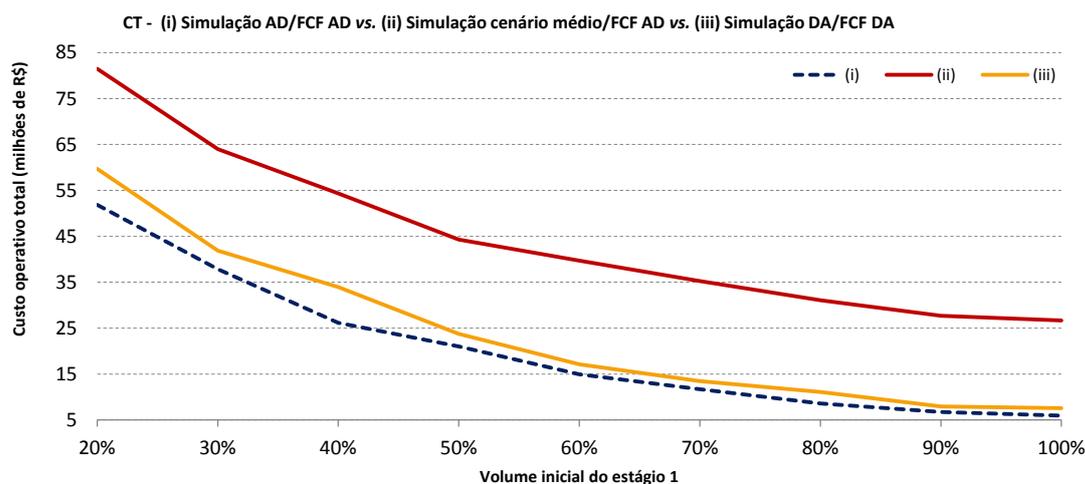


Figura 20 – Esperança dos custos totais de simulação

É possível perceber que o resultado obtido foi exatamente o esperado pela análise teórica da seção 4.5. A simulação (i) – simulação AD com FCF AD – serve como um limite inferior para os custos a serem obtidos nos demais casos. Isto se deve ao fato do *perfeito conhecimento* da informação sobre as vazões em cada etapa.

A simulação (iii) – com cenário médio e FCF AD – propiciou altíssimos custos nos cenários secos. Note que, caso houvesse o ajuste no despacho termoeletrico, estes custos poderiam ser um pouco menores. Ainda assim, tais custos seriam altos, uma vez que as termoeletricas acionadas em caráter emergencial certamente, como já foi dito, cobrariam um prêmio adicional pelo atendimento. Além disto, a simulação (iii) não diminuiria sua distância para a simulação (ii), uma vez que o benefício do ajuste do despacho seria capturado por ambas.

Por fim, a simulação proposta (ii) – simulação DA e FCF DA – trouxe custos intermediários, como era esperado. Ademais, estes se aproximam do limite inferior teórico, dado pela simulação (i).

Na tabela 30 é possível ver a diferença entre os custos das simulações (ii) e (iii) em valores absolutos e percentuais.

Absoluto (milhões R\$)	21,8	22,1	20,4	20,5	22,6	21,8	20,0	19,7	19,1
Percentual	27%	35%	38%	46%	57%	62%	64%	71%	72%

Tabela 30: Custos totais - Simulação com média das afluições *vs.* Simulação DA

Com estes resultados é possível perceber o benefício de se utilizar a abordagem proposta (DA), ao invés do despacho através do valor esperado da afluição. No entanto outra questão deve ser respondida: o benefício observado advém da adoção (a) da política

proposta, (b) da simulação final proposta ou (c) da utilização de política e simulação final propostas?

Com o fim de responder a este questionamento, outra análise será feita sobre o valor esperado dos custos totais da simulação final. Foram comparadas as políticas convencional(AD) e proposta(DA), quando utilizada a simulação final proposta – simulação DA, calculada com o PL de formulação aumentada. Tais resultados podem ser vistos no gráfico da figura 21.

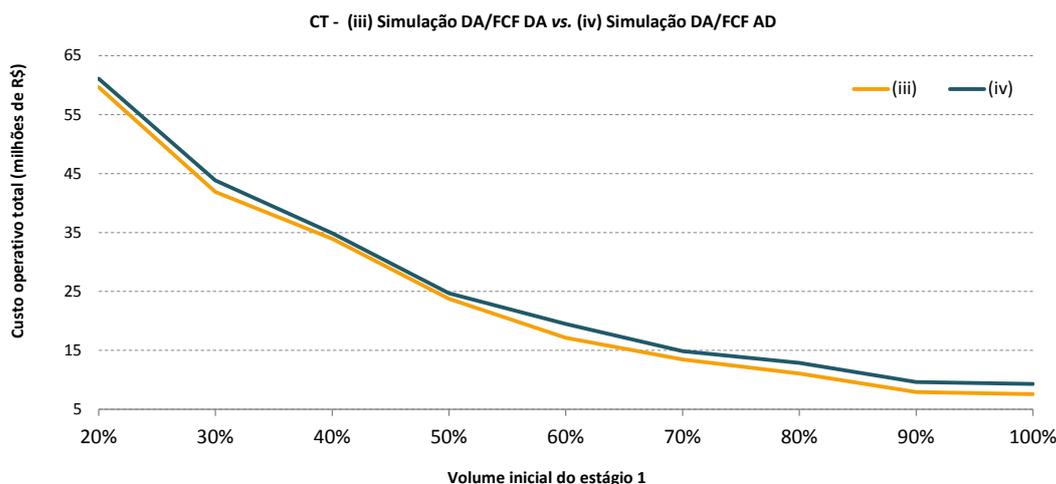


Figura 21 – Comparação entre as políticas: AD *vs.* DA

Na tabela 31 é possível ver esta diferença em valores absolutos e percentuais.

Absoluto (milhões R\$)	1,5	2,0	0,9	0,9	2,3	1,4	1,8	1,7	1,8
Percentual	2%	4%	3%	4%	12%	10%	14%	18%	19%

Tabela 31: Esperança dos custos totais da simulação proposta - FCF AD *vs.* FCF DA

Percebe-se, portanto, o evidente benefício de se utilizar simulação e política calculadas através da abordagem DA. Isto é, a utilização da simulação final com base na abordagem DA só faz sentido se a política incluir esta mesma lógica. Em outras palavras, é sempre desejável – e mais coerente – que o cálculo da simulação final (*forward*) e da política (*backward*) partam das mesmas premissas.

Análise da esperança dos custos marginais de operação

Através da análise da figura 22 é possível perceber a *antecipação* do despacho termoelétrico da abordagem decisão-acaso, durante os quatro primeiros meses. Logo em seguida, do quinto ao nono mês, a abordagem com base no valor esperado das afluências é obrigada a despachar termoelétricas cada vez mais caras – e suportar eventuais déficits de energia – em virtude do erro acumulado dos meses anteriores.

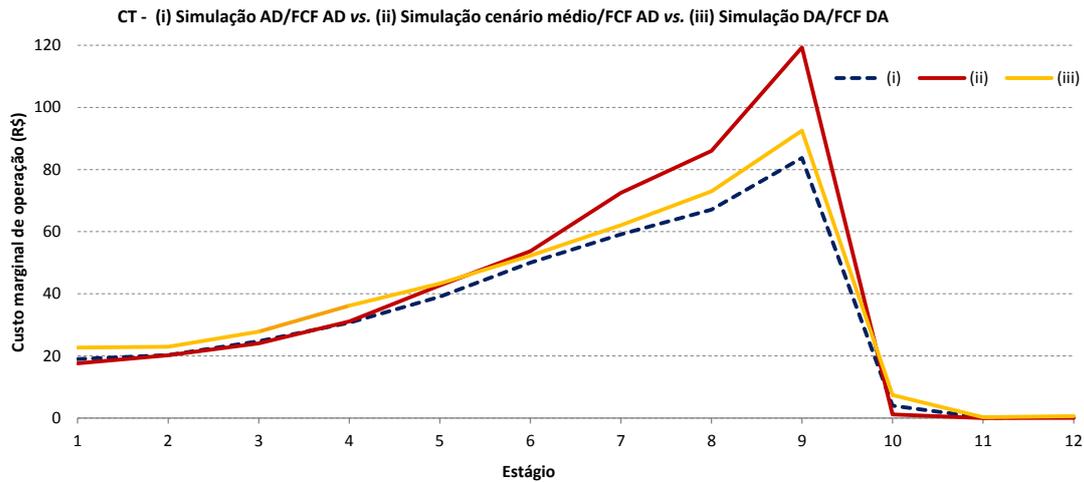


Figura 22 – Esperança dos custos marginais de operação

Lembre-se que, apesar do despacho termoeletrico ter sido ainda maior, este CMO alto não captura a ocorrência dos déficits nos cenários secos, uma vez que a decisão – e por consequência, o CMO – foram calculados antes da realização das vazões.

Análise da trajetória esperada de armazenamento

Por fim, a análise do armazenamento. Apesar da pouca diferença, é possível perceber, através da figura 23, que a abordagem DA proporciona maiores níveis de armazenamento esperado durante todo o período observado.

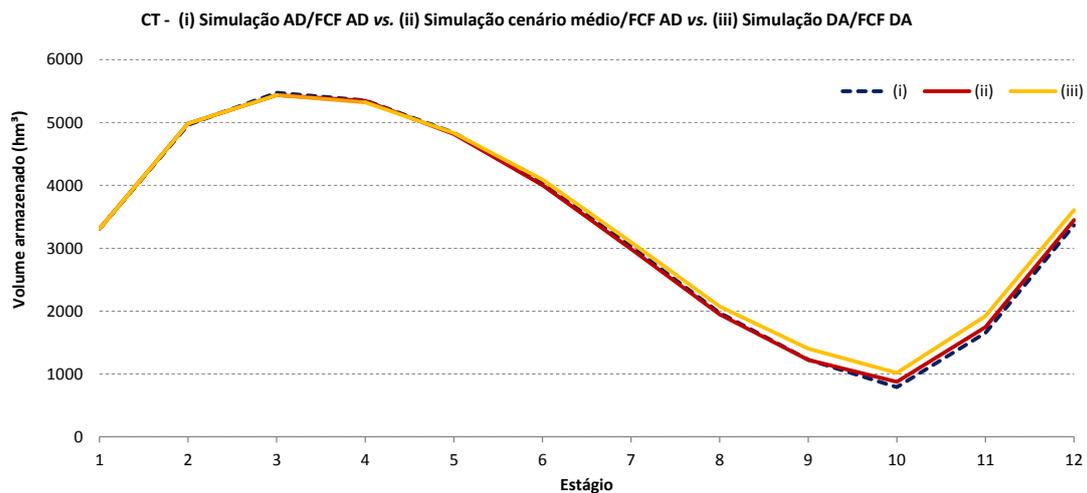


Figura 23 – Esperança da trajetória de armazenamento do reservatório

É curioso notar que a abordagem DA – (ii) – propiciou, ao mesmo tempo, armazenamentos mais altos e custos marginais e totais mais baixos que a abordagem VE – (iii). Deve-se atentar para o fato de que todos os resultados apresentados são *esperanças*.

Portanto, como o custo do déficit é muito mais alto que o custo da termoelétrica mais cara, os cenários onde há déficit elevam a média dos custos totais. Por outro lado, vários cenários onde é necessário gerar muita energia com a hidroelétrica, em função da má decisão para o despacho termoelétrico, levam a esperança do armazenamento para baixo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÃO

O planejamento de sistemas hidrotérmicos interligados como o existente no Brasil, é feito frente à incertezas relacionadas aos recursos disponíveis para geração e da própria demanda por energia elétrica. Como foi discutido neste trabalho, as incertezas no caso brasileiro se relacionam, principalmente, às vazões afluentes aos reservatórios. Nesta última década, no entanto, observa-se grande penetração de outras fontes renováveis no país, sendo a energia eólica o principal exemplo. Em outros países do mundo, com a penetração da geração fotovoltaica distribuída, este panorama de incertezas cresce ainda mais. Adicionalmente, o problema de despacho obriga que a decisão seja tomada com antecedência, antes que se possa observar quais serão as realizações destas incertezas.

A tarefa de determinar os montantes de geração das usinas se torna mais complexa com tais avanços. Tal tarefa, como foi discutido ao longo do trabalho, é realizada com o auxílio de modelos de otimização, sendo que existem modelos específicos para cada etapa do horizonte de planejamento. No médio-prazo a otimização é realizada a partir de uma técnica amostral, que produz boas políticas quando se considera diversos cenários de afluência. Tal lógica é baseada na *Teoria dos Grandes Números* e se mostrou – através da utilização destes modelos em diversos países – justificável para horizontes de estudo de vários anos, onde não faz sentido considerar um cenário específico. No entanto, tais políticas resultam em decisões desprotegidas contra os cenários de baixa probabilidade, isto é, os muito secos ou muito úmidos. O problema, mencionado anteriormente, reside no primeiro caso. A decisão é exposta à grandes arrependimentos, devidos aos altos custos de um atendimento emergencial, advindos do crescimento não-linear do custo de geração termoelétrica e, no caso extremo, do déficit de energia.

Na mesma linha, foi realizada a discussão à respeito da programação da operação. Ainda que se utilize todo um arcabouço teórico da programação estocástica para a determinação da política, o despacho é calculado de modo determinístico, o que poderia ser interpretado à luz do *Princípio do Equivalente Certo*, mas que contraria a própria natureza do problema de despacho hidrotérmico, isto é, da tomada de decisão sob-incerteza. Mostrou-se, através da *Desigualdade de Jensen* e das *Desigualdades fundamentais* que esta decisão contraria alguns princípios básicos da programação estocástica e, ainda mais, é contraditória às premissas que levaram, em um primeiro momento, à adoção do modelo estocástico para construção da política. Mostrou-se também, também através destes recursos teóricos, que o *Princípio do Equivalente Certo* não se aplica ao problema do despacho hidrotérmico. Deve-se salientar que existem, mesmo para horizontes mensais ou até mesmo semanais, grandes incertezas relacionadas às vazões afluentes. Ao se considerar os cenários das eólicas e solares, o problema se agrava.

Tal fato vai de encontro também, em uma reflexão um tanto despreziosa, (i) à utilização de modelos com aversão ao risco nos estudos de médio-prazo e (ii) aos ajustes operativos (despacho fora da ordem de mérito) comumente realizados no curto-prazo. No primeiro caso, é explícito no cálculo da política o objetivo de se proteger dos piores cenários, ao custo de se obter políticas mais conservadoras – isto é, mais caras –, sendo que na etapa da programação da operação esta premissa é desconsiderada ao se considerar um cenário médio para determinar o despacho. No segundo caso, além de se utilizar políticas mais caras, em virtude da aversão ao risco, são necessários reajustes no despacho hidrotérmico. Ajustes estes determinados além da decisão dos modelos de otimização. A pergunta é: não seria mais prudente – e prático – resolver um problema de programação da operação mais conservador, que eliminasse a necessidade dos ajustes no despacho hidrotérmico?

A discussão realizada neste trabalho, apesar das simulações realizadas, é bastante conceitual. Ainda assim, torna possível conjecturar, ou ao menos suspeitar, que existem melhores alternativas para se determinar o despacho hidrotérmico e, ainda mais, para se considerar as incertezas no cálculo da política. As principais mensagens e pontos para reflexão que este trabalho teve como objetivo levantar são sumarizadas abaixo:

- Apesar do cálculo da política ser feito através da programação estocástica, todos os problemas de otimização são resolvidos para cada cenário de modo independente. Por consequência, a política é construída com base na esperança dos resultados advindos dos cenários adotados, tanto quanto a execução da simulação final;
- O despacho é realizado com base em simulações determinísticas, enquanto que o problema é estocástico por natureza e que existem incertezas mesmo para horizontes curtos;
- Devido à característica não-linear dos custos imediatos, o despacho determinado com base no cenário médio resulta em um custo esperado elevado para a operação, devido à exposição aos cenários secos;
- Como decorrência direta do que foi discutido até então, fica evidente a necessidade da correta representação das incertezas – e em intervalos de tempo cada vez menores – aliada à representação individualizada dos reservatórios nos estudos de médio-prazo.

6.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

A seguir são apresentadas, de maneira informal, duas alternativas para a determinação do despacho hidrotérmico utilizando a moda dos cenários ou dos custos, ao invés da média. Por fim, apresenta-se a ideia da aplicação de regras lineares no despacho de curto-prazo.

6.2.1 Alternativas para a determinação do despacho

Utilizar a moda dos cenários de vazão: na etapa da programação da operação, ao invés de se utilizar a média dos cenários para a determinação do despacho hidrotérmico, utilizaria-se a moda. Também seria utilizada a moda para "acessar" a função de custo futuro. Conjectura-se que esta simples alteração seria capaz de proporcionar decisões um pouco mais robustas dado que, através da moda, o efeito otimista dos cenários úmidos é inibido. Pode-se argumentar, em um primeiro momento, que a solução não ofereceria proteção suficiente aos cenários severos, o que deveria ser comprovado através de análises quantitativas.

Utilizar a moda dos custos dos cenários: também na etapa da programação da operação, a decisão do despacho seria tomada com base na moda dos custos dos cenários. Em outras palavras, simularia-se diversas possíveis séries de vazão afluyente, calcularia-se a moda dos custos e tomaria-se a decisão de geração com base no despacho do cenário associado à esta moda. Conjectura-se que esta abordagem, pelo efeito da *Desigualdade de Jensen*, propiciaria menores custos esperados de operação. Outro detalhe interessante é a possibilidade da inserção de aversão ao risco na etapa do despacho, optando pela decisão associada a algum percentil previamente especificado dos custos de simulação. Mais uma vez, cuidadosas análises quantitativas são necessárias para comprovar tais hipóteses.

6.2.2 Planejamento da operação com regras lineares

Para ilustrar a aplicação das regras lineares de decisão no problema de planejamento da operação, retomemos o problema conceitual: caso o sistema fosse composto apenas por unidades termoelétricas e uma usina de fonte renovável (intermitente), o problema seria determinar o *commitment* das termoelétricas e, a cada hora, sabendo a demanda de energia desta hora, calcula-se os montantes de geração destas usinas sabendo o quanto a fonte renovável está produzindo – isto é, as termoelétricas atenderiam a demanda residual através da ordem de mérito. Este problema, exceto pela questão do *commitment*, foi tratado ao longo deste trabalho e pode ser formulado como decisão-acaso.

O problema conceitual, no entanto, começa a se tornar mais complicado a partir do momento em que se insere um segundo reservatório. Para explicar tal complicação, lembremos da estrutura de decomposição adotada para a formulação decisão-acaso: um PL *mestre* fornecia a decisão de geração (que agora seria o *commitment*) para os PLs escravos e estes determinavam o despacho da *única* hidroelétrica (que agora seriam *múltiplas*). Esta é uma contabilização fácil de se fazer para um reservatório, como exposto no parágrafo anterior. No entanto, caso o sistema fosse composto por dois reservatórios, surgiria a pergunta: qual reservatório utilizar ou, em outras palavras, quais os valores da água, dado que não se tem certeza sobre os cenários de afluência?

Atualmente, acredita-se que a solução para este problema seja determinar, em etapas horárias, o despacho para toda a semana, assumindo que se conhece o cenário dos recursos renováveis que irão se realizar – utiliza-se um cenário médio, como foi amplamente discutido. Porém, se para responder esta pergunta tivermos que assumir que sabemos as realizações dos cenários, a premissa de resolver o problema através da abordagem decisão-acaso não é mais válida. Pode-se perceber que operar hidroelétricas em um mundo decisão-acaso é uma tarefa conceitualmente complicada.

Para tanto, conjectura-se que uma saída é definir um problema de otimização onde a geração é função das realizações de demanda e renováveis. Têm-se S cenários, que variam ao longo do tempo, de variáveis aleatórias. Resolve-se um problema para o cenário médio e, para cada um dos S cenários, determina-se a geração total como dependente da realização daquele cenário e do resultado do problema de cenário médio. As variáveis de decisão são, agora, os fatores referentes à geração de cada um dos cenários. Em outras palavras, o que se determina através destes fatores é a geração residual, que é função dos cenários do problema.

Uma alteração na realização de um (ou alguns) cenário(s) seria suficiente para modificar – ainda que de modo infinitesimal – os fatores de cada um dos cenários e, por consequência, redespachar o sistema com base em uma *mesma decisão estratégica*. Deve-se lembrar que, no problema de planejamento, as variáveis aleatórias se encontram no lado direito das restrições. Portanto, uma interessante interpretação matemática desta abordagem é que se está calculando, na realidade, uma aproximação da *inversa da matriz básica* do problema, visto que a multiplicação desta matriz pelo lado direito das equações – supondo que este possa variar – oferece uma sensibilidade para as variáveis de decisão. Outro paralelo interessante seria com o comportamento de um *Controle Automático de Geração*, por exemplo, onde alterações na frequência do sistema são capazes alterar a excitação e aplicação de conjugado em um gerador, alterando sua entrega de potência elétrica – no caso da aplicação proposta, porém, as grandezas observadas seriam os cenários de variáveis aleatórias.

REFERÊNCIAS

- ANEEL, 2016. [Online]. Available: http://www.aneel.gov.br/sala-de-imprensa-exibicao-2/-/asset_publisher/zXQREz8EVIZ6/content/aneel-homologa-limites-do-pld-para-2017/656877
- R. Bellman, “The theory of dynamic programming,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 60, no. 6, pp. 503–515, 11 1954. [Online]. Available: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183519147>
- B. V. Bezerra, “Incorporação da incerteza dos parâmetros do modelo estocástico de vazões na política operativa do despacho hidrotérmico,” Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Abril 2015. [Online]. Available: http://www.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/1021510_2015_completo.pdf
- J. R. Birge and F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*. New York, NY: Springer New York, 2011. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-0237-4_1
- S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, 2004. [Online]. Available: http://stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf
- A. A. F. M. Carneiro, S. Soares, and P. S. Bond, “A large scale of an optimal deterministic hydrothermal scheduling algorithm,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 204–211, Feb 1990. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/49107/>
- M. F. Carvalho and S. Soares, “An efficient hydrothermal scheduling algorithm,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 2, no. 3, pp. 537–542, Aug 1987. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4335164/>
- L. C. da Costa Jr., “Representação de restrições de aversão a risco de cvar em programação dinâmica dual estocástica com aplicação ao planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos,” Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Novembro 2013. [Online]. Available: <http://www.cos.ufrj.br/index.php/pt-BR/publicacoes-pesquisa/details/15/2432>
- R. B. da Silva, “Métodos de análise da função de custo futuro em problemas convexos: aplicação nas metodologias de programação dinâmica estocástica e dual estocástica,” Tese de doutorado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Fevereiro 2016. [Online]. Available: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/2256>
- , “Processo iterativo de construção da função de custo futuro na metodologia pde-convexhull,” Dissertação de mestrado, Universidade Federal Juiz de Fora, Março

2011. [Online]. Available: http://www.ufjf.br/ppee/files/2011/04/Dissertacao_Rafael_Brandi.pdf
- V. L. de Matos, A. B. Philpott, and E. C. Finardi, “Improving the performance of stochastic dual dynamic programming,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 290, pp. 196 – 208, 2015. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042715002794>
- T. G. de Siqueira, “Comparação entre programação dinâmica estocástica primal e dual no planejamento da operação energética,” Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Junho 2003. [Online]. Available: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000313653>
- B. H. Dias, “Programação dinâmica estocástica e algoritmo de fechos convexos no planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos,” Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Julho 2010. [Online]. Available: http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/Busca_etds.php?strSecao=resultado&nrSeq=16409@1
- C. Donohue and J. Birge, “The abridged nested decomposition method for multistage stochastic linear programs with relatively complete recourse,” *Algorithmic Operations Research*, vol. 1, no. 1, 2006. [Online]. Available: <https://journals.lib.unb.ca/index.php/AOR/article/view/94>
- EPE, “Nota técnica: Atualização do valor do patamar Único de custo de déficit - 2016,” Empresa de Pesquisas Energéticas, Tech. Rep.
- , “Balanço energético nacional 2016,” Empresa de Pesquisas Energéticas, Tech. Rep.
- E. C. Finardi, “Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos utilizando processamento de alto desempenho,” Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Abril 1999. [Online]. Available: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/81082>
- E. C. Finardi, B. U. Decker, and V. L. de Matos, “An introductory tutorial on stochastic programming using a long-term hydrothermal scheduling problem,” *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 24, no. 3, pp. 361–376, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s40313-013-0039-9>
- A. Gjelsvik, B. Mo, and A. Haugstad, *Long- and Medium-term Operations Planning and Stochastic Modelling in Hydro-dominated Power Systems Based on Stochastic Dual Dynamic Programming*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 33–55. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02493-1_2

- J. Kelman, R. Kelman, and M. V. F. Pereira, “Energia firme de sistemas hidrelétricos e usos múltiplos dos recursos hídricos,” *Revista da Associação Brasileira de Recursos Hídricos (RBRH)*, vol. 9, no. 1, pp. 189–198, 2004. [Online]. Available: http://www.kelman.com.br/pdf/energia_firme_sistemas-abrh.pdf
- A. S. Kligerman, “Operação ótima de subsistemas hidrotérmicos interligados utilizando programação dinâmica estocástica dual,” Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Fevereiro 1992. [Online]. Available: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000046629&opt=4>
- M. E. P. Maceira and J. M. Damázio, “The use of par(p) model in the stochastic dual dynamic programming optimization scheme used in the operation planning of the brazilian hydropower system,” in *2004 International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems*, Sept 2004, pp. 397–402. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1378721/>
- M. Maceira, J. Kelman, and J. Damázio, “Utilização de modelos par para a simulação e previsão de séries hidrológicas mensais,” in *VII Simpósio Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos*, 1987. [Online]. Available: http://www.kelman.com.br/pdf/utilizacao_de_modelos/utilizacao-de_modelos_par.pdf
- M. Maceira, L. Terry, F. Costa, J. Damázio, and A. Melo, “Chain of optimization models for setting the energy dispatch and spot price in the brazilian system,” in *14th PSCC Proceedings*, 2002. [Online]. Available: http://simsee.org/simsee/biblioteca/Brasil/ChainOfOptModelsForSettingTheEnergyDispatchAndSpotPriceinBrazil_2002.pdf
- M. Maceira, V. Duarte, D. Penna, L. Moraes, and A. Melo, “Ten years of application of stochastic dual dynamic programming in official and agent studies in brazil description of the newave program,” in *16th Power Systems Computation Conference*, 2008. [Online]. Available: <http://leonardomoraes.com.br/artigos/MacDuaPenMorMel2008.pdf>
- A. L. M. Marcato, “Representação híbrida de sistemas equivalentes e individualizados para o planejamento da operação de médio prazo de sistemas de potência de grande porte,” Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Maio 2002. [Online]. Available: http://www.ufjf.br/andre_marcato/files/2010/06/versaofinal.doc
- L. Martinez and S. Soares, “Primal and dual stochastic dynamic programming in long term hydrothermal scheduling,” in *IEEE PES Power Systems Conference and Exposition, 2004.*, Oct 2004, pp. 1283–1288 vol.3. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1397703/>
- C. N. Metello, “Representação analítica da função de custo imediato no sddp,” Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Agosto 2016. [Online]. Available: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/28092/28092.PDF>

- T. A. Neto, C. Cotia, M. Pereira, and J. Kelman, “Comparison of stochastic and deterministic approaches in hydrothermal generation scheduling,” in *IFAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy Systems*, 1985, pp. 201–206. [Online]. Available: http://www.kelman.com.br/pdf/camparion_of_stochastic/comparison%20of%20stochastic%20and%20deterministic.pdf
- ONS, “Programa mensal da operação: Relatório de previsão de vazões e geração de cenários de afluências,” Tech. Rep.
- , “Programa mensal da operação: Relatório de previsão de vazões e geração de cenários de afluências (revisão da semana 5),” Tech. Rep.
- M. V. F. Pereira, “Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 11, no. 3, pp. 161 – 169, 1989. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0142061589900252>
- M. V. F. Pereira and L. M. V. G. Pinto, “Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning,” *Mathematical Programming*, vol. 52, no. 1, pp. 359–375, 1991. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01582895>
- , “Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: A decomposition approach,” *Water Resources Research*, vol. 21, no. 6, pp. 779–792, 1985. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1029/WR021i006p00779>
- M. V. F. Pereira, G. C. Oliveira, C. C. G. Costa, and J. Kelman, “Stochastic streamflow models for hydroelectric systems,” *Water Resources Research*, vol. 20, no. 3, pp. 379–390, 1984. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1029/WR020i003p00379>
- M. V. F. Pereira, L. M. V. G. Pinto, S. H. F. Cunha, L. A. Terry, and A. Mossé, “Modelos computacionais para planejamento e operação de sistemas hidrotérmicos de grande porte,” *SBA: Controle e Automação*, vol. 1, no. 1, pp. 31–41, 1987. [Online]. Available: <http://www.sba.org.br/revista/volumes/v1n1/v1n1a06.pdf>
- A. Philpott and Z. Guan, “On the convergence of stochastic dual dynamic programming and related methods,” *Operations Research Letters*, vol. 36, no. 4, pp. 450 – 455, 2008. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637708000308>
- A. Philpott, V. de Matos, and E. Finardi, “On solving multistage stochastic programs with coherent risk measures,” *Optimization Online*, Agosto 2012. [Online]. Available: http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2012/08/3569.pdf
- T. P. Ramos, “Modelo individualizado de usinas hidrelétricas baseado em técnicas de programação não linear integrado com o modelo de decisão estratégica,” Dissertação

- de mestrado, Universidade Federal Juiz de Fora, Março 2011. [Online]. Available: http://www.ufjf.br/ppee/files/2011/04/Dissertacao_Tales_Pulinho.pdf
- , “Modelagem híbrida para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos considerando as não linearidades das usinas hidráulicas,” Tese de doutorado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Fevereiro 2015. [Online]. Available: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/233>
- T. P. Ramos, A. L. M. Marcato, R. B. da Silva Brandi, B. H. Dias, and I. C. da Silva Junior, “Comparison between piecewise linear and non-linear approximations applied to the disaggregation of hydraulic generation in long-term operation planning,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 71, pp. 364 – 372, 2015. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014206151500160X>
- D. Rani and M. M. Moreira, “Simulation–optimization modeling: A survey and potential application in reservoir systems operation,” *Water Resources Management*, vol. 24, no. 6, pp. 1107–1138, 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s11269-009-9488-0>
- H. Seifi and M. S. Sepasian, *Electric Power System Planning: Issues, Algorithms and Solutions*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17989-1_1
- A. Shapiro, “Analysis of stochastic dual dynamic programming method,” *European Journal of Operational Research*, vol. 209, no. 1, pp. 63 – 72, 2011. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710005448>
- E. L. Silva, *Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica*. Edição do Autor, 2012.
- F. Thomé, “Representação das não-convexidades no planejamento da operação hidrotérmica utilizando pdde,” Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Junho 2013. [Online]. Available: <https://pdfs.semanticscholar.org/973e/1081609a72da920aa653633137efb74daa70.pdf>
- R. J.-B. Wets, *Stochastic Programming Models: Wait-and-See Versus Here-and-Now*. New York, NY: Springer New York, 2002, pp. 1–15. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-9256-9_1
- M. Zambelli, T. G. Siqueira, M. Cicogna, and S. Soares, “Deterministic versus stochastic models for long term hydrothermal scheduling,” in *2006 IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2006, pp. 7 pp.–. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1709556/>

- M. S. Zambelli and S. Soares, "A predictive control approach for long term hydrothermal scheduling," in *2009 IEEE/PES Power Systems Conference and Exposition*, March 2009, pp. 1–8. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4840239/>
- M. S. Zambelli, I. Luna, and S. Soares, "Long-term hydropower scheduling based on deterministic nonlinear optimization and annual inflow forecasting models," in *2009 IEEE Bucharest PowerTech*, June 2009, pp. 1–8. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5281782/>
- M. S. Zambelli, S. Soares, and D. da Silva, "Deterministic versus stochastic dynamic programming for long term hydropower scheduling," in *2011 IEEE Trondheim PowerTech*, June 2011, pp. 1–7. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6019379/>