



## SOBRE ORDENS E GRAFOS DE INTERVALO

Fabiano de Souza Oliveira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter  
Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro  
Março de 2011

SOBRE ORDENS E GRAFOS DE INTERVALO

Fabiano de Souza Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

---

Prof. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

---

Prof. Carlos Eduardo Ferreira, Dr. rer. nat.

---

Prof. Célia Picinin de Mello, D.Sc.

---

Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2011

Oliveira, Fabiano de Souza

Sobre Ordens e Grafos de Intervalo/Fabiano de Souza  
Oliveira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XIII, 78 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 74 – 78.

1. Contagem de Intervalo. 2. Dimensão de Ordens.  
3. Grafos de Intervalo. 4. Interval Count. 5. Ordens  
de Cliques. 6. Ordens de Intervalo. I. Szwarcfiter,  
Jayme Luiz *et al.* II. Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e  
Computação. III. Título.

*Dedicado a Cristiane, Melissa e  
Olavo, por todo amor e  
compreensão.*

# Agradecimentos

Seria de se esperar que esta seção de agradecimentos fosse semelhante com a seção correspondente da dissertação de mestrado, devido à natureza de ambos os trabalhos e das condições que os permitem. De fato, aquela poderia ser replicada aqui, sem nenhum esforço de revisão, e ainda assim estaria válida. No entanto, talvez pelo fato das matérias de doutorado terem se seguido à defesa da dissertação – o que provocou um certo efeito de continuidade do mestrado – sinto que a minha dedicação a esta importante seção tenha sido negligenciada. Como consequência, houve alguns agradecimentos omissos ou simplificados na versão anterior que me impelem a uma reformulação.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, criador do Universo, por dotar os homens de vida e da capacidade de se alegrarem ao admirar a Criação. O que é o presente estudo, que trata de propriedades muito particulares deste Universo, senão o resultado de tal capacidade? Em particular, O agradeço pelas pessoas que cruzaram a minha existência e que sempre me incentivaram ou inspiraram a chegar até aqui.

Agradeço a meus pais, que me proveram um lar e uma infância. Mesmo possuindo condições financeiras muito limitadas, nunca pouparam esforços para que necessidades materiais oriundas dos estudos constituíssem um empecilho para que eu continuasse, muitas das vezes sacrificando seus próprios interesses. Lembro-me quando meu pai me mostrou uma pasta universitária que ganhou de um engenheiro da empresa em que ele trabalhava. Esta pasta foi guardada por ele por muitos anos até que ele me desse, fazendo isto com a intenção de me servir de incentivo a estudar e me tornar um dia, quem sabe, um engenheiro. Embora meu bacharelado tenha sido em Computação, espero com o mestrado e doutorado ter lhe honrado o presente.

Agradeço aqueles que me incentivaram a gostar de Computação e de Matemática. A paixão pela Computação veio com a insistência de meu primo Marcelo para que eu ficasse com um computador MSX que ele havia aposentado quando eu tinha por volta dos meus doze anos. A promessa de que eu ia me interessar pelo assunto, de fato, se cumpriu. Já a Matemática, o meu interesse por ela surgiu durante uma aula de quarta-série primária, quando a professora respondeu a pergunta de um colega. Ele tinha ouvido falar do seu irmão mais velho que existiam números negativos e

queria confirmar com a professora que não se tratava de uma brincadeira. Por cerca de dez minutos, antes de voltar ao assunto da aula que havia sido interrompida pela pergunta fora do propósito, ela discursou que não existiam apenas números negativos, mas também aqueles chamados de racionais, irracionais e complexos, dando alguns exemplos. Achei fascinantemente chocante a declaração de que, por exemplo, a diagonal de um quadrado nunca poderia ser medida com exatidão por nenhuma régua, para qualquer razão de inteiros tomada como unidade básica de medida. Este parêntese na aula da professora Edézia terminou com a declaração de que “isto tudo nós veríamos ao longo dos muitos anos que se seguiriam”. Isto me provocou imediatamente a certeza de que eu caminharia até “o final”, de modo que a minha curiosidade fosse satisfeita. Portanto, ao meu primo Marcelo e à minha professora Edézia, o meu muito obrigado.

Desde então, foram muitos os professores com quem tive o privilégio de encontrar. As formações e competências dos professores nos assuntos que me interessavam cresciam com o passar dos anos. Contudo, todos, de uma maneira ou de outra, contribuíram para o meu contínuo interesse. Agradecer a todos, nomeadamente, é uma tarefa impossível. Mas é exatamente isto que eu gostaria de fazer, e tome-o simbolicamente por feito. Impossível, contudo, é não destacar dois professores que me incentivaram sobremaneira: meus orientadores, professora Márcia e professor Jayme.

Agradeço a eles não somente pelas contribuições que fizeram neste trabalho que, além de serem inúmeras, foram fundamentais para o seu desenvolvimento. As respectivas reconhecidas reputações de ambos falam por si. Friso, porém, que meu agradecimento se estende à minha formação sob um ponto de vista mais amplo. Ao longo dos anos, aprendi muito com o convívio. De certa forma, creio que um pouco de Márcia e Jayme se incorporaram em minhas atitudes. Além disso, agradeço pelo apoio total que recebi durante todo este tempo. Não houve uma solicitação, um problema, uma pergunta que não fossem devidamente endereçadas por eles.

De um modo geral, agradeço ao Estado brasileiro pelo financiamento da minha educação. Desde a alfabetização até o doutorado, foram 24 anos de escola pública. Em meio a tantas críticas ao sistema educacional, perfeitamente embasadas em diversos aspectos, sinto-me na obrigação de testemunhar publicamente que o Estado se fez presente em minha vida. Para mim, filho deste solo, de fato foi Mãe gentil. Em particular, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro durante o mestrado e doutorado.

Por fim, agradeço a minha família Cristiane, Melissa e, agora, Olavo por toda compreensão. Vocês constituem para mim o exato complemento do meu trabalho para que a minha vida seja realizada.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## SOBRE ORDENS E GRAFOS DE INTERVALO

Fabiano de Souza Oliveira

Março/2011

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta tese tem como foco o estudo de algumas propriedades estruturais de grafos de intervalo e ordens de intervalo e acerca da complexidade em reconhecer tais propriedades. Em particular, apresentamos os seguintes resultados: (i) fornecemos caracterizações de cliques extremos e grafos representáveis por cliques homogêneas; (ii) introduzimos uma nova dimensão de ordens chamada dimensão linear-intervalar, mostrando sua conexão com o problema de reconhecimento de grafos PI. Mostramos que a dimensão linear-intervalar é um invariante de comparabilidade e descrevemos uma caracterização para grafos PI em termos desta dimensão. Fornecemos exemplos de ordens possuindo dimensão linear-intervalar arbitrária; (iii) provemos o estado-da-arte do problema de contagem de intervalos, apresentando os resultados existentes na literatura à respeito; e (iv) fornecemos algoritmos eficientes para a computação da contagem de intervalos de generalizações de grafos de limiar, além de apresentar outras propriedades relacionadas à contagem de intervalos de grafos e ordens.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## ON INTERVAL ORDERS AND GRAPHS

Fabiano de Souza Oliveira

March/2011

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

This thesis has as focus the study of some structural properties of interval graphs and interval orders and the complexity aspect of recognizing such properties. In particular, we present the following results: (i) we provide characterizations of extreme cliques and homogeneously-clique representable graphs; (ii) we introduce a new order dimension named linear-interval dimension, showing the close existing relation to the recognition problem of PI graphs. We show that the linear-interval dimension is a comparability invariant and we describe a characterization of PI graphs in terms of such a concept. We provide examples of orders having arbitrarily large linear-interval dimension values; (iii) we provide the state-of-the-art knowledge about the interval count problem, by presenting the known results in literature regarding this subject; and (iv) we provide efficient algorithms for the computation of the interval count of generalizations of threshold graphs, besides presenting other properties related to the interval count of graphs and orders.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definições e notações . . . . .	5
1.2 Contribuições desta Tese . . . . .	10
<b>2 Cliques Extremas</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 Caracterização de cliques extremas . . . . .	16
2.3 Grafos por cliques homogêneas . . . . .	21
<b>3 Dimensão Linear-Intervalar</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução . . . . .	25
3.2 Dimensão linear-intervalar . . . . .	27
3.3 Ordens com dimensão linear-intervalar arbitrária . . . . .	31
3.4 Uma caracterização para grafos PI . . . . .	33
3.5 Resultados de complexidade . . . . .	34
<b>4 Introdução ao Problema da Contagem de Intervalos</b>	<b>35</b>
4.1 Introdução . . . . .	35
4.2 Contagem de intervalos igual a um . . . . .	37
4.3 Contagem de intervalos igual a dois . . . . .	39
4.4 Contagem de intervalos com valor arbitrário . . . . .	41
4.5 Contagem de intervalos restrita a classes . . . . .	44
4.6 Relação com o número de cliques . . . . .	45
4.7 Problemas relacionados . . . . .	47
<b>5 Avanços no Problema da Contagem de Intervalos</b>	<b>49</b>
5.1 Introdução . . . . .	49
5.2 Modelos de intervalo com extremos inteiros e distintos . . . . .	50

5.3	Natureza combinatória do problema . . . . .	53
5.4	Contagem de intervalos restrita a classes . . . . .	54
5.5	Ordens livres de touro estendido . . . . .	59
5.6	Grafos TP . . . . .	62
5.7	Grafos livres de touro estendido . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Lista de Figuras

1.1	Os eventos, o grafo de intervalo correspondente e uma coloração ótima.	2
1.2	Possível solução se o evento 6 (ou a sessão 1 – 5 – 6) deve ser o primeiro.	3
1.3	Minimamente, dois tamanhos de intervalo são necessários. . . . .	4
1.4	Conjunto de votos e respectiva ordem de preferências universais. . . .	4
1.5	Grafo resultante da substituição de $v$ por $H$ . . . . .	6
1.6	Grafo de intervalo e um de seus modelos de intervalo. . . . .	7
1.7	Um grafo PI e um de seus modelos PI. . . . .	8
1.8	Exemplos de ordens. . . . .	8
1.9	Exemplo de um modelo PI. . . . .	10
2.1	Modelo de intervalo cuja ordem de cliques é $C_1 \prec C_2 \prec \dots \prec C_6$ . . . .	14
2.2	Uma PQ-tree do grafo definido na Figura 1.6. . . . .	15
2.3	Lista de subgrafos induzidos proibidos para um vértice ser extremo. .	16
2.4	Lista de subgrafos induzidos proibidos para uma clique ser extrema. .	17
2.5	Subgrafo do tipo (a). . . . .	18
2.6	Subgrafo do tipo (b). . . . .	18
2.7	Caso em que $C_1 \cap C \supset C_2 \cap C$ . . . . .	20
2.8	Caso em que $C_1 \cap C = C_2 \cap C$ . . . . .	20
3.1	Modelo de permutação de um ciclo de tamanho 4. . . . .	25
3.2	Grafo de trapézios e um de seus modelos. . . . .	26
3.3	Um modelo linear-intervalar (3, 2). . . . .	28
3.4	Exemplo da operação de enquadramento. . . . .	29
3.5	Ordem $S_n$ . . . . .	31
3.6	Ordem $I_4$ e um de seus modelos de intervalo. . . . .	31
3.7	Ordem $I_p^q$ . . . . .	32
4.1	Exemplo de ordem $P$ com $\theta(P) = (1, 2)$ . . . . .	40
4.2	Definição da ordem $Q_r$ , para todo $r \geq 3$ . . . . .	42
4.3	Diagrama de inclusão entre as classes. . . . .	45
4.4	Grafo auxiliar $G_i$ , para todo $i \geq 1$ . . . . .	46
4.5	Um dos modelos de intervalo do grafo $G_i$ , $i \geq 1$ . . . . .	46

5.1	O grafo touro estendido, para $n \geq 1$ . . . . .	55
5.2	Diagrama de Inclusão. . . . .	55
5.3	A definição de $G_n$ , para todo $n \geq 1$ . . . . .	57
5.4	Exemplos de grafos $G$ tais que $u(G) = 1$ e $u(G) = 0$ . . . . .	64
5.5	Exemplo esquemático da ordem $P$ e subordens $P(1), \dots, P(\omega)$ . . . . .	67
5.6	Exemplo esquemático de $P_1(i)$ ( $P$ definido na Figura 5.5). . . . .	67
5.7	Exemplo esquemático de $P_2(i)$ ( $P$ definido na Figura 5.5). . . . .	68

# Lista de Tabelas

3.1	Complexidade de reconhecimento de dimensão linear-intervalar. . . .	34
-----	---	----

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo de alguns problemas relacionados a grafos e ordens de intervalo. A saber, estudamos o problema das cliques extremas de grafos de intervalo, a dimensão linear-intervalar de ordens em geral (que consiste da busca de realizadores intervalares de ordens com certas propriedades), grafos representáveis por cliques homogêneas e contagem de intervalos de grafos e ordens. Tais problemas serão definidos e apresentados apropriadamente no decorrer do trabalho. Como veremos, a motivação para o estudo destes problemas estruturais e de difícil abordagem é essencialmente a obtenção de um entendimento maior acerca destas classes de grafos e ordens. Devido à grande aplicabilidade dos grafos e ordens de intervalo, este estudo se faz necessário para uma melhor elaboração e avaliação de algoritmos para problemas do mundo real.

Existem muitos estudos sobre grafos e ordens de intervalo, tanto pelo interesse puramente teórico, quanto pelo papel central que desempenham em certas aplicações [26, 30, 31, 47]. Eles surgem em muitas aplicações práticas que requerem a construção de uma linha do tempo onde, a cada evento relacionado ao problema, corresponde um intervalo representando a sua duração. Conforme [46], dentre tais aplicações, estão aquelas relacionadas a planejamento [1], alocação de tarefas [45], arqueologia [37], lógica temporal [2], diagnóstico médico [44] e desenho de circuitos [54]. Há também aplicações não relacionadas com eventos numa linha de tempo. Nesta categoria, estão aplicações na área de genética [3], problema do mapeamento físico de DNA [9, 36] e psicologia comportamental [15].

A seguir, tratamos de descrever aplicações idealizadas a partir dos temas abordados nesta tese, com o mero intuito de servir como ilustração.

Como exemplo inicial, evidenciando o papel de grafos de intervalo na modelagem de problemas, suponha que numa determinada empresa exista o registro de um conjunto de eventos (como reuniões, apresentações em *workshops*, etc.), cada qual com horário previsto de início e fim. Deseja-se atribuir a cada evento uma sala para sua realização, naturalmente de tal maneira que a dois eventos com conflito de

horário sejam atribuídas salas distintas e ainda que o número total de salas utilizadas seja o menor possível. A Figura 1.1 (a) exemplifica um possível conjunto de eventos, representando cada um por um intervalo de tempo cujos extremos são os horários de início e fim. Podemos modelar tal problema por um grafo  $G$ , no qual cada vértice corresponde a um evento e existe uma aresta entre dois vértices quando os eventos correspondentes a estes vértices possuírem conflito de horário, o que está feito na Figura 1.1 (b). Por construção,  $G$  é um grafo de intervalo. O número mínimo de salas que são necessárias para responder à questão é precisamente o número cromático de  $G$  ou, equivalentemente no caso de grafos de intervalo, o tamanho da maior clique de  $G$ . O *número cromático* de um grafo é o menor número de cores distintas necessárias para colorir os vértices deste grafo de modo que a vértices adjacentes sejam atribuídas cores distintas (claramente, nota-se a correspondência entre “cores” e “salas”). A Figura 1.1 (c) mostra uma coloração ótima de tal grafo (cada vértice foi rotulado com um número de cor) que, no nosso exemplo, corresponde a 4. Este valor pode ser encontrado em tempo linear para grafos de intervalo [6].

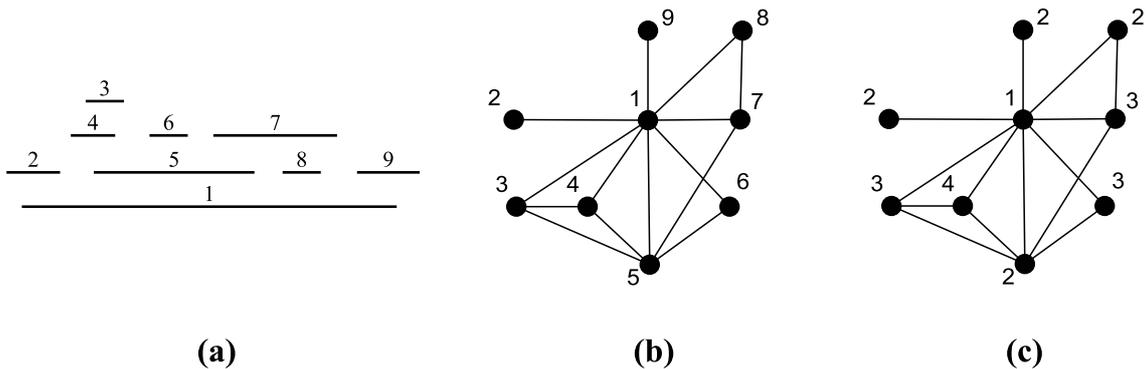


Figura 1.1: Os eventos, o grafo de intervalo correspondente e uma coloração ótima.

Outras questões relacionadas à alocação de eventos com respostas menos diretas podem ser de interesse. Por exemplo, considere a situação em que, depois de uma alocação de salas, divulgou-se a programação a todos os interessados. Considere também que o comparecimento aos eventos está condicionado ao ato prévio de inscrição. Seja  $G$  o grafo de interseção de eventos definido como anteriormente. Suponha que, após o término das inscrições e já bem próximo da realização dos eventos, surjam restrições sobre a disponibilidade dos organizadores ou das salas de cada evento que, conseqüentemente, afetarão os horários dos eventos. O objetivo é refazer a alocação de eventos de forma que, além de satisfazer as restrições que apareceram, também mantenham as relações de conflitos que existiam. Claramente, por trás de tal objetivo existem duas preocupações. A primeira, é não prejudicar os participantes que estão interessados em dois ou mais eventos que, na programação original, não tinham conflito (o que ocorrerá se na nova programação tais eventos

aparecerem em sessões conflitantes). Além disso, há a preocupação de não causar arrependimento aos que *não* participam dos eventos, que desistiram da inscrição por existirem dois ou mais eventos que, na programação original, eram conflitantes (o que acontecerá se na realidade tais eventos não ocorrerem desta maneira). Tais preocupações são válidas no sentido de manter a reputação da organização dos eventos, tendo-se em vista a credibilidade das próximas organizações de eventos. Em outras palavras, o problema é o de reatribuir horários de início e fim aos eventos de tal maneira que as restrições adicionais sejam satisfeitas e que o grafo  $G$  definido conforme acima seja o mesmo para os conjuntos anterior e atual de alocação de eventos. Se uma destas restrições for que um determinado evento deva ser o primeiro a começar dentre todos, então temos o problema de vértice extremo (resolvido por Gimbel [29]). Na Figura 1.2, observamos uma possível solução para o caso de aparecer a restrição de que o evento 6 deva ser o primeiro dentre todos os eventos a começar. Por outro lado, se a restrição for a de que uma determinada sessão paralela (isto é, um conjunto maximal de eventos dois-a-dois conflitantes) seja a primeira a acontecer, então temos o problema de cliques extremas (abordado no Capítulo 2). A transformação exibida pela Figura 1.2 também satisfaz o caso em que a restrição seja a de que a sessão paralela formada pelos eventos 1, 5 e 6 seja a primeira dentre todas.

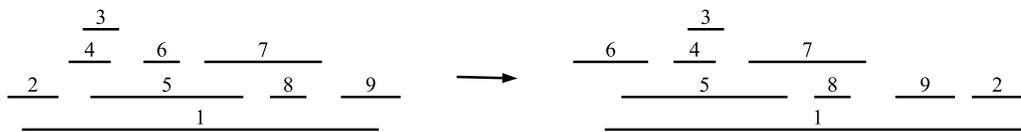


Figura 1.2: Possível solução se o evento 6 (ou a sessão 1 – 5 – 6) deve ser o primeiro.

Quando há a preocupação de distribuir de maneira mais justa o tempo alocado a cada evento, pode aparecer a restrição de minimizar o número de durações distintas de eventos. Em outras palavras, o problema é reajustar os horários dos eventos para que todos eles tenham a mesma duração; caso isto não seja possível, uniformizar tais durações tanto quanto for possível. Este é o problema de contagem de intervalos (abordado nos Capítulos 4 e 5). A Figura 1.3 apresenta uma transformação que minimiza o número de durações distintas do conjunto de eventos que estamos tomando como exemplo. Note que, para encontrar um modelo que utiliza o menor número de tamanhos distintos de intervalo, a ordem entre os intervalos pode ser mudada. Com efeito, no caso específico do nosso exemplo, é possível mostrar que não é possível encontrar tal modelo sem alterar a ordem entre eles.

Para motivar o estudo das dimensões de ordens, usaremos um tipo de aplicação bem diferente, descrito a seguir.

Suponha um sistema de votação em que, ao invés de cada eleitor votar em um único candidato, ele deva prover a sua ordem de preferência entre os candidatos, da-

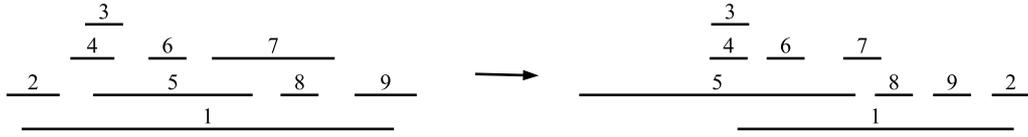


Figura 1.3: Minimamente, dois tamanhos de intervalo são necessários.

quele de menor preferência ao de maior. Num sistema como este, suponha que após uma eleição, construiu-se para determinado propósito uma ordem  $P$  entre os candidatos na qual um candidato  $A$  precede um candidato  $B$  precisamente quando todos os eleitores preferem  $B$  a  $A$ . Em outras palavras, esta ordem representa as preferências comuns, ou universais, dos eleitores em relação aos candidatos. Veja a Figura 1.4 (as ordens representando os votos sobre o conjunto de candidatos  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e a respectiva ordem de preferências universais estão apresentadas pelos seus diagramas de Hasse; consulte a definição de diagrama de Hasse na página 8).

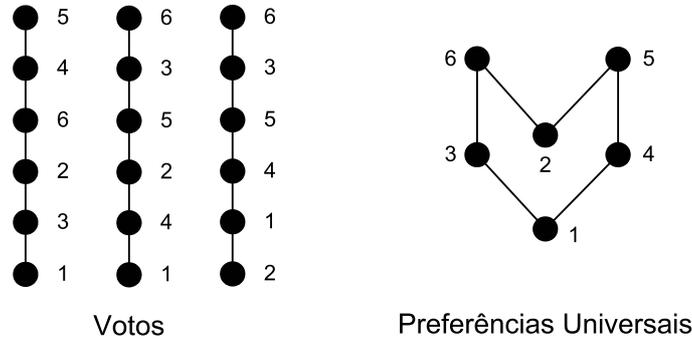


Figura 1.4: Conjunto de votos e respectiva ordem de preferências universais.

Suponha que todos os votos, por um problema técnico, tenham sido perdidos e o único dado que restou sobre toda a votação foi a tal ordem  $P$ . Obviamente, não é possível reconstruir de maneira única o conjunto de votos a partir de  $P$ . No entanto, uma questão interessante pode ser lançada: qual o número mínimo de eleitores que são necessários para gerar  $P$ ? Dito de outra maneira, o problema é determinar a cardinalidade do menor conjunto de ordens lineares sobre o conjunto de candidatos tal que a respectiva ordem de preferências universais resulte precisamente em  $P$ . Esta cardinalidade é chamada de dimensão linear de  $P$ . No exemplo da Figura 1.4, este número é no máximo três, visto que aquele conjunto de três votos de fato gera aquela ordem de preferências universais  $P$ . A questão é se não existe um outro conjunto de dois votos que gere  $P$ . Na verdade, para este exemplo, é possível mostrar que três é de fato o número mínimo de votos para gerar  $P$  e, portanto, três é a dimensão linear de  $P$ . Neste trabalho, tratamos de uma generalização do conceito de dimensão, que chamamos de dimensão linear-intervalar (abordado no Capítulo 3).

## 1.1 Definições e notações

As definições e notações descritas nesta seção são aquelas que serão encontradas em diferentes partes ao longo do trabalho, enquanto definições e notações específicas para determinado capítulo ou seção serão apresentadas naquele escopo. Para notações omitidas no trabalho, refira-se a [5] para a teoria de grafos, [16, 51] para complexidade de algoritmos, [43] para a teoria de grafos de interseção, [53] para a teoria geral de ordens, e [26, 31] para uma discussão especializada sobre a teoria de grafos e ordens de intervalo.

### Teoria de Grafos

Um *grafo simples*  $G$  consiste de um par ordenado  $(V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito de elementos denominados *vértices* e  $E(G)$  é um conjunto finito de elementos denominados *arestas*, tal que cada aresta é um par não-ordenado de vértices distintos. Uma aresta formada por  $x \in V(G)$  e  $y \in V(G)$  é representada por  $xy \in E(G)$  ou  $yx \in E(G)$ . Note que um grafo simples não possui nem laços (arestas contendo vértices não-distintos), nem multi-arestas (arestas idênticas) por definição. Em todo o trabalho, trataremos apenas de grafos simples, de maneira que daqui em diante utilizaremos somente o nome *grafo* para nos referir a um grafo simples. Se  $uv$  é uma aresta de um grafo, então dizemos que  $u$  e  $v$  são *adjacentes* e que  $uv$  é *incidente* a  $u$  e  $v$  ou ainda que  $uv$  *liga* os vértices  $u$  e  $v$ . Um vértice  $v \in V(G)$  é *universal* a um conjunto de vértices  $W \subseteq V(G)$  se  $v$  é adjacente a cada vértice  $w \in W \setminus \{v\}$ . Quando há um grafo  $G$  definido no contexto, assume-se que  $n = |V(G)|$  e  $m = |E(G)|$  se nada diferente for dito.

A *vizinhança aberta* (ou, simplesmente, *vizinhança*) de  $v \in V(G)$  é o conjunto  $N(v) = \{w \mid vw \in E(G)\}$ . A *vizinhança fechada* de  $v$  é definida pelo conjunto  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ .

O grafo  $\overline{G}$  *complemento* de  $G$  é o grafo tal que  $V(\overline{G}) = V(G)$  e  $E(\overline{G}) = \{uv \mid \{u, v\} \subseteq V(G), u \neq v \text{ e } uv \notin E(G)\}$ . A *substituição* em  $G$  de  $v$  por um grafo  $G'$  é o grafo  $H$  obtido da união  $(G \setminus v) \cup G'$ , acrescido das arestas  $uw$  tais que  $u \in V(G \setminus v)$ ,  $uv \in E(G)$  e  $w \in V(G')$ . Dizemos que  $H$  é obtido de  $G$  *substituindo-se*  $v$  por  $G'$ . Na Figura 1.5, encontra-se um exemplo de um grafo resultante de uma substituição.

Uma *orientação*  $F$  de um grafo  $G$  é um conjunto de pares ordenados de vértices tal que se  $xy \in E(G)$ , então ou  $xy \in F$ , ou  $yx \in F$ . Além disso,  $F$  é dito ser uma *orientação transitiva* se  $\{xy, yz\} \subseteq F$  implicar que  $xz \in F$ .

Dado um grafo  $G$  e  $S \subseteq V(G)$ , o *subgrafo induzido* de  $G$  por  $S$ , denotado por  $G[S]$ , é o grafo  $H$  que se obtém de  $G$  pela remoção dos vértices em  $V(G) \setminus S$  e todas

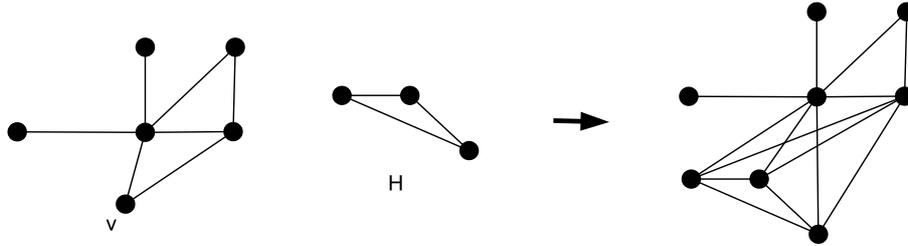


Figura 1.5: Grafo resultante da substituição de  $v$  por  $H$ .

as arestas incidentes a tais vértices. Diremos também que  $S$  *induz*  $H$  em  $G$ . Um grafo  $G$  é dito *ser livre* de um grafo  $G'$  se  $G'$  não é um subgrafo induzido de  $G$ .

Um *grafo completo* é aquele no qual qualquer par de vértices é uma aresta. Denotamos um grafo completo com  $n$  vértices por  $K_n$ . Uma *clique* de um grafo é um subconjunto maximal de seus vértices que induz neste grafo um grafo completo. Denotamos por  $q(G)$  o número de cliques de um grafo  $G$ . Um vértice  $v \in V(G)$  é dito ser um *vértice simplicial* se  $N[v]$  é uma clique de  $G$ . Se uma clique contém um vértice simplicial, então ela é chamada de *clique simplicial*.

Um grafo *bipartido completo* é um grafo  $G$  cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos  $X \cup Y = V(G)$  de modo que  $uv \in E(G)$  precisamente quando  $u$  e  $v$  estão em partes distintas. Denotamos tal grafo por  $K_{m,n}$ , onde  $m = |X|$  e  $n = |Y|$ .

Sejam  $G$  um grafo e  $v \in V(G)$ . Um caminho induzido com  $n$  vértices é representado por  $P_n$ . Dizemos que  $G$  é um grafo *conexo* quando para existir um caminho entre qualquer par de vértices de  $G$ . Caso contrário,  $G$  é dito ser *desconexo*. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo induzido maximal em relação à propriedade de ser conexo.

## Grafos de Intervalo

Seja  $\mathcal{F}$  uma família de conjuntos. O *grafo de interseção* de  $\mathcal{F}$  é o grafo obtido representando-se por um vértice distinto cada conjunto de  $\mathcal{F}$  e fazendo dois de tais vértices adjacentes precisamente quando os conjuntos correspondentes têm interseção não-vazia. Note que, dada uma família  $\mathcal{F}$ , o grafo de interseção associado é bem definido, porém o contrário não é verdade: um mesmo grafo pode ser o grafo de interseção de diferentes famílias. Se  $G$  é o grafo de interseção de uma família  $\mathcal{F}$ , dizemos que  $\mathcal{F}$  é um *modelo* de  $G$ .

Um grafo  $G$  é um *grafo de intervalo* se é o grafo de interseção de uma família  $\mathcal{R}$  de intervalos da reta real. Em outras palavras, um grafo  $G$  é um grafo de intervalo precisamente quando existir uma correspondência entre  $V(G)$  e uma família de intervalos  $\mathcal{R} = \{I_v \mid v \in V(G)\}$  da reta real tal que, para todo  $u, w \in V(G)$

distintos,  $I_u \cap I_w \neq \emptyset \iff uw \in E(G)$ . Chamamos  $\mathcal{R}$  um *modelo de intervalo* de  $G$ . A Figura 1.6 ilustra um grafo de intervalo e um de seus modelos de intervalo. Assumimos que todos os extremos de intervalo são distintos e denotamos os extremos esquerdo e direito de um intervalo  $I_v$  respectivamente por  $\ell(I_v)$  e  $r(I_v)$ . Quando  $\ell(I_v) = r(I_v)$ , diremos que  $I_v$  é *trivial*. O tamanho de  $I_v$  é representado por  $|I_v|$ . Para qualquer modelo de intervalo  $\mathcal{R}$ , assumiremos que  $\ell(I_v) > 0$ , para todo  $I_v \in \mathcal{R}$ . Por conveniência, dado um intervalo  $I_v$  de um modelo de intervalo e o vértice correspondente  $v$ , podemos usar indistintamente  $I_v$  ou  $v$  quando o contexto não criar ambigüidades. Um grafo é de *intervalo unitário* se existir um modelo de intervalo deste grafo tal que todos os intervalos possuam o tamanho unitário, isto é,  $|I_v| = 1$  para todo  $v \in V(G)$ .

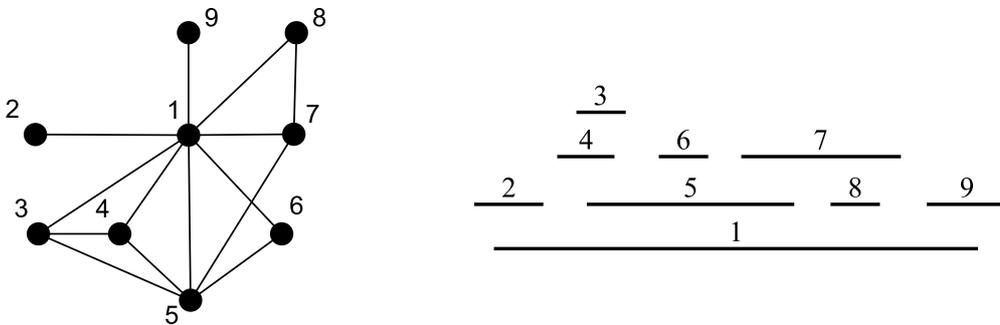


Figura 1.6: Grafo de intervalo e um de seus modelos de intervalo.

Uma *inversão* de um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  é o modelo obtido pela reflexão dos intervalos de  $\mathcal{R}$  por uma linha vertical imaginária que divide  $\mathcal{R}$  ao meio. Em outras palavras, sendo  $c = (\max\{r(I) \mid I \in \mathcal{R}\} + \min\{\ell(I) \mid I \in \mathcal{R}\})/2$ , então cada ponto  $p$  do modelo original é mapeado no ponto  $p' = 2c - p$  do modelo invertido. Um *submodelo*  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{R}$  é o modelo de intervalo obtido pela remoção de alguns intervalos de  $\mathcal{R}$ . Um *submodelo* de  $\mathcal{R}$  *induzido* por um conjunto de vértices  $W$  é o submodelo resultante da remoção em  $\mathcal{R}$  dos intervalos que não correspondem a nenhum dos vértices de  $W$ .

Um grafo é PI se é o grafo de interseção de uma família de triângulos  $ABC$  entre duas retas paralelas  $L_1$  e  $L_2$ , tais que  $A \in L_1$  e  $\overline{BC} \subset L_2$ . A seguir, descrevemos melhor o que entende-se por interseção de triângulos. Dois triângulos  $T_1$  e  $T_2$  são *disjuntos* se um deles, digamos  $T_1$ , é tal que para qualquer linha paralela  $L$  compreendida entre as linhas  $L_1$  e  $L_2$ , ocorre que  $r(L \cap T_1) < \ell(L \cap T_2)$ . Denotamos tal relação por  $T_1 \ll T_2$ . Dois triângulos  $T_1$  e  $T_2$  *têm interseção* se eles não são disjuntos, denotado por  $T_1 \times T_2$ . Se  $T$  é um triângulo de um modelo PI, denotamos por  $t(T)$  o ponto  $L_1 \cap T$  e por  $b(T)$  o intervalo  $L_2 \cap T$ . A Figura 1.7 ilustra um grafo PI e um de seus modelos.

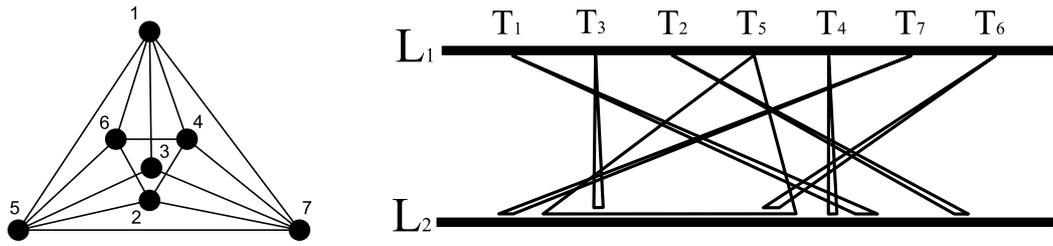


Figura 1.7: Um grafo PI e um de seus modelos PI.

### Ordens de Intervalo

Uma ordem  $P = (X, \prec)$  (também conhecida como *conjunto parcialmente ordenado* ou *poset*), no contexto deste trabalho, é uma relação binária  $\prec$  sobre o conjunto  $X$  que é irreflexiva ( $(x, x) \notin \prec$ ) e transitiva ( $(a, b) \in \prec, (b, c) \in \prec \implies (a, c) \in \prec$ ). A notação  $x \prec y$  será usada para denotar que  $(x, y) \in \prec$ . Neste caso, dizemos que  $x$  e  $y$  são elementos *comparáveis*. Se  $x$  e  $y$  não forem comparáveis, então são ditos *incomparáveis* e denotamos esta relação por  $x \parallel y$ .

Representamos uma ordem pelo seu *diagrama de Hasse*, no qual cada elemento da ordem corresponde a um ponto e ligamos por um segmento de reta pares de pontos  $x$  e  $y$ ,  $x$  estando numa posição horizontal abaixo daquela de  $y$ , se e somente se  $x \prec y$  e não existir  $z$  tal que  $x \prec z \prec y$ . Na Figura 1.8, encontramos ordens representadas pelos seus respectivos diagramas de Hasse. A título de exemplo, temos que  $1 \prec 3$  em  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . Por outro lado,  $2 \parallel 4$  em  $P$  e  $Q$ , enquanto  $2 \prec 4$  em  $R$ .

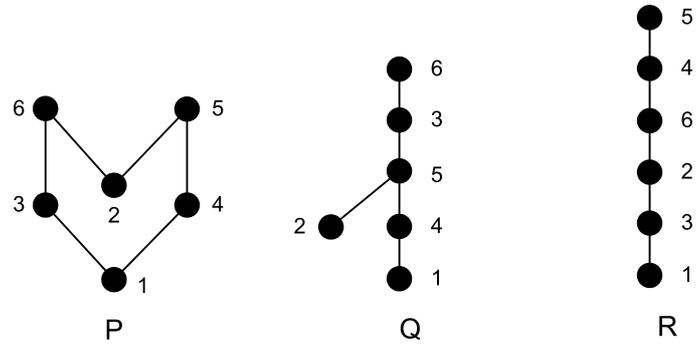


Figura 1.8: Exemplos de ordens.

Uma ordem  $P' = (X, \prec')$  é dita ser uma *extensão* de  $P = (X, \prec)$  se  $x \prec y \implies x \prec' y$ . Como exemplo, as ordens  $Q$  e  $R$  da Figura 1.8 são extensões de  $P$ .

Sejam as ordens  $P = (X, \prec_P)$  e  $Q = (X, \prec_Q)$ . Então  $P \cap Q$  é definido como sendo a ordem  $(X, \prec_R)$  tal que  $x \prec_R y \iff x \prec_P y$  e  $x \prec_Q y$ . Seja  $L$  uma família  $\{P_1, \dots, P_k\}$  de extensões da ordem  $P$ . A família  $L$  é um *realizador* de  $P$  se  $P = \bigcap_{i=1..k} P_i$ . Na Figura 1.8, verifica-se que  $Q \cap R = P$ . Portanto, o conjunto  $\{Q, R\}$  constitui um realizador de  $P$ .

Sejam a ordem  $P = (X, \prec)$  e  $X' \subseteq X$ . A *subordem induzida* de  $P$  por  $X'$  é a ordem  $P[X'] = (X', \prec')$  tal que para todo  $\{x, y\} \subseteq X'$ ,  $x \prec' y \iff x \prec y$ .

Uma *ordem linear* é uma ordem onde quaisquer dois de seus elementos são comparáveis. Uma ordem  $P = (X, \prec)$  é uma *ordem de intervalo* (ou *ordem intervalar*) se existir um modelo de intervalo  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  tal que  $x \prec y$  se e somente se  $r(I_x) < \ell(I_y)$ . Como exemplos, a ordem  $R$  da Figura 1.8 é uma ordem linear, a ordem  $Q$  é uma ordem de intervalo e é possível mostrar que a ordem  $P$ , além de não ser linear, não é intervalar. Se  $P$  é uma ordem de intervalo com modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  e  $G$  é o grafo de intervalo correspondente a  $\mathcal{R}$ , dizemos que  $P$  *concorda* com  $G$ . Note que uma ordem de intervalo concorda com um único grafo, mas o contrário é falso: um grafo de intervalo pode possuir um número exponencial de ordens de intervalo concordando com ele. Denotamos por  $q(P)$  o número de cliques do grafo que concorda com  $P$ . Note que se as ordens  $P$  e  $Q$  concordam com um mesmo grafo, então  $q(P) = q(Q)$ .

A *altura*  $H(P)$  da ordem  $P$  é o número de elementos da maior subordem induzida linear de  $P$ .

Dado  $G$  e uma orientação transitiva  $F$  de  $G$ , então  $P = (V(G), F)$  é uma ordem e dizemos que  $F$  *induz*  $P$ . Se  $P = (X, \prec)$  é uma ordem, o *grafo de incomparabilidade* de  $P$  é o grafo  $G = (X, E)$  tal que  $xy \in E \iff x \parallel y$  e o *grafo de comparabilidade* de  $P$  é o complemento do grafo de incomparabilidade de  $P$ . É possível mostrar que  $P$  concorda com  $G$  se e somente se  $G$  é o grafo de comparabilidade de  $P$ .

Um grafo é de *comparabilidade* quando é possível orientar suas arestas transitivamente. Note que se  $G$  é um grafo de comparabilidade, então ele é o grafo de comparabilidade de alguma ordem (nomeadamente, daquelas induzidas por orientações transitivas deste grafo). Um grafo é de *cocomparabilidade* quando seu complemento for de comparabilidade ou, equivalentemente, quando for o grafo de incomparabilidade de alguma ordem.

Uma propriedade é dita ser um *invariante de comparabilidade* se todas as ordens com um mesmo grafo de comparabilidade ou satisfazem tal propriedade, ou nenhuma delas a satisfaz. Como ilustração, considere a propriedade de uma ordem possuir um certo número de elementos máximos. Esta propriedade não constitui um invariante de comparabilidade, pois enquanto a ordem  $P$  da Figura 1.8 possui dois elementos máximos (5 e 6), a ordem obtida de  $P$  pela inversão de todas as suas comparabilidades possui um único elemento máximo (1). Por outro lado, temos que a propriedade de possuir um certo tamanho da maior anti-cadeia (subconjunto maximal de elementos dois-a-dois incomparáveis) é trivialmente um invariante de comparabilidade.

Uma ordem  $P = (X, \prec)$  é uma ordem PI quando existir um modelo PI  $\{T_x \mid x \in X\}$  tal que  $x \prec y$  se e somente se  $T_x \ll T_y$ . A Figura 1.9 mostra um modelo PI da

ordem  $P$  definida na Figura 1.9. Logo,  $P$  é uma ordem PI.

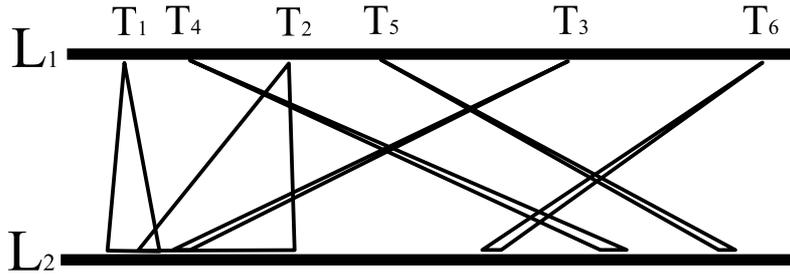


Figura 1.9: Exemplo de um modelo PI.

## 1.2 Contribuições desta Tese

Nesta seção, evidenciamos as contribuições desta tese, de forma a claramente separá-las do conhecimento já existente na literatura, dirimindo assim possíveis dúvidas neste sentido no decorrer da leitura. Além disso, esta seção tem por finalidade indicar objetivamente em que meios de divulgação científica cada contribuição pode ser encontrada/foi apresentada, além naturalmente desta própria tese, de modo que fique registrado aqui as referências para seus frutos.

No Capítulo 2, tratamos o problema de cliques extremas em grafos de intervalo, onde estabelecemos mais uma propriedade estrutural desta classe. Neste estudo, caracterizamos as clique extremas de um grafo de intervalo por subgrafos induzidos proibidos. Além disso, caracterizamos a classe dos grafos cujas cliques são todas extremas. Mostramos que tal classe é precisamente aquela dos grafos trivialmente perfeitos (TP), definida por Golubic [31] com motivação relacionada a coloração e grafos perfeitos. Os resultados desta pesquisa deram origem ao artigo *Extreme cliques in interval graphs* [12], publicado pela *Ars Combinatoria* em 2010. Resultados parciais foram apresentados no *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na cidade de La Plata, Argentina, em 2006, constando em seus anais.

No Capítulo 3, apresentamos o problema de reconhecimento dos grafos PI e o caracterizamos por meio da noção de dimensão linear-intervalar. Tal caracterização faz corresponder o problema de reconhecer um grafo PI ao de reconhecer se uma ordem que concorda com tal grafo possui dimensão linear-intervalar no máximo  $(2, 1)$ . A introdução desta dimensão e seu relacionamento com as ordens e grafos PI já haviam sido notados na dissertação de mestrado do autor [23]. Nesta tese, mostramos que para todo par ordenado  $(p, q)$ , existe uma ordem  $P$  tal que  $lidim(P) = (p, q)$ . Além disso, foi mostrado que a propriedade de possuir uma determinada dimensão linear-intervalar é um invariante de comparabilidade. Estes últimos resultados foram recentemente compilados em um artigo, ainda sem submissão. Os resultados

parciais deste artigo foram apresentados no *LAGOS (Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium)* em 2007, na cidade de Puerto Varas, Chile, e no *Workshop on Graph Theory and Applications* em 2006, na cidade de Porto Alegre, Brasil, constando nos respectivos anais. Uma publicação com resultados preliminares foi feita na *Electronic Notes in Discrete Mathematics* [11].

No Capítulo 4, apresentamos um resumo (*survey*) sobre o problema de computar qual o número mínimo de tamanhos distintos de intervalo necessário para se representar um grafo por seu modelo de intervalo. Em particular, fornecemos uma compilação dos resultados sobre a contagem de intervalo de grafos e ordens que possuem respectivamente contagem de intervalo um, contagem de intervalo dois e contagem de intervalo com valores arbitrários. Apresentamos em seguida o problema da contagem de intervalo quando restrito a subclasses de grafos e ordens de intervalo. Mostramos a relação que existe entre a contagem de intervalo de um grafo e o seu número de cliques, fornecendo um limite superior justo para a contagem de intervalo de grafos possuindo  $q$  cliques. Este último resultado foi obtido de maneira independente nesta tese. Finalmente, apresentamos problemas relacionados a tamanhos de intervalos, porém que não tem por objetivo computar o número mínimo destes. Um artigo contendo o resumo do estado-da-arte deste problema e a prova independente da relação entre a contagem de intervalo e o número de cliques do grafo encontra-se em preparação. Estes resultados foram apresentados no *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na cidade de Guanajuato, Mexico, em 2008.

No Capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos no tema de contagem de intervalo, em particular a computação eficiente da contagem de intervalo de grafos e ordens livres de touros estendidos [13]. Mostramos que podemos assumir, sem afetar a contagem de intervalo de uma ordem ou grafo de intervalo, que os modelos devem possuir os extremos distintos e inteiros. Além disso, evidenciamos a natureza combinatoria do problema, que à primeira vista não é tão evidente dado que os tamanhos de intervalo assumem valores reais. No restante do capítulo, tratamos de mostrar diversas propriedades encontradas que culminam no reconhecimento eficiente de ordens e grafos livre de touro estendido. O artigo contendo estes resultados foi aceito para publicação no periódico *Discrete Applied Mathematics*, que por enquanto está em processo de impressão porém já disponível pela Internet. Estes resultados foram apresentados no *Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, na cidade de Itaipava, Brasil, em 2010.

Por fim, vale ressaltar que cada capítulo possui como motivação os grafos e ordens de intervalo, mas atua em um aspecto distinto deles. Assim, os capítulos desta tese podem ser lidos em qualquer ordem. Pode ser considerada uma exceção a sugestão de se ler o Capítulo 4 antes do Capítulo 5. Contudo, isto não é rigorosamente necessário, além da conveniência de ser apresentado de maneira mais ampla sobre

um assunto antes de tomar ciência sobre novos resultados sobre ele.

# Capítulo 2

## Cliques Extremas

Uma clique  $C$  é uma clique extrema de um grafo de intervalo  $G$  se existe algum modelo de intervalo de  $G$  no qual  $C$  é a primeira clique. Um grafo  $G$  é representável por cliques homogêneas se todas as cliques de  $G$  são cliques extremas. Neste capítulo, apresentamos caracterizações de cliques extremas e grafos representáveis por cliques homogêneas.

### 2.1 Introdução

Considere um modelo de intervalo de um grafo e uma reta vertical cortando perpendicularmente um conjunto de intervalos deste modelo. Os vértices correspondentes aos intervalos que são cortados por tal reta, por construção, são adjacentes entre si no grafo. No entanto, tal conjunto de vértices pode não ser maximal (em relação à propriedade de conter vértices adjacentes dois a dois) e, por consequência, não representar uma clique deste grafo. Um exemplo trivial desta observação é supor que tal reta vertical não corte nenhum intervalo. Logo, o conjunto de vértices é vazio, sendo portanto subconjunto próprio de qualquer outro conjunto não-vazio de vértices dois-a-dois adjacentes. Por outro lado, a cada conjunto  $C$  de vértices dois-a-dois adjacentes é possível estabelecer uma reta vertical para a qual o conjunto de vértices correspondentes aos intervalos cortados é precisamente  $C$ . Este fato pode ser visto da seguinte forma: seja  $M$  o intervalo  $(\max\{\ell(I_c) \mid c \in C\}, \min\{r(I_c) \mid c \in C\})$ . Este intervalo  $M$  deve ser não-vazio pois, caso contrário, existiria  $\{a, b\} \subseteq C$  tal que  $r(I_a) < \ell(I_b)$ , o que contradiz a definição de  $C$ . É fácil ver agora que  $M \subseteq I_c$  para todo  $c \in C$ . Logo, qualquer reta que corte um ponto do intervalo  $M$  satisfaz o que se procura.

Dado um modelo de intervalo, considere um conjunto de retas verticais, cada uma correspondendo a uma clique do grafo. A *ordenação de cliques* deste modelo é a ordem linear sobre o conjunto de cliques do grafo tal que a clique  $C_i$  precede a clique  $C_j$  na ordem se e somente se a linha vertical correspondente a  $C_i$  está à

esquerda no modelo daquela correspondente a  $C_j$ . A Figura 2.1 exhibe a ordenação de cliques do modelo dado na Figura 1.6.

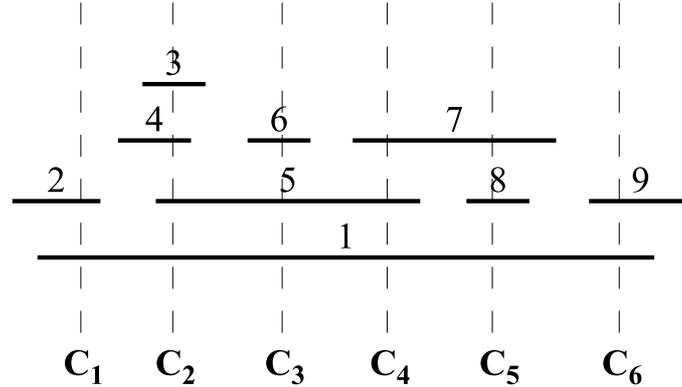


Figura 2.1: Modelo de intervalo cuja ordem de cliques é  $C_1 \prec C_2 \prec \dots \prec C_6$ .

Nem toda ordem linear sobre o conjunto de cliques de um grafo é uma ordenação de cliques. Por exemplo, é fácil ver que uma ordem linear na qual existem cliques  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , nesta ordem, tais que  $v \in C_1$  e  $v \in C_3$  porém  $v \notin C_2$ , não pode ser uma ordenação de cliques, pois o intervalo correspondente a  $v$ , presente em  $C_1$  e  $C_3$ , seria interrompido pela clique  $C_2$  em qualquer suposto modelo com aquela ordem linear de cliques. Portanto, uma condição necessária para qualquer ordenação de cliques é que todas as cliques contendo um certo vértice  $v$  sejam consecutivas dentro desta ordem. De fato, ela é também uma condição suficiente, conforme a caracterização bem-conhecida de grafos de intervalo devida a Fulkerson e Gross [27]:

**Teorema 2.1** (Fulkerson e Gross, 1965). *Um grafo é um grafo de intervalo se e somente se existir uma ordem linear de suas cliques tal que, para cada vértice  $v$  do grafo, as cliques contendo  $v$  são consecutivas dentro desta ordem.*

Uma *PQ-tree* de um grafo de intervalo  $G$  é uma árvore ordenada enraizada que satisfaz as seguintes condições. Primeiro, o conjunto de suas folhas é o conjunto de cliques de  $G$ . Cada nó interno (não-folha) desta árvore é classificado ou como um nó  $P$ , ou como um nó  $Q$ , nós  $P$  possuindo ao menos dois nós filhos e nós  $Q$  possuindo ao menos três nós filhos. Além disso, se  $L$  é uma ordem linear sobre o conjunto de cliques obtida de uma dada *PQ-tree* pela leitura de suas folhas da esquerda para direita, então existe um modelo de intervalo de  $G$  cuja ordenação de cliques é precisamente  $L$ . Por outro lado, para qualquer modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $G$  com ordenação de cliques  $L$ , é possível aplicar uma seqüência de operações sobre uma *PQ-tree* de  $G$  tal que, ao seu fim, a ordem linear das folhas da árvore produzida, lendo-as da esquerda para a direita, seja precisamente  $L$ . Cada operação consiste de ou permutar a ordem dos nós filhos de um nó  $P$  ou inverter a ordem dos nós filhos

de um nó  $Q$ . A PQ-tree resultante depois de qualquer seqüência de tais operações é dita ser *equivalente* à original.

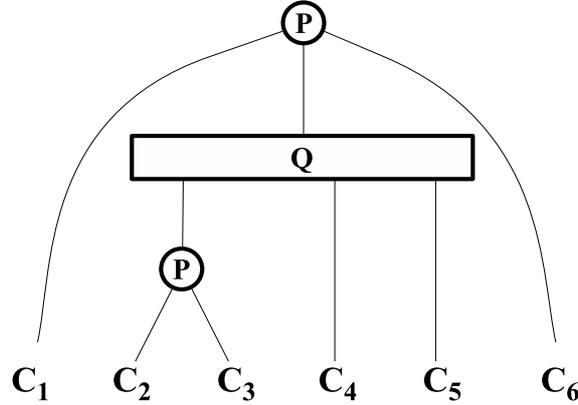


Figura 2.2: Uma PQ-tree do grafo definido na Figura 1.6.

Uma outra caracterização bem-conhecida de grafos de intervalo, desta vez envolvendo o conceito de PQ-trees, é devida a Booth e Lueker [6].

**Teorema 2.2** (Booth e Lueker, 1976). *Um grafo  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se existir uma PQ-tree de  $G$ .*

Um vértice  $v$  de um grafo de intervalo é um *vértice extremo* se existir um modelo de intervalo deste grafo no qual  $\ell(I_v)$ , onde  $I_v$  representa o intervalo correspondente a  $v$ , é o primeiro extremo de intervalo, isto é, o extremo de intervalo mais à esquerda do modelo. Como ilustração, a Figura 1.6 evidencia que o vértice correspondente a  $I_2$  é extremo. É fácil ver que ele não é o único: aquele correspondente a  $I_9$  também é um vértice extremo (por exemplo, tome o modelo da Figura 1.6 invertido).

Uma clique  $C$  é uma *clique extrema* de um grafo de intervalo se existir um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  tal que  $C$  é a primeira clique (clique mínima) da ordem de cliques de  $\mathcal{R}$ . Por exemplo, o modelo da Figura 2.1 mostra que a clique  $C_1$  é uma clique extrema e, tomando-se aquele modelo invertido, temos que  $C_6$  também é. Contudo, nem toda clique é extrema. É fácil mostrar que não há uma ordenação de cliques de  $G$  na qual  $C_4$  seja a primeira. Com efeito, note que se uma clique é a primeira numa ordenação de cliques de um modelo, então como ela possui um intervalo que não está contido na segunda clique, tal intervalo está incluído apenas na primeira clique. Logo esta é uma condição necessária (mas não suficiente) para uma clique ser extrema. Esta condição não é verificada para  $C_4$ .

A caracterização de vértices extremos, feita através da apresentação da lista completa de subgrafos proibidos, é devida a Gimbel [29].

**Teorema 2.3** (Gimbel, 1988). *Um vértice  $v$  de um grafo de intervalo  $G$  é um vértice extremo se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos apresentados na Figura 2.3 como subgrafos induzidos com  $v$  na posição indicada.*

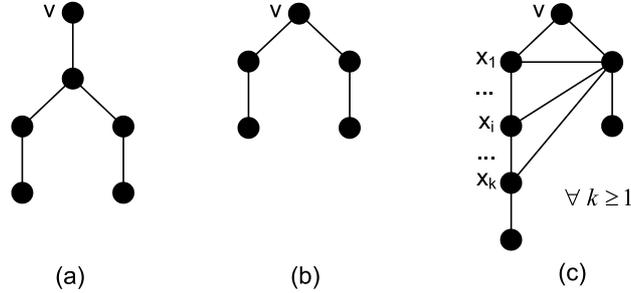


Figura 2.3: Lista de subgrafos induzidos proibidos para um vértice ser extremo.

A questão de interesse é produzir uma caracterização de cliques extremas. Além disso, produzimos uma caracterização dos grafos representáveis por cliques homogêneas – aqueles para os quais todas as cliques são extremas.

O restante do capítulo é como segue. Na Seção 2.2, mostramos uma caracterização de cliques extremas exibindo a lista de subgrafos proibidos, de maneira análoga a caracterização de vértices extremos de Gimbel. Na Seção 2.3, caracterizamos a classe dos grafos para os quais todas as cliques são extremas.

## 2.2 Caracterização de cliques extremas

Nesta seção, caracterizamos as cliques extremas exibindo uma lista de subgrafos induzidos proibidos para que uma clique seja extrema.

Antes de mais nada, formalizemos a demonstração do fato de que uma clique extrema possui um vértice simplicial.

**Lema 2.4.** *Se  $C$  é uma clique extrema, então  $C$  é uma clique simplicial.*

*Demonstração.* Se o grafo  $G$  só possui uma clique, todos os vértices são simpliciais. Caso contrário, seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $G$  tal que  $C$  e  $C'$  são respectivamente a primeira e a segunda cliques na ordem de cliques de  $\mathcal{R}$ . Como  $C$  é uma clique distinta de  $C'$ , então existe  $s \in C$  tal que  $s \notin C'$ . Logo,  $s$  pertence somente a primeira clique, seguindo que  $s$  é um vértice simplicial.  $\square$

Em seguida, mostramos uma outra propriedade que será útil na caracterização final de cliques extremas.

**Lema 2.5.** *Seja  $C$  uma clique simplicial de um grafo de intervalo  $G$  tal que, para todo vértice simplicial  $s \in C$ ,  $G$  não contém os subgrafos induzidos da Figura 2.4.*

Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $G$  no qual  $C$  não é nem a primeira nem a última clique de  $\mathcal{R}$  e sejam  $C_1$  e  $C_2$  as cliques que imediatamente antecede e precede  $C$  em  $\mathcal{R}$ , respectivamente. Necessariamente,  $C_1 \cap C \supseteq C_2 \cap C$  ou  $C_1 \cap C \subseteq C_2 \cap C$ .

*Demonstração.* Suponha, com o propósito de encontrar uma contradição, que a proposição seja falsa. Existe portanto  $u_1 \in C_1 \cap C$  tal que  $u_1 \notin C_2$  e  $u_2 \in C_2 \cap C$  tal que  $u_2 \notin C_1$ . Como  $C$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são duas-a-duas distintas, existe  $a \in C_1$  e  $b \in C_2$  tais que  $a \notin C$  e  $b \notin C$ . Como  $C$  é uma clique extrema, pelo Lema 2.4, há um vértice simplicial  $s \in C$ . Conseqüentemente, existe em  $G$  o subgrafo  $G[\{s, u_1, a, u_2, b\}]$  do tipo (b), o que constitui uma contradição.  $\square$

O próximo resultado apresenta a caracterização anunciada de cliques extremas por subgrafos proibidos.

**Teorema 2.6.** *Se  $G$  é um grafo de intervalo e  $C$  for uma clique de  $G$ , então  $C$  é uma clique extrema se e somente se  $C$  for simplicial e  $G$  não contiver nenhum dos grafos da Figura 2.4 como subgrafos induzidos, onde  $s$  representa um vértice simplicial de  $C$ .*

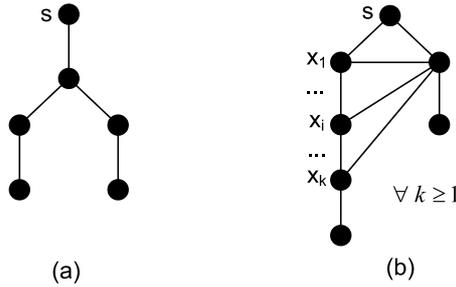


Figura 2.4: Lista de subgrafos induzidos proibidos para uma clique ser extrema.

*Demonstração.* Se  $C$  é uma clique extrema, então seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $G$  tal que  $C$  é a primeira clique de  $\mathcal{R}$ . Pelo Lema 2.4,  $C$  é uma clique simplicial e, portanto, existe um vértice simplicial  $s \in C$ . Mostramos que  $G$  não contém os grafos da Figura 2.4 como subgrafos induzidos. Suponha, com o propósito de encontrarmos uma contradição, que  $G$  contém os subgrafos induzidos (a) ou (b) da Figura 2.4. Como  $C$  é a primeira clique de  $\mathcal{R}$ , o modelo “cresce” para a direita de  $s$ . Considere a construção de  $\mathcal{R}$  nos seguintes casos:

- $G$  contém o subgrafo induzido do tipo (a) (Figura 2.5): O único submodelo possível para representar  $G[\{s, a, c, e\}]$  é aquele mostrado na figura. O intervalo  $b$  deve estar localizado no modelo entre os intervalos  $s$  e  $c$ . Por fim, o intervalo  $d$  deve ter interseção com  $b$  mas não com  $a$ , o que torna a representação impossível.

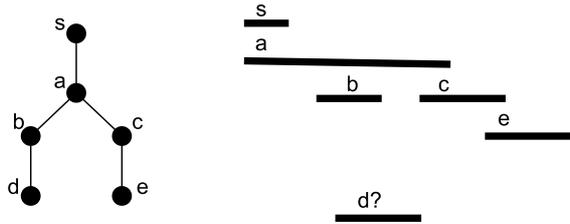


Figura 2.5: Subgrafo do tipo (a).

- $G$  contém o subgrafo induzido do tipo (b) (Figura 2.6): O único submodelo possível para representar  $G[\{s, a, x_1, \dots, x_k\}]$  é aquele mostrado na figura. O intervalo  $b$  deve estar localizado no modelo à direita de  $x_k$  fazendo interseção com  $a$ . Finalmente, o intervalo  $c$  deve fazer interseção com  $x_k$  mas não com  $a$ , o que representa uma outra impossibilidade.

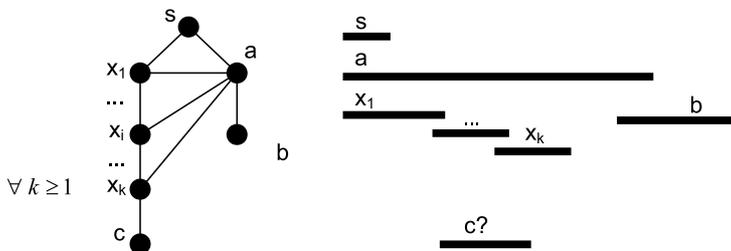


Figura 2.6: Subgrafo do tipo (b).

Por outro lado, seja  $C$  uma clique simplicial de  $G$  tal que não existe em  $G$  nem grafos do tipo (a) nem do tipo (b) como subgrafos induzidos. Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $G$ . Mostramos que é possível transformar  $\mathcal{R}$  em um outro modelo no qual  $C$  é a primeira clique.

Se  $C$  já é a primeira clique de  $\mathcal{R}$ , naturalmente nenhuma transformação efetiva é necessária. Se  $C$  é a última clique de  $\mathcal{R}$ , a transformação consiste simplesmente da inversão de  $\mathcal{R}$ . Se  $C$  não é nem a primeira nem a última clique de  $\mathcal{R}$ , seja  $C_1$  e  $C_2$  as cliques que imediatamente precede e sucede  $C$  em  $\mathcal{R}$ , respectivamente. Pelo Lema 2.5, temos que  $C_1 \cap C \supseteq C_2 \cap C$  ou  $C_1 \cap C \subseteq C_2 \cap C$ . Como  $C_1$ ,  $C$  e  $C_2$  são cliques distintas, existe  $a \in C_1$  e  $b \in C_2$  tais que  $a \notin C$  e  $b \notin C$ . Obtemos a transformação desejada por indução sobre o número  $k$  de cliques de  $G$ .

Considere o caso  $k = 3$ . Sem perda de generalidade, assuma que  $C_1 \cap C \supseteq C_2 \cap C$ . Trocando-se as posições de  $C_1$  e  $C$  obtemos um novo modelo de intervalo de  $G$  no qual  $C$  torna-se a primeira clique. Note que tal troca é possível pois  $C_1 \cap C \supseteq C_2 \cap C$ .

Suponha que a afirmação seja verdadeira para qualquer grafo  $G$  com menos que  $k > 3$  cliques.

Se  $G$  é desconexo, então seja  $G^C$  a componente conexa de  $G$  que contém a clique  $C$  e seja  $\mathcal{R}^C$  o submodelo de  $\mathcal{R}$  induzido por  $V(G^C)$ . Como o número de cliques de  $G^C$  é menor que  $k$ , então pela hipótese de indução é possível obter de  $\mathcal{R}^C$  um outro modelo  $\mathcal{R}'^C$  no qual  $C$  seja a primeira clique. Removendo-se de  $\mathcal{R}$  o submodelo  $\mathcal{R}^C$  e adicionado-se  $\mathcal{R}'^C$  à esquerda do modelo, obtemos um modelo de intervalo de  $G$  no qual  $C$  é a primeira clique.

Se  $G$  é conexo, sejam  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  os submodelos induzidos pela união de todas as cliques que estão a esquerda e a direita de  $C$  em  $\mathcal{R}$ , respectivamente. Se  $C_1 \cap C \supset C_2 \cap C$  ou  $C_1 \cap C \subset C_2 \cap C$ , assumamos sem perda de generalidade que  $C_1 \cap C \supset C_2 \cap C$ . Caso contrário, então  $C_1 \cap C = C_2 \cap C$ . Em ambos os casos, note que, se cada vértice  $v \in C_1 \cap C_2$  é universal a  $\mathcal{R}_1$ , então pode-se obter um modelo de  $G$  no qual  $C$  é a primeira clique movendo-se a inversão de  $\mathcal{R}_2$  para a esquerda de  $\mathcal{R}_1$ , e então tomando-se a inversão do modelo assim modificado. É fácil verificar que o modelo resultante é um modelo de intervalo deste grafo, mas agora com  $C$  como primeira clique. Caso contrário, seja  $w \in C_1 \cap C_2$  o vértice que não é universal a  $\mathcal{R}_1$  com o maior extremo esquerdo de intervalo em  $\mathcal{R}$ . Seja  $x_1$  o intervalo de  $\mathcal{R}_1$  tal que ele não faça interseção com  $w$ , escolhendo aquele com o maior extremo direito de intervalo. Como  $G$  é conexo, então seja  $x_2$  o intervalo que faz interseção com  $x_1$  e  $w$  com o maior extremo direito de intervalo. Considere agora separadamente os casos:

1.  $C_1 \cap C \supset C_2 \cap C$  (Figura 2.7): Então existe um vértice  $u \in C_1 \cap C$  tal que  $u \notin C_2 \cap C$ . Mostremos que não existe um caminho em  $G$  entre  $x_1$  e  $u$  apenas com vértices correspondentes a intervalos em  $\mathcal{R}_1$  que não estão em  $C_2 \cap C$ . Suponha, com o propósito de encontrar uma contradição, que exista tal caminho e tome um caminho mínimo  $P = x_1, x_2, \dots, x_m, u$  deste tipo. Como  $P$  é mínimo, dois vértices de  $P$  são adjacentes se e somente se eles são consecutivos em  $P$ . Se  $x_m \in C$ ,  $G$  contém o subgrafo proibido  $G[\{s, w, b, x_m, \dots, x_2, x_1\}]$  do tipo (b), o que constitui uma contradição. Caso contrário, então  $G$  contém o subgrafo proibido  $G[\{s, w, b, u, x_m, \dots, x_2, x_1\}]$  do tipo (b). Logo, não existe tal caminho.

Portanto, existem cliques consecutivas  $C'_1$  precedendo  $C'_2$  entre  $C_1$  e a clique mais à direita que contém  $x_1$  tal que  $C'_1 \cap C'_2 \subseteq C_1 \cap C_2$ . Pela escolha de  $w$  ( $w \in C_1 \cap C_2$  com o extremo esquerdo mais à direita em  $\mathcal{R}$ ), temos que  $C'_1 \cap C'_2 = C_1 \cap C_2$ .

Seja  $G'$  o grafo obtido de  $G$  pela remoção dos vértices pertencentes a qualquer clique de  $C'_2$  até  $C_1$ , exceto aqueles em  $C_1 \cap C_2$ . Seja  $\mathcal{R}_C$  o submodelo de  $\mathcal{R}$  induzido pelos vértices das cliques de  $C'_2$  até  $C_1$  depois da remoção dos vértices de  $C_1 \cap C_2$ . Seja  $\mathcal{R}_{G'}$  o submodelo de  $\mathcal{R}$  obtido pela remoção dos intervalos que estão em  $\mathcal{R}_C$ . É claro que, por construção,  $\mathcal{R}_{G'}$  é um modelo de intervalo

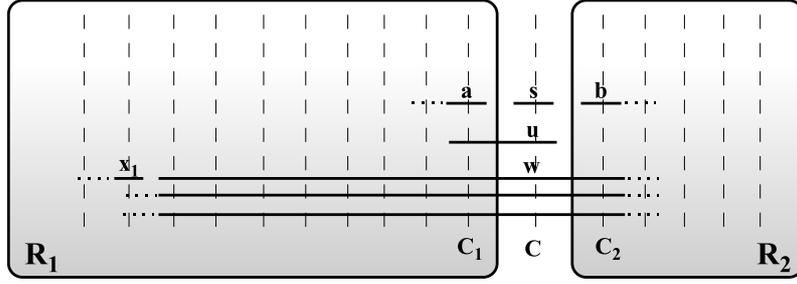


Figura 2.7: Caso em que  $C_1 \cap C \supset C_2 \cap C$ .

de  $G'$ . Além disso, como  $C'_1$  e  $C_1$  são cliques distintas,  $G'$  possui menos que  $k$  cliques. Dado que as propriedades requeridas de  $C$  também valem para  $G'$ , a hipótese de indução implica que podemos obter um modelo  $\mathcal{R}'$  de  $\mathcal{R}_{G'}$  no qual  $C$  é a primeira clique. O modelo obtido pela inserção em  $\mathcal{R}'$  da inversão de  $\mathcal{R}_C$  entre  $C$  e o restante de  $\mathcal{R}'$  é claramente um modelo de intervalo de  $G$ , no qual  $C$  é a primeira clique.

2.  $C_1 \cap C = C_2 \cap C$  (Figura 2.8): se cada vértice  $v \in C_1 \cap C_2$  é universal a  $\mathcal{R}_2$ , então podemos obter um modelo no qual  $C$  é a primeira clique movendo-se a inversão de  $\mathcal{R}_1$  para a direita de  $\mathcal{R}_2$ . Naturalmente o modelo resultante é um modelo de intervalo do mesmo grafo onde  $C$  é a primeira clique. Caso contrário, seja  $w' \in C_1 \cap C_2$  o vértice (não-universal a  $\mathcal{R}_2$ ) com o extremo direito mais à esquerda em  $\mathcal{R}$ . Seja  $y_1 \in \mathcal{R}_2$  o intervalo que não faz interseção com  $w'$  com o extremo esquerdo mais à esquerda. Como  $G$  é conexo, seja  $y_2$  o intervalo que faz interseção com  $y_1$  e  $w'$  com o extremo esquerdo mais à esquerda. Mostramos que ao menos uma das seguintes afirmações é verdadeira: (i) o conjunto de vértices comuns a clique mais à direita que contém  $x_1$  e a aquela que a sucede imediatamente em  $\mathcal{R}$  é um subconjunto de  $C_1 \cap C_2$ ; (ii) o conjunto de vértices comuns a clique mais à esquerda que contém  $y_1$  e aquela que a precede imediatamente em  $\mathcal{R}$  é um subconjunto de  $C_1 \cap C_2$ .

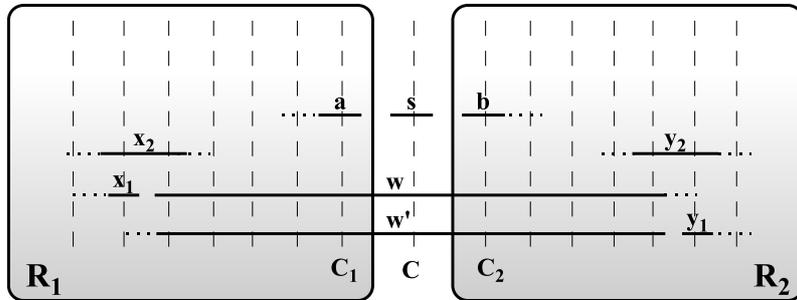


Figura 2.8: Caso em que  $C_1 \cap C = C_2 \cap C$ .

Suponha, com o propósito de encontrar uma contradição, que  $x_2 \notin C_1 \cap C_2$

e  $y_2 \notin C_1 \cap C_2$ . Como  $C_1 \cap C = C_2 \cap C$ , então  $x_2 \notin C$  e  $y_2 \notin C$ . Se  $w = w'$ , então existe o subgrafo induzido  $G[\{s, w, x_2, x_1, y_2, y_1\}]$  do tipo (a), uma contradição. Caso contrário, se  $w \neq w'$ , dado a escolha de  $w$  e  $w'$ , temos que  $x_2w' \in E(G)$  e  $wy_2 \in E(G)$ . Se  $wy_1 \notin E(G)$ , então existe o subgrafo proibido  $G[\{s, w, x_2, x_1, y_2, y_1\}]$  do tipo (a). Portanto,  $wy_1 \in E(G)$ . Se  $x_1w' \notin E(G)$ , então existe o subgrafo proibido  $G[\{s, w', x_2, x_1, y_2, y_1\}]$  do tipo (a), uma contradição da mesma maneira. Por isso,  $x_1w' \in E(G)$ . Logo, existe o subgrafo proibido  $G[\{s, w, y_1, w', x_1\}]$  do tipo (b), o que constitui um absurdo.

Conseqüentemente, a afirmação é de fato verdadeira. Sem perda de generalidade, suponha que o conjunto dos vértices comuns a clique mais à direita que contém  $x_1$  e a sua sucessora imediata em  $\mathcal{R}$ , denotadas respectivamente por  $C'_1$  e  $C'_2$ , é um subconjunto de  $C_1 \cap C_2$ . Finalmente, podemos construir o grafo  $G'$  e completar a prova como no caso anterior.

Isto completa a prova. □

Como nem todas as cliques de um grafo de intervalo são necessariamente extremas, caracterizar os grafos de intervalo nos quais todas as suas cliques são extremas representa uma investigação adicional de interesse.

## 2.3 Grafos por cliques homogêneas

Além da caracterização de vértices extremos [29], Gimbel caracterizou os grafos de intervalo cujos vértices são todos extremos, chamados de *grafos representáveis homogeneamente*. Estendendo este conceito àquele de cliques extremas, definimos um grafo  $G$  como sendo *representável por cliques homogêneas* se todas as cliques de  $G$  são cliques extremas. Nesta seção, nosso objetivo é prover uma caracterização de tais grafos. Note que a classe dos grafos representáveis por cliques homogêneas é uma subclasse daquela dos grafos representáveis homogeneamente – se todas as cliques são extremas, então todos os vértices também são. Além disso, tal inclusão de classes é própria: um caminho de ordem 4 é representável homogeneamente, mas não é representável por cliques homogêneas. Mostramos que a classe de tais grafos coincide com outra já conhecida, introduzida por Golubic no contexto de grafos perfeitos: os grafos trivialmente perfeitos.

Um *touro* é o subgrafo obtido na Figura 2.4 (b) quando  $k = 1$ . Em [29], a seguinte caracterização é apresentada:

**Teorema 2.7** (Gimbel, 1988). *Um grafo de intervalo é representável homogeneamente se e somente se não contém nem um caminho de ordem 5, nem um touro como um subgrafo induzido.*

O seguinte lema estabelece que um grafo de intervalo conexo não é representável por cliques homogêneas quando não contém um vértice universal.

**Lema 2.8.** *Seja  $G$  um grafo de intervalo. Se  $G$  é representável por cliques homogêneas, então para cada componente conexa  $G_i$  de  $G$ , existe um vértice de  $G_i$  que é universal aos vértices de  $G_i$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $G$ , e  $\mathcal{R}_i$  o submodelo de  $\mathcal{R}$  induzido por  $G_i$ . Seja  $C_1 \prec \dots \prec C_q$  a ordem de cliques de  $\mathcal{R}_i$ . Seja  $I_v$  o intervalo com extremo direito mais à direita tal que  $v \in C_1$ . Seja  $k$  o maior inteiro tal que  $v \in C_k$ . Suponha que não exista um vértice universal a  $G_i$ . Logo,  $k < q$ . Como as cliques  $C_k$  e  $C_{k+1}$  são distintas, existe  $u \in C_{k+1} \setminus C_k$ . Como  $G_i$  é conexo, existe algum vértice  $w \in C_k \cap C_{k+1}$ . Note que  $w \notin C_1$  dada a escolha de  $I_v$ . Como qualquer clique extrema é uma clique simplicial, existe os vértices simpliciais  $s' \in C_1$  e  $s \in C_k$ . Conseqüentemente,  $G$  contém o subgrafo  $G[\{s, w, u, v, s'\}]$ , que é aquele proibido do tipo (b) na Figura 2.4, uma contradição. Portanto, cada componente conexa  $G_i$  de  $G$  contém um vértice universal a  $G_i$ .  $\square$

O procedimento recursivo abaixo produz um modelo de intervalo assumindo a condição de que cada estágio é aplicado a grafos possuindo um vértice universal.

#### **Procedimento $Modelo(G)$**

1. Se  $V(G) = \{v\}$ , então devolva  $\mathcal{R} = \{I_v\}$ , onde  $I_v$  é um intervalo real qualquer.
2. Se  $G$  é desconexo com componentes conexos  $G_1, \dots, G_\omega$ , seja  $\mathcal{R}_i$  a devolução dos procedimentos  $Modelo(G_i)$ . Devolva  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_\omega$ , tal que  $\mathcal{R}_i$  está completamente à esquerda de  $\mathcal{R}_{i+1}$ , para todo  $1 \leq i < \omega$ .
3. Se  $G$  não contém um vértice universal, faça o procedimento falhar. Caso contrário, seja  $u$  um vértice universal de  $G$  e  $\mathcal{R}'$  a devolução de  $Modelo(G \setminus u)$ . Devolva  $\mathcal{R}$  definido por  $\mathcal{R}'$  adicionado do intervalo  $I_u$  universal a  $\mathcal{R}'$ .

O próximo teorema caracteriza os grafos representáveis por cliques homogêneas.

**Teorema 2.9.** *Seja  $G$  um grafo de intervalo. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

- (a)  $G$  é um grafo representável por cliques homogêneas.
- (b)  $G$  não contém um caminho induzido de ordem 4 como subgrafo proibido.
- (c) Os modelos de intervalo de  $G$  podem ser obtidos por execução do procedimento  $Modelo(G)$ .
- (d) Nenhuma  $PQ$ -tree de  $G$  contém um nó  $Q$ .

*Demonstração.* (a)  $\iff$  (b): Seja  $G$  um grafo de intervalo. Suponha que  $G$  seja representável por cliques homogêneas. Pelo Lema 2.4, segue que cada clique de  $G$  é simplicial. Suponha que exista um caminho induzido  $v_1, v_2, v_3, v_4$  em  $G$ , e considere uma clique  $C$  que contém  $v_2$  e  $v_3$ . Como  $C$  contém um vértice simplicial  $s$ , existe o subgrafo proibido  $G[\{s, v_1, v_2, v_3, v_4\}]$  do tipo (b) definido na Figura 2.4, o que constitui uma contradição. Por outro lado, suponha que  $G$  não contenha um caminho induzido de ordem 4. Com o propósito de encontrar uma contradição, suponha que existam cliques consecutivas  $C_1, C, C_2$  em certo modelo de  $G$  tal que  $C$  não é simplicial. Como  $C_1$  e  $C$  são cliques distintas, existe  $v_1 \in C_1 \setminus C$  e  $v_3 \in C \setminus C_1$ . De maneira similar, existe  $v_4 \in C_2 \setminus C$  e  $v_2 \in C \setminus C_2$ . Como  $C$  não é simplicial, então  $v_2 \in C_1$  e  $v_3 \in C_2$ . Portanto,  $G$  contém o caminho induzido  $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}]$ , uma contradição. Logo, toda clique de  $G$  é simplicial. Note que nenhum dos vértices simpliciais estão contidos num subgrafo proibido ou, neste caso,  $G$  conteria um caminho induzido de ordem 4. Logo, todas as cliques de  $G$  são extremas.

(a)  $\iff$  (c): É claro que  $G$  é representável por cliques homogêneas se e somente se cada componente conexa de  $G$  é representável por cliques homogêneas. Além disso, se  $G$  é um grafo de intervalo conexo, então  $G$  é representável por cliques homogêneas se e somente se  $G \setminus u$  é representável por cliques homogêneas, onde  $u$  é um vértice universal de  $G$ , cuja existência é suportada pelo Lema 2.8. Portanto, um grafo de intervalo  $G$  é representável por cliques homogêneas se e somente se o procedimento  $\text{Modelo}(G)$  termina sem falhas.

(a)  $\iff$  (d): Seja  $T$  alguma  $PQ$ -tree de  $G$ . Note que  $G$  é representável por cliques homogêneas se e somente se não existir clique  $C$  de  $G$  para qual inexista uma  $PQ$ -tree  $T'$  equivalente a  $T$  na qual a ordem de cliques correspondente a  $T'$  possui  $C$  como primeira clique. Por outro lado, existe tal clique  $C$  se e somente se existir um nó  $Q$  em  $T$ , pois como um nó  $Q$  possui ao menos três filhos, ao menos um deles, representando no mínimo uma clique, não pode assumir o papel de primeira clique.  $\square$

Como observação, a equivalência (a)  $\iff$  (b) do teorema anterior implica que a classe dos grafos representáveis por cliques homogêneas coincide com aquela dos grafos trivialmente perfeitos, definido por Golumbic [30] no contexto de grafos perfeitos.

É possível obter a caracterização de cliques extremas trabalhando-se a partir da caracterização de vértices extremos dada pelo Teorema 2.3. No entanto, nossa prova é independente daquela e auto-contida, não dependendo por exemplo da caracterização dos grafos de intervalo por subgrafos proibidos, como é o caso da caracterização de vértices extremos. Além disso, leva a um algoritmo que, quando aplicado a um

modelo de intervalo no qual a clique extrema de interesse  $C$  não é de fato a primeira clique, produz um outro modelo de intervalo do mesmo grafo no qual  $C$  é a primeira clique.

# Capítulo 3

## Dimensão Linear-Intervalar

Diversos métodos eficientes de reconhecimento da classe dos grafos de intervalo são conhecidos. O primeiro deles, com tempo ótimo linear, é devido a Booth e Lueker [6]. Para certas classes de grafos que generalizam a dos grafos de intervalo, no entanto, tais métodos não são atualmente conhecidos. Este é o caso do problema de reconhecimento dos grafos PI (ou grafos Point-Interval; lê-se pê-i), em aberto desde 1987 [7, 8, 14, 17, 21, 23, 41, 50]. Um grafo PI é um grafo de interseção de uma família de triângulos ABC entre duas retas paralelas distintas  $L_1$  e  $L_2$  tais que  $A$  está em  $L_1$  e  $\overline{BC}$  está sobre  $L_2$ .

Com o problema de reconhecimento de grafos PI como motivação, neste capítulo definimos uma nova dimensão de ordens chamada dimensão linear-intervalar. A dimensão linear-intervalar generaliza a bem-conhecida dimensão intervalar de uma ordem. Mostramos que a dimensão linear-intervalar é um invariante de comparabilidade e descrevemos uma caracterização para grafos PI em termos desta dimensão. Fornecemos exemplos de ordens possuindo dimensão linear-intervalar arbitrária.

### 3.1 Introdução

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  duas linhas paralelas distintas. Um *grafo de permutação* é o grafo de interseção de uma família de segmentos de retas tais que cada segmento possui um ponto extremo em  $L_1$  e o outro em  $L_2$ . A Figura 3.1 apresenta um modelo de permutação de um ciclo de tamanho 4, como exemplo.

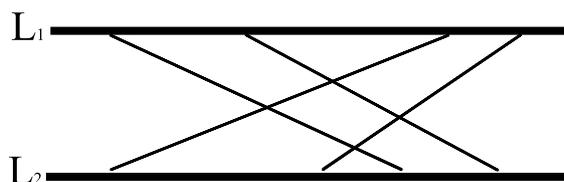


Figura 3.1: Modelo de permutação de um ciclo de tamanho 4.

Um *grafo de trapézios* é o grafo de interseção de uma família de trapézios ABCD tais que  $\overline{AB}$  está sobre  $L_1$  e  $\overline{CD}$  está sobre  $L_2$  [17, 20]. A Figura 3.2 apresenta um grafo de trapézios e um dos seus modelos.

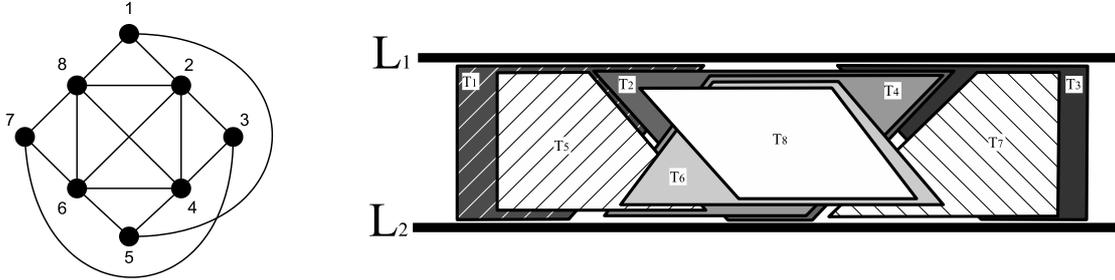


Figura 3.2: Grafo de trapézios e um de seus modelos.

É claro que a classe dos grafos PI generaliza ambas as classes de grafos de intervalo e permutação e é generalizada pela classe dos grafos de trapézios. Com efeito, um modelo de intervalo é um modelo PI no qual todos os topos de triângulos são projetados em sua base e um modelo de permutação é um modelo PI no qual todas as bases de triângulos são triviais. Além disso, um modelo PI é um modelo de trapézios cujos topos são triviais.

A classe dos grafos de permutação é bem conhecida e, para ela, existem algoritmos de reconhecimento de tempo linear [50]. Grafos de trapézios também podem ser reconhecidos eficientemente, sendo o algoritmo mais rápido devido a Ma e Spinrad [42] de tempo  $O(n^2)$ . Uma outra abordagem para o reconhecimento eficiente de tais grafos é baseada na caracterização que estabelece que uma ordem é de trapézios (orientações transitivas dos complementos dos grafos de trapézios) se e somente se ela possuir dimensão de intervalo no máximo 2. Ordens com dimensão intervalar no máximo 2 podem ser reconhecidas em tempo polinomial [20, 25, 38]. O problema de reconhecimento dos grafos PI está no entanto em aberto desde 1987 [7, 17, 50], apesar de toda similaridade (em definição) às classes de permutação, intervalo e trapézios.

Dado um conjunto de retas paralelas distintas  $L_1, \dots, L_n$ , uma *figura* é um conjunto de intervalos  $\{I^1, \dots, I^n\}$ , onde  $I^i \subset L_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Duas figuras  $F_1 = \{I_1^i \mid 1 \leq i \leq n\}$  e  $F_2 = \{I_2^i \mid 1 \leq i \leq n\}$  são *disjuntas*, o que denotamos por  $F_1 \ll F_2$ , se uma delas, digamos  $F_1$ , é tal que  $r(I_1^i) < \ell(I_2^i)$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Duas figuras  $F_1$  e  $F_2$  *fazem interseção* se elas não são disjuntas, o que denotamos por  $F_1 \times F_2$ .

Seja  $P = (X, \prec_P)$  uma ordem. A *dimensão linear* (resp. *intervalar*) de uma ordem  $P$  é o menor número natural  $\dim(P) = k$  (resp.  $\text{idim}(P) = k$ ) para o qual existe um realizador de  $P$  contendo precisamente  $k$  extensões lineares (resp. intervalares) [53]. Como uma extensão linear é, em particular, uma extensão intervalar,

um realizador linear também é um realizador intervalar. Logo,  $idim(P) \leq dim(P)$ . Existem instâncias de ordens para as quais este limite é justo assim como instâncias para as quais ele é completamente frouxo [53]. É conhecido que ambas as dimensões linear e intervalar são invariantes de comparabilidade [31, 33].

Na Seção 3.2, introduzimos a noção de dimensão linear-intervalar de ordens e mostramos que ela constitui um invariante de comparabilidade. Na Seção 3.3, apresentamos ordens possuindo valores arbitrários para a dimensão linear-intervalar. Na Seção 3.4, apresentamos a noção de ordens PI, reduzindo o problema de reconhecimento de grafos PI àquele de reconhecer ordens PI. Caracterizamos tais ordens como aquelas que possuem dimensão linear-intervalar limitada a certo valor constante. Finalmente, na Seção 3.5, abordamos a complexidade do problema de reconhecer se, dada uma ordem  $P$ , sua dimensão linear-intervalar é um dado valor.

## 3.2 Dimensão linear-intervalar

Seja  $P$  uma ordem e  $F$  um realizador de  $P$ . Dizemos que  $F$  é um *realizador linear-intervalar*  $(p, q)$  de  $P$  quando  $F$  é um realizador intervalar com  $p$  ordens e precisamente  $q$  delas são não-lineares. Definimos  $(p, q) \leq (p', q')$  quando  $(p, q)$  é lexicograficamente menor que  $(p', q')$ , isto é, quando  $p < p'$  ou  $(p = p' \text{ e } q < q')$ . A *dimensão linear-intervalar* de uma ordem  $P$ , denotada por  $lidim(P)$ , é o (lexicograficamente) menor par ordenado  $(p, q)$  tal que existe um realizador linear-intervalar  $(p, q)$  de  $P$ . Mostramos que a dimensão linear-intervalar de uma ordem é um invariante de comparabilidade na seqüência.

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , dizemos que  $A \subseteq V$  é um *conjunto homogêneo* se todo vértice em  $V \setminus A$  é adjacente a ou todos os vértices em  $A$  ou a nenhum deles. Seja  $P_1 = (X, \prec_1)$  e  $P_2 = (X, \prec_2)$  ordens com o mesmo grafo de comparabilidade  $G$ . Dizemos que  $P_2$  é obtido de  $P_1$  por uma *reversão elementar* se há um conjunto homogêneo  $A \subseteq X$  de  $G$  que satisfaz as seguintes propriedades: (i)  $A$  não é um conjunto independente de  $G$ ; (ii) se  $x, y$  não estão ambos em  $A$ , então  $x \prec_1 y \iff x \prec_2 y$ ; e (iii) se  $\{x, y\} \subseteq A$ , então  $x \prec_1 y \iff y \prec_2 x$ .

**Teorema 3.1** (Gallai [31]). *Seja  $\pi$  uma propriedade sobre ordens. Para provar que  $\pi$  é um invariante de comparabilidade, é suficiente mostrar que se uma ordem  $Q$  é obtida de uma ordem  $P$  por uma reversão elementar e  $\pi$  é verificada em  $P$ , então  $\pi$  é verificada em  $Q$ .*

A prova do próximo lema é direta.

**Lema 3.2** ([31]). *Se  $P_1 = (X, \prec_1)$  e  $P_2 = (X, \prec_2)$  são ordens tais que  $P_2$  é obtido de  $P_1$  por uma reversão elementar do conjunto homogêneo  $A \subseteq X$ , então  $X \setminus A$*

é particionado nos conjuntos  $P_1^-(A) = \{x \in X \setminus A \mid x \prec_1 a \text{ para todo } a \in A\}$ ,  $P_1^+(A) = \{x \in X \setminus A \mid a \prec_1 x \text{ para todo } a \in A\}$  e  $P_1^\times(A) = \{x \in X \setminus A \mid x \parallel_1 a \text{ para todo } a \in A\}$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in X \setminus A$ . Se  $x \parallel_1 y$  para algum  $y \in A$ , então  $x \parallel_1 a$  para todo  $a \in A$ , pois  $A$  é um conjunto homogêneo. Logo  $x$  pertence somente a  $P_1^\times(A)$ . Suponha que exista  $x \in X \setminus A$  e  $a_1, a_2 \in A$  tais que  $a_2 \prec_1 x \prec_1 a_1$ . Portanto,  $a_2 \prec_1 a_1$ . Pela definição de reversão elementar, temos que  $a_1 \prec_2 a_2$ ,  $a_2 \prec_2 x$  e  $x \prec_2 a_1$ , o que contradiz o fato de  $P_2$  ser uma ordem. Conseqüentemente, para todo  $x \in X \setminus A$ , ou  $x \in P_1^-(A)$ , ou  $x \in P_1^+(A)$ , ou  $x \in P_1^\times(A)$ .  $\square$

Dadas as retas paralelas distintas  $L_1, \dots, L_p$  e um conjunto  $X$ , uma família de figuras  $\{F_x \mid x \in X\}$ , onde  $F_x = \{I_x^i \mid 1 \leq i \leq p\}$ , é dito um *modelo linear-intervalar*  $(p, q)$  se: (i) para todo  $1 \leq i \leq q$ ,  $I_x^i$  é não-trivial para algum  $x \in X$ ; e (ii) para todo  $q < i \leq p$ ,  $I_x^i$  é trivial para todo  $x \in X$ . A Figura 3.3 ilustra um modelo linear-intervalar  $(3, 2)$ . Ao invés de rotular cada intervalo de cada reta paralela, nesta figura identificamos os intervalos correspondentes a um mesmo elemento ligando-se suas extremidades de modo a formar uma “figura”, isto é,  $\ell(I_x^i)$  é ligado a  $\ell(I_x^{i+1})$  e  $r(I_x^i)$  a  $r(I_x^{i+1})$  ambos por um segmento de linha, para todo  $1 \leq i < p$ .

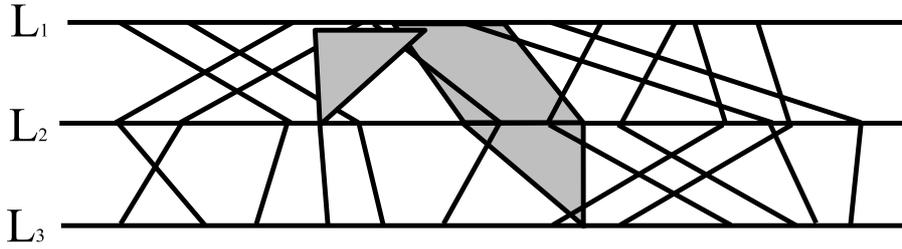


Figura 3.3: Um modelo linear-intervalar  $(3, 2)$ .

Uma ordem  $P = (X, \prec)$  é dita ser  $(p, q)$ -*linear-intervalar representável* quando existir um modelo  $\{F_x \mid x \in X\}$  linear-intervalar  $(p, q)$  tal que  $x \prec y \iff F_x \ll F_y$ . Claramente existe uma equivalência entre os conceitos de possuir um realizador linear-intervalar e ser linear-intervalar representável, conforme observamos formalmente em seguida.

**Lema 3.3.** *Se  $P = (X, \prec)$  é uma ordem, então  $P$  possui um realizador linear-intervalar  $(p, q)$  se e somente se  $P$  é  $(p, q)$ -linear-intervalar representável.*

*Demonstração.* Sejam  $\{P_1, \dots, P_p\}$  um realizador linear-intervalar  $(p, q)$  de  $P$  e  $P_i$  uma ordem  $(X, \prec_i)$ , para todo  $1 \leq i \leq p$ . Sem perda de generalidade, sejam  $P_1, \dots, P_q$  as ordens não-lineares de intervalo e  $\mathcal{R}_i = \{I_x^i \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo de  $P_i$  para todo  $1 \leq i \leq q$ . Construa um modelo  $\mathcal{R}$  linear-intervalar  $(p, q)$

como segue. Inclua  $\mathcal{R}_i$  em  $L_i$  para todo  $1 \leq i \leq q$ . Em seguida, para todo  $q < i \leq p$ , inclua os pontos pertencentes a  $\{p_x^i \mid x \in X\}$  em  $L_i$  tal que  $p_x^i < p_y^i \iff x \prec_i y$ . Portanto,  $x \prec y \iff x \prec_i y$  para todo  $1 \leq i \leq p \iff I_x^i \ll I_y^i$  para todo  $1 \leq i \leq q$ , e  $p_x^i < p_y^i$  para todo  $q < i \leq p \iff F_x \ll F_y$ .

Por outro lado, seja  $\{F_x \mid x \in X\}$  um modelo linear-intervalar  $(p, q)$  de  $P$ . Seja  $P_i = (X, \prec_i)$  a ordem de intervalo correspondente ao modelo  $\mathcal{R}_i = \{F_x \cap L_i \mid x \in X\}$ , para todo  $1 \leq i \leq p$ . Logo  $x \prec y \iff F_x \ll F_y \iff x \prec_i y$ , para todo  $1 \leq i \leq p$ . Como  $P_1, \dots, P_q$  são ordens de intervalo não-lineares e  $P_{q+1}, \dots, P_p$  são ordens lineares,  $\{P_1, \dots, P_p\}$  é um realizador linear-intervalar  $(p, q)$  de  $P$ .  $\square$

Sejam  $S$  um conjunto de pontos e  $M < N$  números reais. Sejam  $W(S) = \max\{r - s \mid r, s \in S\}$  e  $\min(S) = \min\{s \mid s \in S\}$ . A operação de *enquadrar*  $S$  entre  $M$  e  $N$  é aquela de fazer  $W(S)$  igual a  $N - M$  pelo aumento ou diminuição proporcional do espaçamento entre os pontos em  $S$ , isto é, movendo-se cada  $s \in S$  para  $(s - \min(S))(N - M)/W(S) + M$ . Observe o exemplo da Figura 3.4. Seja  $S$  o conjunto de pontos das figuras com contorno em negrito no modelo. A figura apresenta o modelo resultante do enquadramento de  $S$  entre  $M$  e  $N$ .

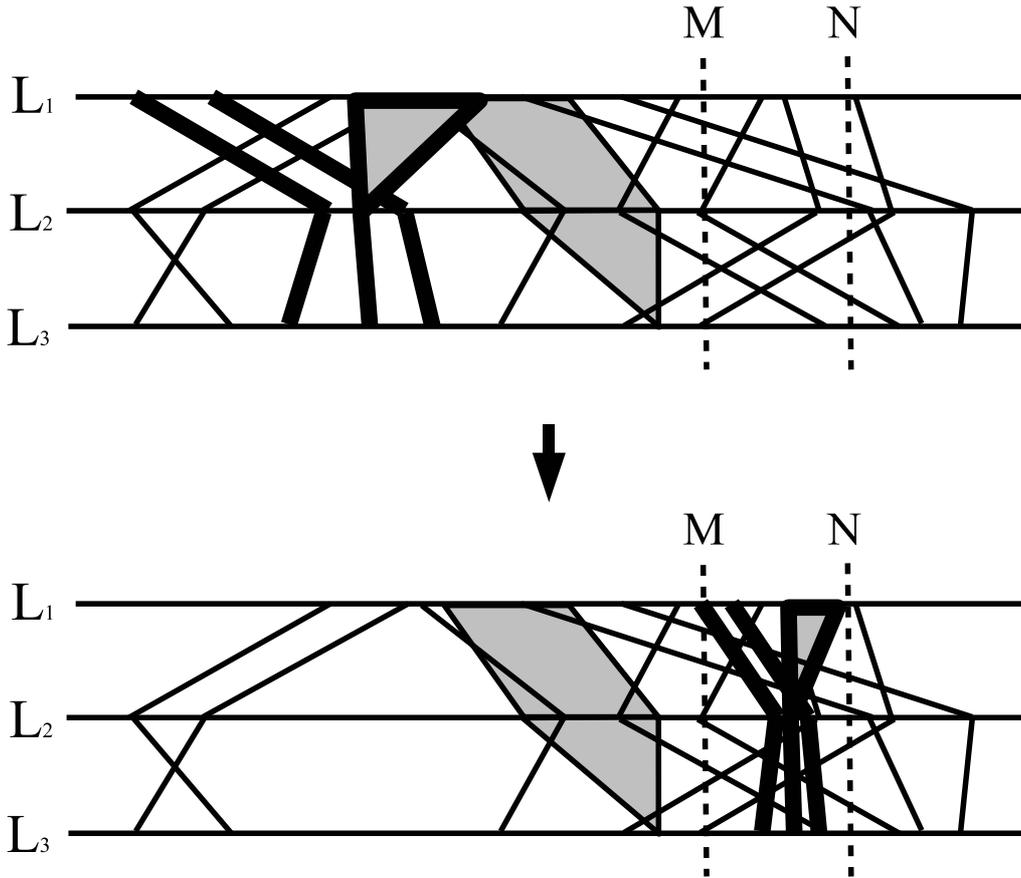


Figura 3.4: Exemplo da operação de enquadramento.

**Teorema 3.4.** *Ser  $(p, q)$ -linear-intervalar representável é um invariante de comparabilidade.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1, é suficiente mostrar que se  $P = (X, \prec_P)$  é  $(p, q)$ -linear-intervalar representável, então  $Q = (X, \prec_Q)$  também o é, onde  $Q$  é obtida de  $P$  por uma reversão elementar do conjunto homogêneo  $A \subseteq X$ .

Seja  $\mathcal{R} = \{F_x \mid x \in X\}$  um modelo linear-intervalar  $(p, q)$  de  $P$ . Pela propriedade (i) de uma reversão elementar, seja  $\{b, c\} \subseteq A$  tal que  $b \prec_P c$ . Seja  $M = r(I_b^1)$  e  $N = \ell(I_c^1)$ . Aplique as seguintes transformações em  $\mathcal{R}$ . Primeiro, para cada  $1 \leq i \leq p$ , ajuste os pontos extremos de intervalo de modo que  $r(I_b^i) = M$  e  $\ell(I_c^i) = N$  através do deslocamento conveniente dos extremos sem mudar sua ordem. Em seguida, aplique a operação de enquadramento sobre  $\{\ell(I_a^i), r(I_a^i) \mid a \in A, 1 \leq i \leq p\}$  entre  $M$  e  $N$ . Finalmente, reflita horizontalmente as figuras correspondentes aos vértices em  $A$  através da linha vertical que corta o modelo em  $(M + N)/2$ , obtendo o modelo resultante  $\mathcal{R}' = \{F'_x \mid x \in X\}$ . Mostraremos que  $\mathcal{R}'$  é um modelo linear-intervalar  $(p, q)$  de  $Q$ .

Como a operação de enquadrar é por construção composta com a reflexão horizontal, segue que para todo  $\{x, y\} \subseteq A$ ,  $x \prec_Q y \iff y \prec_P x \iff F_y \ll F_x \iff F'_x \ll F'_y$ , que está de acordo com o que queremos provar. Também verifica-se que para todo  $\{x, y\} \subseteq X \setminus A$ ,  $x \prec_Q y \iff x \prec_P y \iff F_x \ll F_y \iff F'_x \ll F'_y$ , o que é novamente consistente com o que queremos provar. Finalmente, para todo  $x \in X \setminus A$  e  $y \in A$ , considere os subcasos em que  $x \prec_Q y$ ,  $y \prec_Q x$  ou  $x \parallel_Q y$ . Pelo Lema 3.2, temos que:

- $x \prec_Q y \iff x \prec_P y \iff x \prec_P a$  para todo  $a \in A \iff x \prec_P b \iff F_x \ll F_b \iff F'_x \ll F'_a$  para todo  $a \in A \iff F'_x \ll F'_y$
- $y \prec_Q x \iff y \prec_P x \iff a \prec_P x$  para todo  $a \in A \iff c \prec_P x \iff F_c \ll F_x \iff F'_a \ll F'_x$  para todo  $a \in A \iff F'_y \ll F'_x$
- $x \parallel_Q y \iff x \parallel_P y \iff x \parallel_P a$  para todo  $a \in A \iff x \parallel_P b$  e  $x \parallel_P c \iff F_x \times F_b$  e  $F_x \times F_c \iff F'_x \times F'_a$  para todo  $a \in A \iff F'_x \times F'_y$

Isto completa a prova. □

**Corolário 3.5.** *A dimensão linear-intervalar é um invariante de comparabilidade.*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $Q$  ordens com o mesmo grafo de comparabilidade. Pelo Lema 3.3 e Teorema 3.4,  $P$  possui um realizador linear-intervalar  $(p, q)$  se e somente se  $P$  é  $(p, q)$ -linear-intervalar representável se e somente se  $Q$  é  $(p, q)$ -linear-intervalar representável se e somente se  $Q$  possui um realizador linear-intervalar  $(p, q)$ . □

Como consequência, temos o conhecido resultado:

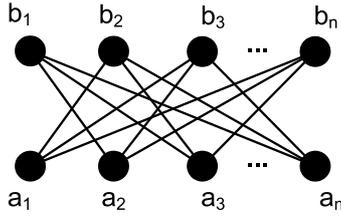


Figura 3.5: Ordem  $S_n$ .

**Corolário 3.6.** *Dimensão intervalar é um invariante de comparabilidade.*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $Q$  ordens com o mesmo grafo de comparabilidade. Pelo Corolário 3.5,  $lidim(P) = lidim(Q) = (p, q)$ . Logo,  $idim(P) = idim(Q) = p$ .  $\square$

### 3.3 Ordens com dimensão linear-intervalar arbitrária

Nesta seção apresentamos ordens que possuem dimensão linear-intervalar com valores arbitrariamente grandes.

Seja  $S_n$  a ordem definida na Figura 3.5. É conhecido que  $dim(S_n) = idim(S_n) = n$  [53]. Seja  $I_n = (X, \prec)$  a ordem tal que  $X = \{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$  e  $a_{ij} \prec a_{rs}$  se e somente se  $j < r$ . Note que  $I_n$  é uma ordem de intervalo. De fato, um modelo de intervalo de  $I_n$  é construído da seguinte forma: defina  $n$  retas verticais representando as cliques (numeradas da esquerda para a direita como 1, 2, etc.) e faça  $a_{ij}$  corresponder a um intervalo que começa na  $i$ -ésima e termina na  $j$ -ésima cliques, para todo  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Como exemplo, a Figura 3.6 apresenta  $I_4$  e um de seus modelos de intervalo. Portanto,  $idim(I_n) = 1$ , enquanto é sabido que  $dim(I_n)$  aumenta indefinidamente quando  $n$  também aumenta indefinidamente [53].

Analisamos a questão relativa à existência de ordens  $P$  tais que  $lidim(P) = (p, q)$  para todo  $p \geq q \geq 0$ .

**Lema 3.7.** *Se  $p \geq 1$ , então  $lidim(S_p) = (p, 0)$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente do fato que  $dim(S_p) = idim(S_p) = p$ .  $\square$

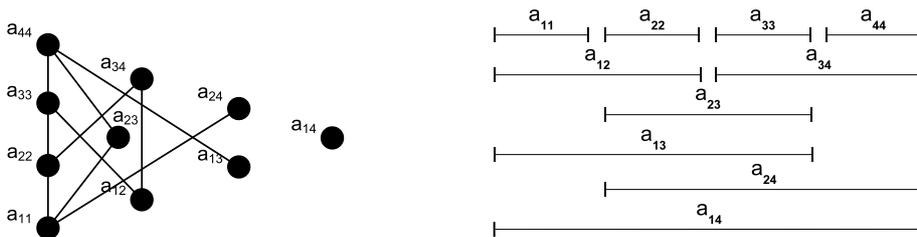


Figura 3.6: Ordem  $I_4$  e um de seus modelos de intervalo.

Denote por  $P \prec Q$  a união das ordens  $P$  e  $Q$  de maneira que cada elemento de  $P$  precede cada elemento de  $Q$ .

**Lema 3.8.** *Se  $p \geq 1$ , então  $\text{lidim}(S_p \prec I_n) = (p, 1)$ , para algum  $n \geq 1$  suficientemente grande.*

*Demonstração.* Como  $\text{dim}(I_n)$  aumenta indefinidamente quando  $n$  também aumenta indefinidamente, seja  $n \geq 1$  tal que  $\text{dim}(I_n) > p$ . Defina  $P = S_p \prec I_n$ . Sejam  $\{L_1, \dots, L_p\}$  um realizador linear de  $S_p$  e  $I_n^L$  uma extensão linear de  $I_n$ . Como  $\{L_1 \prec I_n, L_2 \prec I_n^L, \dots, L_p \prec I_n^L\}$  é um realizador de intervalo de  $P$ , então  $\text{lidim}(P) \leq (p, 1)$ . Por outro lado, como  $S_p \subset P$ , então  $\text{lidim}(P) \geq (p, 0)$ . Além disso, como  $I_n \subset P$ , e portanto  $\text{dim}(P) \geq \text{dim}(I_n) > p$ , então  $\text{lidim}(P) \geq (p, 1)$ .  $\square$

Finalmente, endereçamos a questão para o caso  $p \geq q \geq 2$ . Seja  $I_p^q$  a ordem definida na Figura 3.7. Os retângulos pontilhados ligados por um segmento de reta significa que  $c_i \prec d_j$  para todo  $1 \leq i, j \leq p$  e  $x_i \prec a$  para todo  $1 \leq i \leq p$ .

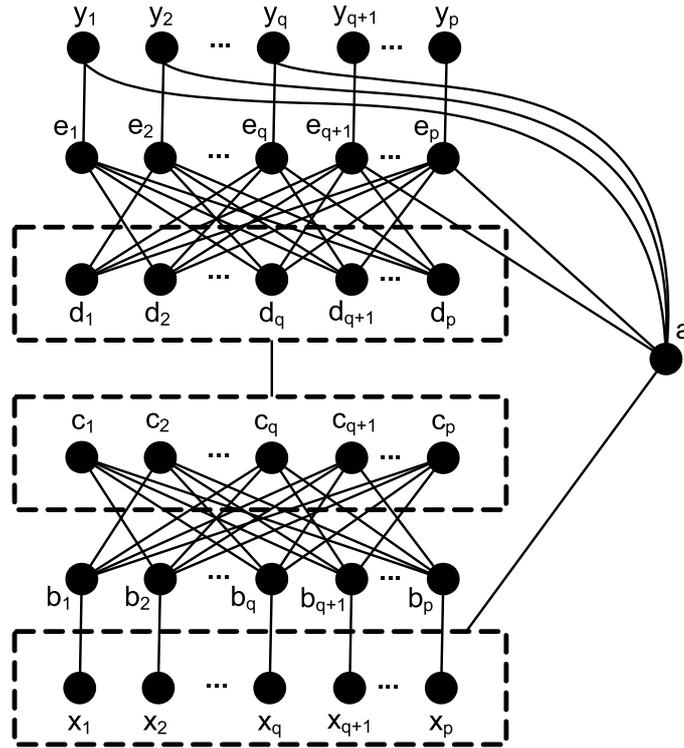


Figura 3.7: Ordem  $I_p^q$ .

**Lema 3.9.** *Se  $p \geq q \geq 2$ , então  $\text{lidim}(I_p^q) = (p, q)$ .*

*Demonstração.* Seja  $(X, \prec)$  a ordem  $I_p^q$ . Denote por  $L(S)$  uma ordem linear sobre o conjunto  $S$ . Para todo  $1 \leq k \leq p$ , seja  $\mathcal{R}_k = \{I_x^k \mid x \in X\}$  o modelo de intervalo definido pela seguinte ordem sobre os extremos de intervalo (por conveniência, denotaremos os extremos de um intervalo trivial  $I_x^k$  por  $p_x^k$ ):

- $L(\{p_{x_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < L(\{p_{b_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < p_{c_k}^k < p_{x_k}^k < \ell(I_a^k) < p_{b_k}^k < L(\{p_{c_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < L(\{p_{d_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < p_{e_k}^k < r(I_a^k) < p_{y_k}^k < p_{d_k}^k < L(\{p_{e_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < L(\{p_{y_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\})$ , se  $k \in \{1, \dots, q\}$ ;
- $L(\{p_{x_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < L(\{p_{b_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < p_{c_k}^k < p_{x_k}^k < p_a^k < p_{b_k}^k < L(\{p_{c_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < L(\{p_{d_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < p_{e_k}^k < p_{y_k}^k < p_{d_k}^k < L(\{p_{e_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\}) < L(\{p_{y_i}^k \mid 1 \leq i \leq p \text{ e } i \neq k\})$ , se  $k \in \{q+1, \dots, p\}$ .

Claramente,  $P_i$  sendo a ordem correspondente a  $\mathcal{R}_i$  para cada  $1 \leq i \leq p$ ,  $\{P_i \mid 1 \leq i \leq p\}$  é um realizador intervalar de  $I_p^q$ . Logo,  $lidim(I_p^q) \leq (p, q)$ .

Por outro lado, como  $S_p \subset I_p^q$ , então  $idim(I_p^q) \geq p$  e, conseqüentemente,  $idim(I_p^q) = p$ . Sejam  $\{P_i \mid 1 \leq i \leq p\}$  um realizador intervalar de  $I_p^q$  e  $\mathcal{R}_i = \{I_x^i \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo correspondente a  $P_i$  para todo  $1 \leq i \leq p$ . Existe  $1 \leq i < j \leq p$  tal que  $\ell(I_{c_i}^k) < r(I_{b_i}^k)$  e  $\ell(I_{c_j}^k) < r(I_{b_j}^k)$  para algum  $1 \leq k \leq p$  pois, caso contrário,  $r(I_{b_i}^k) < \ell(I_{c_j}^k) < r(I_{b_j}^k) < \ell(I_{c_i}^k) < r(I_{b_i}^k)$ , o que seria uma contradição. Sem perda de generalidade, considere  $\ell(I_{c_i}^i) < r(I_{b_i}^i)$  para cada  $1 \leq i \leq p$ . Seja  $1 \leq k \leq p$ . Como  $x_k \parallel c_k$  e  $r(I_{x_k}^i) < r(I_{b_k}^i) < \ell(I_{c_k}^i)$  para todo  $1 \leq i \leq p$  e  $i \neq k$ , portanto  $\ell(I_{c_k}^k) < r(I_{x_k}^k) < \ell(I_{b_k}^k) < r(I_{b_k}^k)$ . Além disso, para cada  $1 \leq k \leq q$ ,  $r(I_{b_1}^k), \dots, r(I_{b_{k-1}}^k), r(I_{b_{k+1}}^k), \dots, r(I_{b_p}^k) < \ell(I_{c_k}^k) < r(I_{x_k}^k) < \ell(I_a^k)$ . Como  $a \parallel b_k$  para cada  $1 \leq k \leq q$ , então  $r(I_{x_k}^k) < \ell(I_a^k) < r(I_{b_k}^k)$ . Simetricamente, segue que para algum  $J \subseteq \{1, \dots, p\}$  tal que  $|J| = q$ ,  $\ell(I_a^k) < r(I_a^k)$  para todo  $k \in J$ . Portanto,  $lidim(I_p^q) \geq (p, q)$ .  $\square$

### 3.4 Uma caracterização para grafos PI

Como anunciado na introdução, o problema de reconhecimento de grafos PI motiva a definição da dimensão linear-intervalar. Nas seções anteriores, investigamos mais profundamente tal conceito. Nesta seção, relacionamos o problema de reconhecimento de grafos PI com a dimensão linear-intervalar.

Definimos uma ordem  $(X, \prec)$  como uma *ordem PI* se existir um modelo PI  $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$  tal que  $x \prec y$  se e somente se  $T_x \ll T_y$ .

**Teorema 3.10.** *Uma ordem  $P$  é uma ordem PI se e somente se  $lidim(P) \leq (2, 1)$ .*

*Demonstração.* Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem PI e  $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$  um modelo PI de  $P$ . Considere as ordens  $P_I = (X, \prec_I)$  e  $P_L = (X, \prec_L)$  tais que  $x \prec_I y \iff b(T_x) \ll b(T_y)$  e  $x \prec_L y \iff t(T_x) < t(T_y)$ . Como  $x \prec y \iff x \prec_L y$  e  $x \prec_I y$ , então  $\{P_L, P_I\}$  é um realizador linear-intervalar ou  $(2, 1)$ , ou  $(2, 0)$  de  $P$ . Por outro lado, seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem tal que  $lidim(P) \leq (2, 1)$ . Se  $lidim(P) \leq (2, 0)$ , o

Problema de Decisão	Complexidade	Classe de
$lidim(P) = (1, 0)$	P	ordens lineares
$lidim(P) \leq (1, 1)$	P	ordens de intervalo
$lidim(P) \leq (2, 0)$	P	ordens de permutação $\cup$ ordens de intervalo
$lidim(P) \leq (2, 1)$	em aberto	ordens PI
$lidim(P) \leq (2, 2)$	P	ordens de trapézios
$lidim(P) \leq (p, q), p \geq 3, 0 \leq q \leq p$	NP-completo	ordens

Tabela 3.1: Complexidade de reconhecimento de dimensão linear-intervalar.

resultado se verifica. Suponha  $lidim(P) = (2, 1)$  e então seja  $\{P_I, P_L\}$  um realizador linear-intervalar  $(2, 1)$  de  $P$  tal que  $P_I = (X, \prec_I)$  é uma ordem intervalar não-linear. Seja  $\mathcal{R}_I = \{I_x \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo de  $P_I$ . Construimos um modelo PI  $\mathcal{R} = \{T_x \mid x \in X\}$  tal que  $b(T_x) = I_x$  para todo  $x \in X$ , e  $t(T_x) < t(T_y) \iff x \prec_L y$ . Logo,  $x \prec y \iff T_x \ll T_y$ .  $\square$

**Corolário 3.11.** *Ser uma ordem PI é um invariante de comparabilidade.*

*Demonstração.* Segue diretamente do Corolário 3.5 e Teorema 3.10.  $\square$

A redução do problema de reconhecimento de grafos PI àquele de ordens PI é direta pelo Corolário 3.11. De fato, um grafo é PI se e somente se *qualquer* orientação transitiva do seu complemento for uma ordem PI. Apesar da caracterização fornecida pelo Teorema 3.10, o problema de reconhecimento de grafos PI permanece em aberto dado que não se conhece um procedimento eficiente que decide se a dimensão linear-intervalar de uma dada ordem é no máximo  $(2, 1)$ .

## 3.5 Resultados de complexidade

Neste capítulo, introduzimos a dimensão linear-intervalar, uma generalização da bem-conhecida dimensão intervalar, motivados pelo problema de reconhecimento de grafos PI. Mostramos que possuir dimensão linear-intervalar  $(p, q)$  é um invariante de comparabilidade e apresentamos exemplos de ordens  $P$  que possuem  $lidim(P) = (p, q)$  para todo  $p \geq q \geq 0$ .

As complexidades de reconhecimento das dimensões linear e intervalar são bem conhecidas. Decidir se  $dim(P) \leq d$  e  $idim(P) \leq d$  é polinomial para  $d \leq 2$  e NP-completo para  $d \geq 3$  [25, 42, 55]. Para a dimensão linear-intervalar, a Tabela 3.1 resume os resultados de complexidade.

É importante notar que a única complexidade em aberto é aquela para decidir se  $lidim(P) \leq (2, 1)$ . Pelo Teorema 3.10 e Corolário 3.11, o problema de classificá-la não é mais difícil do que aquele de reconhecer grafos PI, problema em aberto desde 1987 [7, 17, 50].

# Capítulo 4

## Introdução ao Problema da Contagem de Intervalos

O *problema da contagem de intervalos* é aquele de determinar o menor número necessário de comprimentos de intervalo para representar um modelo de intervalo de um dado grafo ou ordem de intervalo. Apesar de diversos estudos sobre os grafos e ordens de intervalo, surpreendentemente existem poucos resultados sobre o problema da contagem de intervalos. A contribuição deste capítulo é fornecer uma visão geral dos resultados acerca deste problema e outros relacionados. Como a quantidade deles é reduzida, este capítulo fornece na verdade o estado-da-arte. O capítulo seguinte é dedicado a apresentar as nossas contribuições sobre o tema.

### 4.1 Introdução

Dado um grafo  $G$  (resp. ordem  $P$ ), consideramos portanto o problema de computar o menor número  $IC(G)$  (resp.  $IC(P)$ ) de comprimentos de intervalo para representar um modelo de intervalo de  $G$  (resp.  $P$ ), problema este que chamamos de *contagem de intervalos* (do inglês *interval count*) [26, 40]. O problema da contagem de intervalos foi sugerido por Ronald Graham (cf. [40]), quem mais tarde fez contribuições ao problema.

Existem grafos com valores arbitrários de contagem de intervalos. Em particular, seja  $G_1$  o grafo que consiste de um único vértice  $u_1$ . Para cada  $k \geq 2$ , seja  $G_k$  o grafo que consiste de três cópias disjuntas de  $G_{k-1}$  mais um vértice  $u_k$  adjacente a todos os outros. É fácil mostrar por indução em  $k$  que  $G_k$  é um grafo de intervalo e que  $IC(G_k) = k$  para todo  $k \geq 1$ . A complexidade de decidir se  $IC(G) = k$  (resp.  $IC(P) = k$ ) para um grafo  $G$  (resp. ordem  $P$ ) e um inteiro  $k > 1$  encontra-se em aberto: atualmente não se sabe se é um problema NP-completo.

O problema da contagem de intervalos é intrigante no sentido de que muitas

afirmações motivadas pela intuição foram mostradas mais tarde não serem verdadeiras. Como ilustração, Graham estabeleceu uma conjectura de que a contagem de intervalos de um grafo decresce de no máximo uma unidade quando exatamente um vértice é removido do grafo. Intuitivamente, se um grafo possui um modelo que requer no mínimo  $k$  comprimentos distintos, a operação de remover um intervalo deste modelo (ou, equivalentemente, um vértice do grafo) parece não resultar em um grafo que possa ser representado por um modelo usando  $k - 2$  ou menos comprimentos distintos, pois se assim for, a re-introdução do intervalo que falta poderia gerar um modelo do grafo original usando  $k - 1$  comprimentos distintos. Esta conjectura foi mostrada ser verdadeira somente para certos grafos de intervalo, como discutiremos a frente, mas falsa em geral.

Como o problema de contagem de intervalos faz sentido somente para grafos (resp. ordens) de intervalo, assume-se que os grafos (resp. ordens) possuem um modelo de intervalo quando este problema está no contexto. Denotando por  $IC(\mathcal{R})$  o número de comprimentos de intervalo distintos em um modelo  $\mathcal{R}$ , dada uma ordem de intervalo  $P$  podemos escrever:

$$IC(P) = \min\{IC(\mathcal{R}) \mid \mathcal{R} \text{ é um modelo de intervalo de } P\}$$

e, de maneira similar, dado um grafo  $G$ :

$$IC(G) = \min\{IC(\mathcal{R}) \mid \mathcal{R} \text{ é um modelo de intervalo de } G\}$$

Usando a relação de concordância definida entre ordens e grafos de intervalo, podemos enunciar o problema de contagem de intervalos de grafos em uma maneira que evidencia seu relacionamento com a contagem de intervalos de ordens. Dado um grafo  $G$ , podemos escrever que:

$$IC(G) = \min\{IC(P) \mid P \text{ concorda com } G\}$$

Na literatura, os resultados sobre a contagem de intervalos em geral foram concebidos ou para grafos, ou para ordens. Nesta introdução, apresentamos tais resultados na versão em que eles foram originalmente estabelecidos, sobre a contagem de intervalos de ou ordens, ou grafos, ou ambos. Um resultado sobre a contagem de intervalos de grafos (resp. ordens) não necessariamente se estende para a contagem de intervalos de ordens (resp. grafos). Tomemos o aspecto da complexidade, por exemplo. Se existir uma maneira de determinar eficientemente a contagem de intervalos de ordens, isto não implica que também exista uma maneira eficiente de fazer o mesmo para grafos. Com efeito, a estratégia natural de enumerar todas as ordens que concordam com o dado grafo e determinar a contagem de intervalos de cada uma falha pois podem existir um número exponencial delas (um grafo totalmente desconexo com  $n$  vértices possui  $n!$  ordens distintas que concordam com ele). Por outro

lado, uma maneira eficiente de determinar a contagem de intervalos de grafos não implica na existência similar para ordens. Não é provado ser impossível existir uma maneira de caracterizar, para cada grafo, uma ordem que concorda com ele e possui a menor contagem de intervalos dentre todas as outras que também concordam com ele. Usando-se as condições necessárias descritas nesta suposta caracterização, poder-se-ia conceber um algoritmo eficiente para computar a contagem de intervalos de tal ordem (e, por conseqüência, deste grafo). Em teoria, portanto, isto poderia ser feito sem que se saiba determinar eficientemente a contagem de intervalos precisa de cada uma das outras ordens que concordam com este grafo.

Um grafo  $K_{1,r}$  é um grafo bipartido completo para o qual as cardinalidades dos conjuntos que constituem a bipartição são iguais a 1 e a  $r$ . Uma *ordem*  $(1 + 3)$  é aquela isomorfa à ordem  $(\{a, b, c, d\}, \prec)$  tal que  $b \prec c \prec d$  e  $a$  é incomparável a  $b, c$  e  $d$ . Um *grafo de intervalo próprio* é um grafo de intervalo que admite um modelo de intervalo no qual não existem intervalos  $I_x$  e  $I_y$  tais que  $\ell(I_x) < \ell(I_y) < r(I_y) < r(I_x)$ .

Nas Seções 4.2, 4.3 e 4.4, fornecemos uma compilação breve dos resultados sobre a contagem de intervalos de grafos e ordens que possuem respectivamente contagem de intervalos igual a um, contagem de intervalos igual a dois e contagem de intervalos com valores arbitrários. Na Seção 4.5, a contagem de intervalos é estudada restringindo-se o foco a subclasses de grafos e ordens de intervalo. Na Seção 4.6, mostramos a relação que existe entre a contagem de intervalos de um grafo e o seu número de cliques, fornecendo um limite superior justo para a contagem de intervalos de grafos possuindo  $q$  cliques. Finalmente, na Seção 4.7, apresentamos os problemas relacionados a tamanhos de intervalos, porém que não tem por objetivo computar a minimização do número deles.

## 4.2 Contagem de intervalos igual a um

A questão de decidir se  $IC(G) = 1$  para grafo de intervalo  $G$  é equivalente àquela de reconhecer se  $G$  é um grafo de intervalo unitário. De fato, dado um modelo de intervalo usando somente intervalos do mesmo comprimento, é possível ou comprimir ou expandir proporcionalmente todos os intervalos de modo que eles sejam transformados em intervalos unitários. O problema de reconhecimento de grafos de intervalo unitário é bem-conhecido desde a década de 60 [48] e pode ser resolvido com algoritmos de tempo polinomial, alguns deles sendo de tempo linear [18, 19, 22, 24, 28, 34, 48]. Além disso, grafos de intervalo unitário são caracterizados por uma estrutura simples finita proibida, como estabelecido pelo Teorema 4.1 (primeiramente enunciado por Roberts [48]; a prova apresentada aqui é devida a Bogart e West [4]).

**Teorema 4.1** (Bogart, West [4]). *Se  $G$  é um grafo de intervalo, então  $G$  é um grafo de intervalo unitário se e somente se  $G$  é livre de  $K_{1,3}$ .*

*Demonstração.* Claramente, um grafo  $K_{1,3}$  não pode ser representado por um modelo de intervalo unitário. Por outro lado, suponha que  $G$  seja livre de  $K_{1,3}$ . Afirmando que existe um modelo de intervalo de  $G$  no qual nenhum intervalo está propriamente incluído em outro. Com o propósito de encontrar uma contradição, suponha que a afirmação seja falsa. Seja  $\mathcal{R} = \{I_v \mid v \in V(G)\}$  um modelo de intervalo possuindo o menor número de inclusões de intervalo, isto é, intervalos incluídos em algum outro. Seja  $I_x \subseteq I_y$  para algum  $\{x, y\} \subseteq V(G)$ . Como  $\ell(I_x)$  não pode ser movido para a esquerda passando através de  $\ell(I_y)$ , pela minimalidade do número de inclusões entre intervalos, então existe  $a \in V(G)$  tal que  $I_a \cap I_y \neq \emptyset$  e  $r(I_a) < \ell(I_x)$ . De maneira simétrica, existe  $b \in V(G)$  tal que  $I_b \cap I_y \neq \emptyset$  e  $r(I_x) < \ell(I_b)$ . Mas então  $G[\{y, a, x, b\}]$  é isomorfo a  $K_{1,3}$ , o que é uma contradição. Portanto, seja  $\mathcal{R} = \{I_v \mid v \in V(G)\}$  um modelo de intervalo de  $G$  que não possui inclusões entre intervalos, ou seja, um modelo de intervalo próprio. Construimos um modelo de intervalo unitário de  $G$  transformando  $\mathcal{R}$  iterativamente como se segue.

Em cada iteração, seja  $I$  o intervalo não-unitário que possui o menor dos extremos esquerdos de intervalo. Se não há nenhum extremo direito de intervalo contido na porção  $(\ell(I), r(I))$  do modelo, então seja  $p = \ell(I)$ . Caso contrário, seja  $p$  o maior dentre tais pontos (neste caso,  $p$  pertenceria a um intervalo que já tenha sido ajustado para comprimento unitário, de modo que não haja contradição com ambos os fatos de  $\mathcal{R}$  não possuir nenhuma inclusão entre intervalos e a escolha de  $I$ ). Então  $p \leq \min\{\ell(I) + 1, r(I)\}$ . Ajuste o modelo através da compressão ou expansão proporcional da porção do modelo definido por  $[p, r(I)]$  de maneira que ele se encaixe na porção  $[p, \ell(I) + 1]$  do modelo (translade a porção  $[r(I), \infty)$  do modelo para  $[\ell(I) + 1, \infty)$ ). A ordem entre os extremos de intervalo não muda, intervalos alvos de iterações passadas permanecem de comprimento unitários, e agora  $I$  também tem comprimento 1. Claramente, quando nenhum intervalo puder ser selecionado como  $I$ , o modelo de intervalo resultante é um modelo de intervalo unitário de  $G$ .  $\square$

**Corolário 4.2** ([18, 19, 22, 24, 28, 34, 48]). *Se  $G$  é um grafo de intervalo, então  $G$  é um grafo de intervalo unitário se e somente se  $G$  é um grafo de intervalo próprio.*

*Demonstração.* Claramente, um grafo de intervalo unitário é um grafo de intervalo próprio. Por outro lado, a prova do Teorema 4.1 transforma um modelo de intervalo próprio em um modelo de intervalo unitário.  $\square$

**Corolário 4.3** (Roberts [48]). *Se  $P$  é uma ordem de intervalo, então  $P$  é uma ordem de intervalo unitária se e somente se  $P$  não tem  $(1 + 3)$  como subordem induzida.*

*Demonstração.* Segue do Teorema 4.1 e o fato de que toda ordem que concorda com o grafo  $K_{1,3}$  é uma ordem  $(1 + 3)$ .  $\square$

Portanto, ter contagem de intervalos igual a um para grafos e ordens são questões bem-resolvidas. Além disso, note que a conjectura de Graham trivialmente é verdadeira para todos os grafos possuindo contagem de intervalos igual a um.

### 4.3 Contagem de intervalos igual a dois

Embora decidir se um grafo ou ordem possui contagem de intervalos igual a um é uma questão bem-conhecida e bem-resolvida, existindo algoritmos de reconhecimento de tempo linear, não é conhecida a complexidade de decidir se  $IC(G) = 2$  (resp.  $IC(P) = 2$ ) dado um grafo  $G$  (resp. ordem  $P$ ), ou seja, se este problema é ou não NP-completo.

Apesar da inexistência de uma maneira eficiente de se reconhecer se a contagem de intervalos de um dado grafo é no máximo igual a dois, Skrien apresentou uma caracterização daqueles, dentre tais grafos, que admitem um modelo de dois tamanhos sendo o menor deles igual a zero [49]. Em outras palavras, Skrien caracterizou os grafos que podem ser representados por um modelo no qual cada tamanho de intervalo é zero ou um. Naturalmente, se  $G$  é um grafo que admite um modelo utilizando apenas tamanhos zero ou um, o conjunto  $S$  dos vértices de tamanho zero forma um conjunto de vértices simpliciais. Além disso, o grafo  $G[V(G) \setminus S]$  induzido pelos vértices de tamanho um é um grafo de intervalo unitário. Por outro lado, não basta existir um conjunto  $S$  de vértices simpliciais tal que  $G[V(G) \setminus S]$  seja um grafo de intervalo unitário para afirmarmos que existe um modelo de  $G$  que possui apenas tamanhos zero ou um. A condição de suficiência de Skrien é enunciada a seguir.

**Teorema 4.4** (Skrien [49]). *Seja  $G$  um grafo de intervalo e  $S$  um conjunto de vértices simpliciais de  $G$ . Tal grafo  $G$  possui um modelo que utiliza somente tamanhos zero ou um se e somente se existirem orientações  $O$  de  $G \setminus S$  e  $F$  de  $\overline{G}$  tais que:*

1.  $O \cup F$  é uma orientação transitiva;
2.  $OF \cup FO \cup FF \subset F$   
(onde  $AB$  denota o conjunto de pares  $ab$  tais que  $ax \in A$  e  $xb \in B$ ).

Esta caracterização pode ser reconhecida em tempo  $O(n^3)$  (cf. [49]).

Fishburn, por outro lado, investigou a topologia de modelos de ordens em  $\mathcal{P}_2$  (a classe das ordens possuindo contagem de intervalos igual a 2). Dado uma ordem  $P \in \mathcal{P}_2$ , é claro que existem modelos de intervalo de  $P$  possuindo o menor dos dois comprimentos distintos igual a um. A questão de Fishburn foi a de determinar o

conjunto  $\theta(P)$  de comprimentos admissíveis para o segundo comprimento, assumindo o menor fixado em um. Em outras palavras, dado uma ordem de intervalo  $P = (X, <)$ , o problema é determinar o conjunto:

$$\theta(P) = \{ \alpha > 1 \mid \text{existe um modelo de intervalo } \mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\} \text{ de } P \\ \text{com } IC(\mathcal{R}) = 2 \text{ tal que } |I_x| \in \{1, \alpha\} \text{ para todo } x \in X \}$$

Como exemplo, se  $P$  é uma ordem que concorda com o grafo  $K_{1,t+2}$ ,  $t \geq 1$ , então  $\theta(P) = (t, \infty)$  (isto é, um intervalo contínuo aberto em  $t$  e no infinito). À primeira vista,  $\theta(P)$  parece ser sempre um intervalo contínuo aberto no infinito, motivado pelo seguinte raciocínio. Os intervalos com o maior comprimento em um modelo de intervalo usando dois comprimentos parecem permitir um incremento infinitesimal em seus comprimentos sem afetar a propriedade do modelo de ser constituído por dois tamanhos de intervalo, que é exatamente o que ocorre com um modelo usando dois tamanhos do grafo  $K_{1,3}$ . No entanto, esta é mais uma intuição equivocada acerca do problema. Fishburn provou que, para algumas ordens, tal incremento no maior tamanho tem um limite. Apresentou exemplos de ordens  $P \in \mathcal{P}_2$  para as quais  $\theta(P) = (1, k)$  para todo  $k \geq 2$ . Reproduzimos abaixo um exemplo para  $k = 2$ . Exemplos para  $k > 2$  pode ser encontrado em [26].

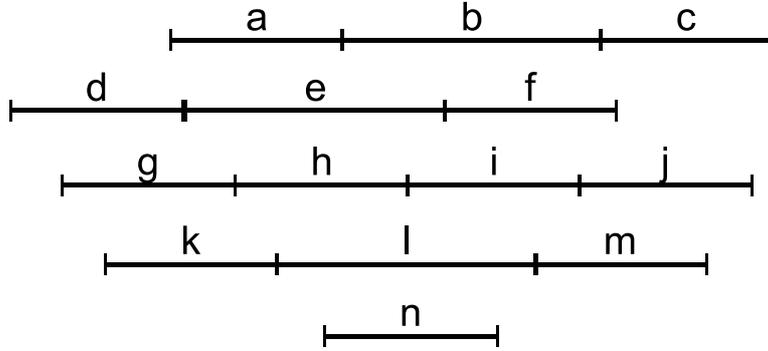


Figura 4.1: Exemplo de ordem  $P$  com  $\theta(P) = (1, 2)$ .

**Teorema 4.5** (Fishburn [26]). *Se  $P$  é a ordem correspondente ao modelo de intervalo apresentado na Figura 4.1, então  $\theta(P) = (1, 2)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{I_x \mid x \in X\}$  o modelo de dois comprimentos de  $P$  com o menor tamanho igual a 1 e seja  $\alpha \in \theta(P)$  o maior tamanho. Devido à existência das subordens induzidas pelos conjuntos  $\{d, e, f, h\}$ ,  $\{a, b, c, i\}$ , e  $\{k, l, m, n\}$ , segue que  $|I_h| = |I_i| = 1$  e  $|I_l| = \alpha$  (na Figura 4.1, note que os extremos direito de intervalo coincidem com os extremos esquerdo dos intervalos que sucedem e que são desenhados na mesma linha; por exemplo,  $r(I_a) = \ell(I_b)$ ,  $r(I_b) = \ell(I_c)$ ,  $r(I_g) = \ell(I_h)$ ,

e assim por diante). Claramente,  $\alpha < 2$ . Além disso, é fácil verificar que o modelo de intervalo da Figura 4.1 pode ser ajustado de modo que seja mostrado que todo  $1 < \alpha < 2$  é admissível, através da mudança do tamanho dos intervalos de maior tamanho  $b, e, l$  (na Figura 4.1,  $\alpha = 1.5$ ).  $\square$

Trotter [52] propôs a conjectura de que  $\theta(P)$  consistiria de um intervalo aberto, bastando-se determinar portanto os limites inferior e superior deste intervalo. Contudo, a intuição também estava incorreta. Fishburn apresentou ordens  $P \in \mathcal{P}_2$  tais que  $\theta(P) = (2 - 1/k, 2) \cup (k, \infty)$  para todo  $k \geq 2$ , mostrando que, de maneira surpreendente,  $\theta(P)$  poderia ser um conjunto descontínuo. Indo além, provou que para todo  $k \geq 2$ , existe  $P \in \mathcal{P}_2$  tal que  $\theta(P)$  é a união de  $k$  intervalos abertos disjuntos.

Em relação à conjectura proposta por Graham, de fato todos os grafos possuindo contagem de intervalos igual a dois a satisfazem. Adicionalmente, Leibowitz, Assmann e Peck [40] mostraram que se  $G$  é um grafo tal que  $IC(G \setminus x) = 1$  para algum vértice  $x$  de  $G$ , então  $IC(G) \leq 2$ .

## 4.4 Contagem de intervalos com valor arbitrário

Assim como a complexidade de decidir a existência de um modelo de intervalo usando apenas dois comprimentos de intervalo, atualmente não é conhecido se decidir se a contagem de intervalos de um grafo é  $k$ , para qualquer inteiro  $k > 1$ , é um problema NP-completo.

Como ter contagem de intervalos igual a um possui uma caracterização simples em termos de subgrafos induzidos proibidos, uma abordagem natural é a investigação de caracterizações de grafos (resp. ordens) com contagem de intervalos de valores arbitrários também por subgrafos (resp. subordens) induzidos proibidos. Neste sentido, Fishburn [26] mostrou que a lista de subordens proibidas para caracterizar as ordens que possuem contagem de intervalos  $k \geq 2$  é infinita. O resultado análogo também se aplica a grafos.

**Teorema 4.6** (Fishburn [26]). *Se  $\mathcal{S}$  é o conjunto de ordens tais que, dada uma ordem de intervalo  $P$  e  $k \geq 2$ ,  $IC(P) \leq k$  se e somente se  $P$  não possui uma subordem induzida isomorfa a alguma daquelas em  $\mathcal{S}$ , então  $\mathcal{S}$  tem cardinalidade infinita.*

*Demonstração.* Construíremos ordens de intervalo  $P = (X, \prec)$  de cardinalidades finitas arbitrárias com  $IC(P) > 2$  tais que toda subordem induzida própria  $P'$  possui  $IC(P') = 2$ , implicando o resultado para  $k = 2$ . Então, o resultado será estendido para o caso em que  $k > 2$ .

Seja  $P = Q_r$  a ordem definida na Figura 4.2, para todo  $r \geq 3$ . Se  $IC(Q_r) = 2$ , então  $a_1, \dots, a_{r+1}, b_1, \dots, b_r$  devem ter o menor tamanho. Mas então  $x$  e  $y$  não

poderiam ter o mesmo tamanho dado que, representando o menor tamanho por  $\beta$ , o extremo esquerdo de  $y$  está dentro de  $r\beta$  unidades do extremo esquerdo de  $x$ , enquanto o extremo direito de  $y$  está a mais de  $r\beta$  unidades do extremo direito de  $x$ . Portanto,  $IC(Q_r) > 2$ .

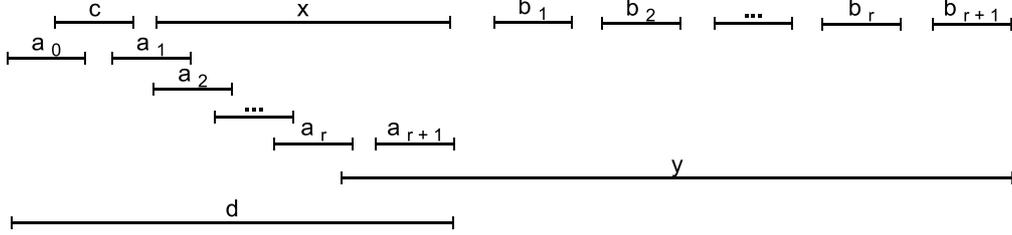


Figura 4.2: Definição da ordem  $Q_r$ , para todo  $r \geq 3$ .

Para provar que toda subordem induzida própria  $Q'$  de  $Q_r$  possui  $IC(Q') = 2$ , é suficiente considerar somente subordens induzidas obtidas pela remoção de um único elemento de  $X$ , como segue:

1.  $Q' = Q_r \setminus x$ : Claramente existe um modelo de intervalo com  $d$  e  $y$  com o maior tamanho e os demais intervalos com o menor.
2.  $Q' = Q_r \setminus y$ :  $d$  e  $x$  tendo o maior tamanho e os demais intervalos com o menor.
3.  $Q' = Q_r \setminus d$ : Todos exceto  $a_1$ ,  $x$ , e  $y$  com o menor tamanho; o maior tamanho para  $a_1$  permite  $x$  e  $y$  terem o mesmo maior tamanho.
4.  $Q' = Q_r \setminus c$ : Todos exceto  $d$ ,  $x$ , e  $y$  com o menor tamanho; comece  $a_1$  à direita do extremo esquerdo de  $x$  de modo que  $x$  e  $y$  possam ter o mesmo maior tamanho.
5.  $Q' = Q_r \setminus a_0$ : Todos exceto  $a_1$ ,  $d$ ,  $x$ , e  $y$  com o menor tamanho.
6.  $Q' = Q_r \setminus a_i$ , para algum  $1 \leq i \leq r$ : Isto deixa um buraco no caminho  $a_1, \dots, a_r$  e, conseqüentemente, há um ponto de  $x$  que pertence somente a  $x$  e  $d$ . Portanto, claramente existe um modelo de intervalo no qual todos exceto  $d$ ,  $x$  e  $y$  possuem o tamanho menor.
7.  $Q' = Q_r \setminus a_{r+1}$ : Todos exceto  $a_r$ ,  $d$ ,  $x$ , e  $y$  com o menor tamanho. Um modelo possível é o seguinte:  $I_c = [-1, 0]$ ,  $I_{a_0} = [-1 - \lambda, -\lambda]$ ,  $I_{a_i} = [i - 1, i]$  para cada  $1 \leq i \leq r - 1$ ,  $I_{b_i} = [r - 2 + i + N + i\lambda, r - 1 + i + N + i\lambda]$  para cada  $1 \leq i \leq r + 1$ ,  $I_x = [\lambda, N + \lambda]$ ,  $I_y = [N - \lambda, 2N - \lambda]$ ,  $I_d = [-\lambda, N - \lambda]$ ,  $I_{a_r} = [r - 1, r - 1 + N]$ . Tal modelo claramente satisfaz quando  $\lambda > 0$  é pequeno e  $N$  é grande.

8.  $Q' = Q_r \setminus b_i$ , para algum  $1 \leq i \leq r$ : Por conveniência, renumere os elementos  $\{b_1, \dots, b_{r+1}\} \setminus \{b_i\}$  como  $b_1, \dots, b_r$  seguindo a ordem original deles. Use o modelo do caso anterior para  $x, c, a_0, \dots, e a_{r-1}$ , conjuntamente com  $I_{a_i} = [i-1, i]$  para cada  $r \leq i \leq r+1$ ,  $I_{b_i} = [N-1+i+(i+1)\lambda, N+i+(i+1)\lambda]$  para cada  $1 \leq i \leq r$ ,  $I_y = [r, r+N]$ ,  $I_d = [r+1-N, r+1]$ . Novamente, este modelo satisfaz quando  $\lambda > 0$  é pequeno e  $N$  é grande. Além disso, para  $y$  fazer interseção com  $b_r$ , precisamos que  $r+N \geq N-1+r+(r+1)\lambda$ , ou  $\lambda \leq 1/(r+1)$ .

Casos 1 até 8 endereçam todos os elementos em  $X$ . Logo, de fato para toda subordem induzida própria  $Q'$  de  $Q_r$ , temos que  $IC(Q') \leq 2$ .

Para provar o resultado para  $k \geq 3$ , assumamos com o propósito de contradição que para algum  $k \geq 3$  existe um conjunto finito  $\mathcal{S}$  de ordens de intervalo tal que, para toda ordem de intervalo  $P$ ,  $IC(P) \leq k$  se e somente se  $P$  não possuir nenhuma subordem induzida isomorfa a alguma de  $\mathcal{S}$ . O raciocínio abaixo demonstra que o mesmo seria verdade para  $k-1$  em lugar de  $k$  e, repetindo-se iteradas vezes a afirmação, o mesmo seria verdade para  $k=2$ , o que constitui uma contradição conforme a primeira parte da demonstração.

Note que  $IC(Q) > k$  para todo  $Q \in \mathcal{S}$ . Seja  $\mathcal{S}'$  o conjunto que consiste de todas as subordens induzidas  $Q'$  de  $Q \in \mathcal{S}$  tais que  $IC(Q') \geq k$ . Claramente,  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}'$  é finito. Provemos que  $\mathcal{S}'$  é o conjunto finito para  $k-1$  assim como  $\mathcal{S}$  é para  $k$ .

Seja  $R = (X_R, \prec_R)$  uma ordem tal que  $IC(R) \geq k$ . Se  $IC(R) > k$ , então uma subordem induzida própria de  $R$  está em  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ . Assuma portanto  $IC(R) = k$  e seja  $R'$  a ordem de intervalo obtida de  $R$  pela adição do elemento  $a$  precedendo cada elemento em  $X_R$ , do elemento  $b$  sucedendo cada elemento em  $X_R$ , e o elemento  $c$  incomparável a ambos  $a$  e  $b$  e incomparável a cada elemento em  $X_R$ . Claramente,  $IC(R') = k+1$  e portanto existe uma subordem induzida própria  $R''$  de  $R'$  tal que  $R'' \in \mathcal{S}$ . Note que  $R'' \setminus \{a, b, c\}$  é uma subordem induzida de  $R$ . Além disso,  $R''$  deve conter  $c$ , ou  $R''$  poderia ser representado por  $k$  comprimentos, o que é uma contradição. Adicionalmente,  $IC(R'' \setminus \{c\}) = IC(R'' \setminus \{a, b, c\}) \leq IC(R) = k$ , e  $IC(R'' \setminus \{a, b, c\})$  não pode ser menor que  $k$  ou, caso contrário,  $IC(R'')$  não seria  $k+1$ . Como  $IC(R'' \setminus \{a, b, c\}) = k$ , então  $R'' \setminus \{a, b, c\}$  está em  $\mathcal{S}'$ . A afirmação segue como conseqüência.  $\square$

Em contraste com as seções anteriores, a conjectura proposta por Graham não se verifica para os grafos com valores arbitrários de contagem de intervalos. Leibowitz, Assmann, e Peck [40] apresentaram exemplos de grafos com  $IC(G) > 2$  para os quais  $IC(G) = IC(G \setminus x) + 2$  dado um vértice particular  $x$  de  $G$ . Este resultado refuta a conjectura, mas abre espaço para uma versão generalizada da mesma, que colocamos aqui: existe algum inteiro  $k > 1$  para o qual a contagem de intervalos

de um grafo decresce no máximo  $k$  quando exatamente um vértice é removido? Trotter [52] conjectura que a remoção de um vértice pode diminuir a contagem de intervalos de um valor arbitrário.

Fishburn também considera problemas extremais sobre a contagem de intervalos de uma ordem, seu número de elementos e o número máximo de suas anti-cadeias. Sejam as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \min\{|X| \mid P = (X, \prec) \text{ é uma ordem e } IC(P) \geq k\}; \text{ e} \\ \nu(k, q) &= \min\{|X| \mid P = (X, \prec) \text{ é uma ordem, } q(P) = q, IC(P) \geq k\}\end{aligned}$$

Obviamente,  $\sigma(k)$  é igual ao mínimo de  $\nu(k, q)$  variando  $q$  sobre seu domínio. Em particular, Fishburn mostrou que  $\sigma(k) = \min\{\nu(k, q) \mid q \geq 2k - 1\}$ . A restrição  $q \geq 2k - 1$  segue do fato de que a função  $\nu(k, q)$  é indefinida para cada  $k > \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ , isto é,  $IC(P) < k$  para todo  $k > \lfloor (q+1)/2 \rfloor$  e ordem  $P$  tal que  $q(P) = q$ . Além disso, ele provou que  $\nu(k, q) \leq k + q - 1$  vale em geral e calculou o valor exato da função  $\nu(k, q)$  quando  $k$  e  $q$  estão restritos a alguns valores específicos. Na Seção 4.6, mostramos que para todo grafo  $G$ , é verdade que  $\max\{IC(G) \mid q(G) = q\} = \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ , o que implica na definição do domínio da função  $\nu(k, q)$ . Fornecemos uma prova mais simples em relação aquela original contida em [26].

## 4.5 Contagem de intervalos restrita a classes

Nesta seção, apresentamos resultados com origem na investigação do problema de contagem de intervalos quando os grafos (resp. ordens) são restritos a certas subclasses de grafos (resp. ordens) de intervalo.

Um grafo é uma *árvore* se é conexo e acíclico. Um grafo é um *grafo de limiar* (*threshold*) se seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $K \cup I$  tal que  $K$  é uma clique,  $I$  é um conjunto independente e existe uma ordenação  $v_1, \dots, v_{|I|}$  dos vértices de  $I$  tal que  $N(v_i) \subseteq N(v_{i+1})$  para todo  $1 \leq i < |I|$  (ou, equivalentemente, existe uma ordenação  $u_1, \dots, u_{|K|}$  dos vértices de  $K$  tal que  $I \cap N(u_i) \subseteq I \cap N(u_{i+1})$  para todo  $1 \leq i < |K|$ ). Grafos de limiar foram primeiramente introduzidos por Chvátal e Hammer em 1977 (cf. [31]). Um grafo  $G$  é *quase livre de  $K_{1,3}$*  se existe  $v \in V(G)$  tal que  $G \setminus v$  é livre de  $K_{1,3}$ . Um grafo  $G$  é um *grafo estrelado de limiar* se pode ser obtido de um grafo de limiar substituindo-se cada vértice de seu conjunto independente por uma clique correspondente.

A Figura 4.3 apresenta o diagrama de inclusão entre estas classes de grafos. Neste diagrama, uma classe  $\mathcal{A}$  é uma generalização de uma classe  $\mathcal{B}$  precisamente quando existe um caminho de cima para baixo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathcal{B}$ . Cada classe da figura

é rotulada por um grafo pertencendo a esta classe que é um exemplo separador, isto é, que mostra que a classe em questão é distinta (ou propriamente contida, ou propriamente contendo, ou não possuindo uma relação de generalização) de cada outra.

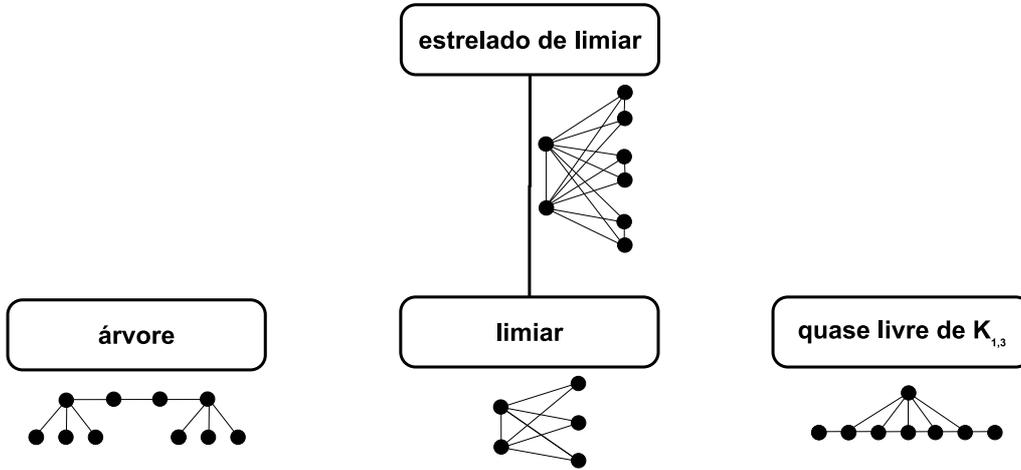


Figura 4.3: Diagrama de inclusão entre as classes.

Leibowitz [39] provou que a contagem de intervalos de árvores, grafos de limiar e grafos quase livres de  $K_{1,3}$  é no máximo 2. Cerioli e Szwarcfiter [10] observaram que os grafos estrelados de limiar também possuem contagem de intervalos no máximo 2. Até onde sabemos, não há outras classes de grafos e ordens para as quais é conhecido como computar a respectiva contagem de intervalos eficientemente.

## 4.6 Relação com o número de cliques

Naturalmente,  $IC(G) \leq |V(G)|$  para todo grafo  $G$ , que consiste em um limite superior trivial para a contagem de intervalos de um grafo. É possível derivar um limite superior melhor com a ajuda da seguinte observação. Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo do grafo  $G$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(G)$ . Lendo-se as cliques de  $G$  da esquerda para direita em  $\mathcal{R}$ , note que existe um intervalo  $I_1$  pertencente exclusivamente à primeira clique, ou caso contrário a primeira clique seria um subconjunto da segunda. Por uma argumentação similar, existe um intervalo  $I_q$  pertencente exclusivamente à última clique. Como não há razão para que  $I_1$  e  $I_q$  tenham tamanhos de intervalo distintos, temos que  $IC(G) \leq |V(G)| - 1$  para qualquer grafo  $G$ .

Nesta seção, endereçaremos um problema extremal em relação à contagem de intervalos de grafos possuindo um número fixo de cliques. Para qualquer  $q \geq 1$ , seja  $f(q)$  a função que faz corresponder  $q$  com a maior contagem de intervalos possível para um grafo de  $q$  cliques, isto é,  $f(q) = \max\{IC(G) \mid q(G) = q\}$ .

**Teorema 4.7.**  $f(q) = \lfloor (q + 1)/2 \rfloor$ , para todo  $q \geq 1$ .

*Demonstração.* O resultado é direto quando  $q \leq 2$ , dado que desta forma os grafos são livres de  $K_{1,3}$ . Portanto, assuma  $q > 2$ . Para cada  $i \geq 1$ , seja  $G_i$  o grafo definido esquematicamente na Figura 4.4. As linhas duplas ligando  $u_i$  a  $H_{i-1}$  significam que o vértice  $u_i$  é adjacente a todos os vértices do subgrafo induzido  $H_{i-1}$ .

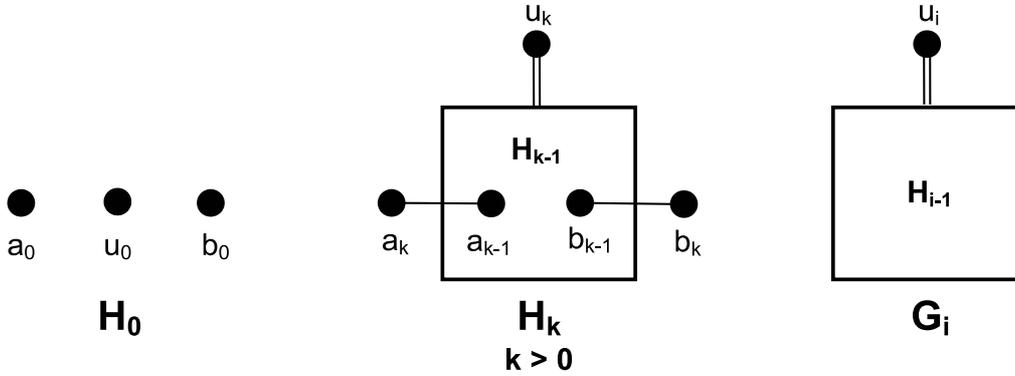


Figura 4.4: Grafo auxiliar  $G_i$ , para todo  $i \geq 1$ .

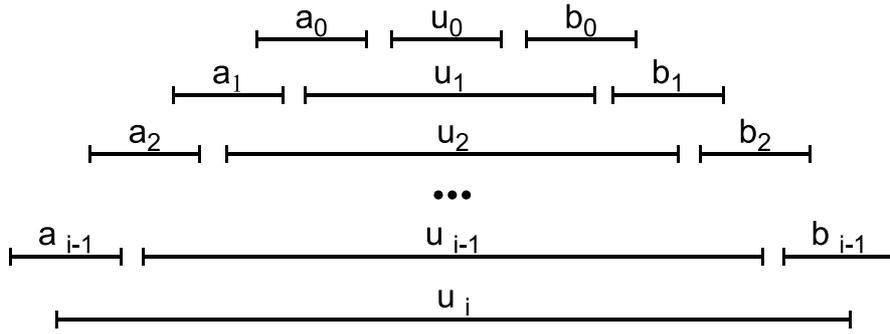


Figura 4.5: Um dos modelos de intervalo do grafo  $G_i$ ,  $i \geq 1$ .

Para cada  $i \geq 1$ , o número de cliques de  $G_i$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 q(G_i) &= q(H_{i-1}) = q(H_{i-2}) + 2 = q(H_{i-3}) + 2 \times 2 = \\
 &= q(H_{i-k}) + 2(k-1) = q(H_0) + 2(i-1) = 3 + 2i - 2 = \\
 &= 2i + 1.
 \end{aligned}$$

Além disso, para qualquer modelo de intervalo  $\{I_v \mid v \in V(G_i)\}$  de  $G_i$ ,  $|I_{u_k}| > |I_{u_{k-1}}|$  para cada  $1 \leq k \leq i$ . Logo,  $IC(G_i) \geq i + 1$ . De fato,  $IC(G_i) = i + 1$  como pode ser verificado no modelo de intervalo de  $G_i$  exibido na Figura 4.5.

Seja  $G$  ou o grafo  $G_{(q-1)/2}$  se  $q$  é ímpar ou o grafo  $G_{(q-2)/2}$  adicionado de um vértice isolado caso contrário. Portanto,  $f(q) \geq IC(G) = \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ .

Por outro lado, seja  $G$  um grafo com  $q$  cliques. Mostramos um limite superior para  $f(q)$  descrevendo um algoritmo que constrói um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $G$

tal que  $IC(\mathcal{R}) \leq \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ . Como  $G$  é um grafo geral com  $q$  cliques, temos que  $f(q) \leq \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ .

Sejam  $C_1, \dots, C_q$  as cliques lidas da esquerda para direita de algum modelo de intervalo de  $G$  e seja  $m = \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ . Inicialmente, assumamos que todos os intervalos nas cliques  $C_m$  ou  $C_{m+1}$  são de tamanho unitário. Então, iterativamente em cada passo  $i = 1, \dots, m-1$ , movamos cada extremo esquerdo dos intervalos em  $C_{m-i} \cap C_{m-i+1}$  para a esquerda e movamos cada extremo direito dos intervalos em  $C_{m+i} \cap C_{m+i+1}$  para a direita de tal modo que as seguintes duas condições sejam satisfeitas: (i) os intervalos modificados têm o maior tamanho e (ii) existem dois pontos  $p_1 < p_2$  tais que o conjunto de intervalos que contém  $p_1$  é  $C_{m-i} \cap C_{m-i+1}$  e aquele que contém  $p_2$  é  $C_{m+i} \cap C_{m+i+1}$ . Para cada  $v \in C_{m-i} \setminus C_{m-i+1}$ , adicionamos  $I_v$  tal que  $|I_v| = 1$  e  $r(I_v) = p_1$ . Simetricamente, para cada  $v \in C_{m+i+1} \setminus C_{m+i}$ , adicionamos  $I_v$  tal que  $|I_v| = 1$  e  $\ell(I_v) = p_2$ . Em cada iteração claramente no máximo um novo comprimento de intervalo é criado. Portanto,  $IC(G) \leq IC(\mathcal{R}) \leq (m-1) + 1 = \lfloor (q+1)/2 \rfloor$ .  $\square$

Como consequência, se um grafo  $G$  tem  $q$  cliques, então  $IC(G) \leq f(q) = \lfloor (q+1)/2 \rfloor \leq \lfloor (|V(G)| + 1)/2 \rfloor$ .

## 4.7 Problemas relacionados

Claramente, é possível assumir que um grafo de intervalo ou uma ordem de intervalo possui um modelo de intervalo no qual todos os extremos de intervalo são inteiros distintos. Em [32] (cf. Trotter [52]), Greenough discute o problema de computar a “largura” mínima de tais modelos, isto é, o problema de determinar o menor número inteiro positivo  $r$  para o qual existe um modelo de intervalo de uma dada ordem usando somente extremos de intervalo inteiros e no intervalo  $[0, r]$ . Relacionado a este problema, consideraremos o problema da contagem de intervalos sob a restrição de que todos os extremos de intervalo são distintos e inteiros. Particularmente, nossa questão será a de determinar como a contagem de intervalos de um grafo (ordem) é afetada quando se assume que os modelos de intervalo possuem extremos de intervalo distintos e inteiros. Mostraremos no próximo capítulo que a contagem de intervalos de um grafo (ordem) é um invariante sob tal premissa. Motivado por este resultado e a discussão de Greenough, sugerimos o problema de determinar o menor número inteiro positivo  $r$  para o qual existe um modelo de intervalo de uma ordem que realiza sua contagem de intervalos usando somente extremos de intervalo distintos e inteiros dentro do intervalo  $[0, r]$ .

Existem também resultados que se preocupam com os tamanhos de intervalo que não estão diretamente relacionados com a questão de minimizar o número deles. Fishburn [26] considerou o problema de decidir se existe um modelo de intervalo

de um dado grafo de intervalo tal que cada comprimento de intervalo esteja entre  $p$  e  $q$  para um dado par de número reais  $1 \leq p \leq q$ . Fishburn descreveu uma caracterização baseada em subgrafos proibidos dos grafos para os quais tal questão tinha uma resposta afirmativa. Ele demonstrou que tal lista de subgrafos proibidos é finita se e somente se  $p/q$  é um número racional. Neste caso, a caracterização leva a um algoritmo de reconhecimento de tempo exponencial  $n^{O(pq)}$ . Isaak [35] investigou esta questão restrita ao caso no qual todos os extremos de intervalo do modelo são inteiros e forneceu um algoritmo de reconhecimento de tempo polinomial  $O(\min\{n^3, n^{2.5} \log(n(p+q))\})$ .

Pe'er e Shamir [46] estudaram uma questão mais geral. Seja  $G$  um grafo de intervalo e  $\mathcal{C}$  um conjunto de restrições sobre distâncias entre pares de extremos de intervalo impostas a modelos de intervalo de  $G$ . Cada restrição é da forma  $x - y \leq C_{xy}$ , onde  $x$  e  $y$  são extremos de intervalo e  $C_{xy}$  é um número real. As desigualdades  $\ell(I_x) - r(I_y) \leq 4$  e  $r(I_z) - r(I_w) \leq -\sqrt{2}$  são exemplos de tais restrições envolvendo os vértices  $x, y, z, w$ . O problema consiste em decidir se existe um modelo de intervalo de  $G$  que satisfaz todas as restrições contidas em  $\mathcal{C}$ . Um segundo problema é um caso particular do primeiro pelo requerimento de que cada restrição especificada envolva somente extremos de intervalos de um mesmo vértice. Sem perda de generalidade, neste caso é assumido que todas as restrições são da forma ou  $\ell(I_v) - r(I_v) \leq -L_v$ , ou  $r(I_v) - \ell(I_v) \leq U_v$ , onde  $v \in V(G)$  e  $L_v, U_v$  são números reais não-negativos. Equivalentemente, tais restrições são escritas como  $L_v \leq r(I_v) - \ell(I_v) \leq U_v$ . Finalmente, um terceiro problema é considerado, caso particular do anterior quando  $L_v = U_v$  em cada restrição, isto é. cada restrição é escrita na forma  $r(I_v) - \ell(I_v) = L_v$ , onde  $v \in V(G)$  e  $L_v$  é um número real não-negativo. Pe'er e Shamir mostraram que o último problema é NP-completo. Como ele é definido por restrições dos anteriores, portanto os dois primeiros também são problemas NP-completo. Por outro lado, ao se restringir o estudo destes problemas aos grafos que admitem modelos com uma única ordenação de cliques (a menos de inversão), eles fornecem um algoritmo polinomial para o primeiro problema e, por conseqüência, também para os outros dois. A complexidade da computação neste caso é de  $O(\min\{n^3, n^{2.5} \log(nC)\})$ , onde  $C$  é um número produzido por um processo de redução existente na prova.

# Capítulo 5

## Avanços no Problema da Contagem de Intervalos

Como vimos no capítulo anterior, em contraste com o fato do problema de decidir se  $IC(G) = 1$  é equivalente àquele de reconhecer grafos de intervalo unitário, problema bem conhecido com diversas abordagens de reconhecimento eficientes, muito pouco se sabe sobre decidir se  $IC(G) = k$  para qualquer  $k \geq 2$  fixo. Fornecemos algoritmos eficientes para a computação da contagem de intervalos de generalizações de grafos de limiar.

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior, apresentamos um resumo dos resultados existentes na literatura sobre a contagem de intervalos. Em si, esta compilação já possui o valor de agregar em um só trabalho os diversos resultados. Além disso, introduzimos uma nova prova que conduz à fórmula que relaciona o número de cliques de um grafo de intervalo à contagem de intervalos máxima possível para tal grafo. Neste capítulo, contudo, tratamos de apresentar respostas novas relacionadas ao problema.

Na Seção 5.2, mostramos que podemos assumir, sem afetar a contagem de intervalos de uma ordem ou grafo de intervalo, que os modelos possuem os extremos distintos e inteiros. Na Seção 5.3, evidenciamos a natureza combinatória do problema, que à primeira vista não é tão evidente dado que os tamanhos de intervalo assumem valores reais. Na Seção 5.4, introduzimos as classes de grafos e ordens que serão trabalhadas a frente, relacionando-as com aquelas apresentadas no capítulo anterior (para as quais a contagem de intervalos é conhecida). Nas Seções 5.5, 5.6 e 5.7 apresentamos algoritmos eficientes para a computação da contagem de intervalos de respectivamente ordens livres de touro estendido, grafos TP e grafos livres de touro estendido.

## 5.2 Modelos de intervalo com extremos inteiros e distintos

Nesta seção, mostramos que pode ser assumido que os modelos de intervalo possuem extremos inteiros distintos sem afetar a contagem de intervalos da ordem ou grafo correspondente. Tal premissa é, em geral, bem natural a problemas relacionados a grafos e ordens de intervalo, mas não é direta para o problema da contagem de intervalos. Com efeito, movendo-se os extremos de intervalo, na tentativa de transformar um dado modelo de intervalo com extremos não-inteiros ou não-distintos em um outro com extremos inteiros distintos, potencialmente modifica-se o número de tamanhos de intervalo distintos se nenhum cuidado é tomado neste sentido. Trataremos, portanto, de descrever quais são tais cuidados.

Seja  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo e  $p > 0$  um número real. Defina  $M_{\mathcal{R}}(p)$  como ou o maior extremo de intervalo em  $\mathcal{R}$  menor que  $p$  se existente, ou 0 caso contrário. Formalmente:

$$M_{\mathcal{R}}(p) = \max\{p' \in \mathfrak{R}, p' < p \mid p' = \ell(I_x) \text{ ou } p' = r(I_x) \text{ para algum } x \in X\}$$

onde definimos  $\min\{\emptyset\} = \max\{\emptyset\} = 0$ .

Além disso, a constante *pequena suficiente* em  $\mathcal{R}$ , denotada por  $\epsilon_{\mathcal{R}}$ , é a menor diferença entre dois extremos de intervalo consecutivos (considerando o ponto 0 também como extremo). Formalmente,  $\epsilon_{\mathcal{R}} = \min\{\ell(I_x) - M_{\mathcal{R}}(\ell(I_x)), r(I_x) - M_{\mathcal{R}}(r(I_x)) \mid x \in X\}$ .

**Teorema 5.1.** *Se  $P$  é uma ordem de intervalo, então existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  no qual todos os extremos de intervalo são distintos e inteiros.*

*Demonstração.* A prova é apresentada em quatro passos intermediários, cada um introduzindo e demonstrando uma propriedade que pode ser assumida sem perda de generalidade sobre os modelos de intervalo que realizam a contagem de intervalos de  $P$ .

**PROPRIEDADE 1.** Existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  no qual todos os extremos de intervalo são estritamente maiores que zero.

Seja  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo de  $P = (X, \prec)$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ . Seja  $\mathcal{I} \subseteq X$  tal que  $x \in \mathcal{I} \iff |I_x| = 0$ . Seja  $\mathcal{R}' = \{I'_x \mid x \in X\}$  definido como segue:

$$\begin{aligned} \ell(I'_x) &= \ell(I_x) \text{ e } r(I'_x) = r(I_x) & , \text{ se } x \notin \mathcal{I} \\ \ell(I'_x) &= \ell(I_x) \text{ e } r(I'_x) = r(I_x) + \epsilon_{\mathcal{R}}/2 & , \text{ se } x \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

Seja  $x \in \mathcal{I}$ . Como  $r(I'_x) = r(I_x) + \epsilon_{\mathcal{R}}/2 < p$  para cada extremo de intervalo  $p > r(I_x)$ , os intervalos não mudam suas interseções em  $\mathcal{R}'$ . Portanto,  $\mathcal{R}'$  é um modelo de intervalo de  $P$  no qual todos os comprimentos de intervalo são maiores que zero e  $IC(\mathcal{R}') = IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ .

PROPRIEDADE 2. Existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  no qual todos os extremos de intervalo são distintos.

Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  no qual todos os comprimentos de intervalo são maiores do que zero. Seja  $c(\mathcal{R})$  o número de pares de extremos de  $\mathcal{R}$  que são mutuamente coincidentes. Suponha que  $c(\mathcal{R}) > 0$  e seja  $I_r \in \mathcal{R}$  um intervalo tal que um de seus extremos  $p_r$  não é distinto dos demais e ou (i)  $p_r = \ell(I_r)$ ; ou (ii)  $p_r = r(I_r)$  e todos os extremos esquerdos de intervalo são distintos. Seja  $\mathcal{I} \subseteq X$  (re)definido como segue:

$$y \in \mathcal{I} \iff y = r \text{ ou (existe } z \text{ tal que } z \in \mathcal{I} \text{ e } r(I_z) = \ell(I_y))$$

Note que se  $y \in \mathcal{I}$ ,  $y \neq r$ , então  $r(I_r) \leq \ell(I_y)$ . Seja  $\mathcal{R}' = \{I'_x \mid x \in X\}$  (re)definido como segue:

$$\begin{aligned} \ell(I'_x) &= \ell(I_x) \text{ e } r(I'_x) = r(I_x) & , \text{ se } x \notin \mathcal{I} \\ \ell(I'_x) &= \ell(I_x) - \epsilon_{\mathcal{R}}/2 \text{ e } r(I'_x) = r(I_x) - \epsilon_{\mathcal{R}}/2 & , \text{ se } x \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

Seja  $x \in \mathcal{I}$ . Seja  $p_x$  um extremo de intervalo de  $I_x$  e  $p'_x$  seu extremo correspondente de  $I'_x$  (isto é,  $p_x = \ell(I_x) \iff p'_x = \ell(I'_x)$  ou, equivalentemente,  $p_x = r(I_x) \iff p'_x = r(I'_x)$ ). Então,  $p'_x = p_x - \epsilon_{\mathcal{R}}/2 > p_x - \epsilon_{\mathcal{R}} \geq p_x - (p_x - M_{\mathcal{R}}(p_x)) = M_{\mathcal{R}}(p_x)$ . Portanto, os intervalos não alteram suas interseções e  $\mathcal{R}'$  é um modelo de intervalo de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}') = IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ . Além disso, o número de pares de extremos de  $\mathcal{R}$  que não são mutuamente coincidentes não aumenta. Seja  $p_y$  um extremo de intervalo de  $I_y$  tal que  $y \neq r$  e  $p_y = p_r$ . Se  $y \in \mathcal{I}$ , então (i) se  $p_r = \ell(I_r)$ , então  $p_r = \ell(I_r) < r(I_r) \leq \ell(I_y) \leq p_y$ , o que contradiz  $p_y = p_r$ ; (ii) se  $p_r = r(I_r)$ , então ou  $p_y = r(I_y)$  e por isso  $p_r = r(I_r) = r(I_y) > \ell(I_y)$  contradizendo  $r(I_r) \leq \ell(I_y)$ , ou  $p_y = \ell(I_y)$  e portanto  $r(I_r) = \ell(I_y)$ , contradizendo a escolha de  $I_r$ . Logo,  $y \notin \mathcal{I}$ . Como  $p'_r = p_r - \epsilon_{\mathcal{R}}/2 < p_r = p_y = p'_y$ , onde  $p'_r$  e  $p'_y$  são respectivamente os extremos de intervalo de  $\mathcal{R}'$  que correspondem a  $p_r$  e  $p_y$  em  $\mathcal{R}$ , portanto  $c(\mathcal{R}') < c(\mathcal{R})$ . Renomeie  $\mathcal{R}'$  como  $\mathcal{R}$  e repita tal procedimento até que  $c(\mathcal{R}) = 0$ . Como consequência, o modelo  $\mathcal{R}$  resultante é tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  e todos os extremos são distintos.

PROPRIEDADE 3. Existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ , todos os extremos de intervalo são distintos e todos os tamanhos de intervalo são inteiros.

Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de intervalo de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  no qual todos os extremos sejam distintos. Seja  $L(\mathcal{R})$  o número de tamanhos de intervalo não-inteiros em  $\mathcal{R}$ . Suponha que  $L(\mathcal{R}) > 0$ . Seja  $r \in X$  tal que  $r(I_r) - \ell(I_r)$  não é um número inteiro. Seja  $\mathcal{I} \subseteq X$  (re)definido como segue:

$$\mathcal{I} = \{x \in X \mid r(I_x) - \ell(I_x) = r(I_r) - \ell(I_r)\}$$

Seja  $\epsilon'$  um número real tal que  $0 \leq \epsilon' < \epsilon_{\mathcal{R}}$  e  $r(I_r) - \ell(I_r) - \epsilon'$  é um número racional  $p/q$ , para algum par de inteiros  $p$  e  $q$ . Note que tal  $\epsilon'$  existe pelo fato de existir um número racional  $(r(I_r) - \ell(I_r) - \epsilon')$  menor que um número real  $(r(I_r) - \ell(I_r))$  arbitrariamente perto deste. Seja  $\mathcal{R}' = \{I'_x \mid x \in X\}$  (re)definido como segue:

$$\begin{aligned} \ell(I'_x) &= q\ell(I_x) \text{ e } r(I'_x) = qr(I_x) && , \text{ se } x \notin \mathcal{I} \\ \ell(I'_x) &= q\ell(I_x) \text{ e } r(I'_x) = q(r(I_x) - \epsilon') && , \text{ se } x \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

Se  $x \in \mathcal{I}$ , então:

$$r(I'_x) = q(r(I_x) - \epsilon') > q(r(I_x) - \epsilon_{\mathcal{R}}) \geq q(r(I_x) - (r(I_x) - M_{\mathcal{R}}(r(I_x)))) = qM_{\mathcal{R}}(r(I_x))$$

Portanto, os intervalos não alteram suas interseções e  $\mathcal{R}'$  é um modelo de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}') = IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ . Além disso,  $L(\mathcal{R}') < L(\mathcal{R})$  pois:

$$r(I'_r) - \ell(I'_r) = q(r(I_r) - \epsilon') - q\ell(I_r) = q(r(I_r) - \epsilon' - \ell(I_r)) = q(p/q) = p$$

Renomeie  $\mathcal{R}'$  como  $\mathcal{R}$  e repita tal procedimento até que  $L(\mathcal{R}) = 0$ . O modelo  $\mathcal{R}$  resultante é tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ , todos os extremos são distintos e todos os tamanhos são números inteiros.

**PROPRIEDADE 4.** Existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  e todos os extremos de intervalo são distintos e inteiros.

Seja  $\mathcal{R}$  um modelo de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ , todos os extremos são distintos e todos os tamanhos de intervalo são números inteiros. Seja  $c'(\mathcal{R})$  o número de extremos esquerdos não-inteiros de  $\mathcal{R}$ . Suponha que  $c'(\mathcal{R}) > 0$ . Seja  $r \in X$  tal que  $\ell(I_r)$  não é um número inteiro.

Seja  $\epsilon'$  (redefinido como) um número real tal que  $0 \leq \epsilon' < \epsilon_{\mathcal{R}}$  e  $\ell(I_r) - \epsilon'$  é um número racional  $p/q$ , para algum par de inteiros  $p$  e  $q$ . Seja  $\mathcal{R}' = \{I'_x \mid x \in X\}$  (re)definido como segue:

$$\begin{aligned} \ell(I'_x) &= q\ell(I_x) \text{ e } r(I'_x) = qr(I_x) && , \text{ se } x \neq r \\ \ell(I'_x) &= q(\ell(I_x) - \epsilon') \text{ e } r(I'_x) = q(r(I_x) - \epsilon') && , \text{ se } x = r \end{aligned}$$

Seja  $p$  o extremo de intervalo de  $I_r$  e  $p'$  o extremo correspondente de  $I'_r$ . Portanto:

$$p' = q(p - \epsilon') > q(p - \epsilon_{\mathcal{R}}) \geq q(p - (p - M_{\mathcal{R}}(p))) = qM_{\mathcal{R}}(p)$$

Portanto, os intervalos não alteram suas interseções e  $\mathcal{R}'$  é um modelo de  $P$  tal que  $IC(\mathcal{R}') = IC(\mathcal{R}) = IC(P)$ . Além disso,  $c'(\mathcal{R}') < c'(\mathcal{R})$ , pois:

$$\ell(I'_r) = q(\ell(I_r) - \epsilon') = q(p/q) = p$$

Renomeie  $\mathcal{R}'$  como  $\mathcal{R}$  e repita tal procedimento até que  $c'(\mathcal{R}) = 0$ . O modelo  $\mathcal{R}$  resultante é tal que  $IC(\mathcal{R}) = IC(P)$  e todos os extremos são distintos e inteiros.  $\square$

Um resultado análogo também é verdadeiro para grafos.

**Corolário 5.2.** *Se  $G$  é um grafo de intervalo, então existe um modelo  $\mathcal{R}$  de  $G$  com  $IC(\mathcal{R}) = IC(G)$  no qual todos os extremos de intervalo são distintos e inteiros.*

*Demonstração.* Seja  $P$  uma ordem de intervalo que concorda com  $G$  tal que  $IC(P) = IC(G)$ . Pelo Teorema 5.1, existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $P$  (e, em particular, de  $G$ ) com  $IC(\mathcal{R}) = IC(P) = IC(G)$  no qual todos os extremos de intervalo são distintos e inteiros.  $\square$

Note que os resultados estabelecidos pelo Teorema 5.1 e Corolário 5.2 não conduzem a algoritmos (eficientes ou não) para decidir se  $IC(G) = k$  (resp.  $IC(P) = k$ ) em tempo finito e que dependa somente do tamanho da entrada, nomeadamente  $G$  (resp.  $P$ ) e  $k$ . Os resultados afirmam que tais algoritmos podem buscar sem perda de generalidade modelos com extremos distintos e inteiros, mas não há um limite máximo claro para os extremos. Desta forma, cremos que seja necessário uma pequena nota que endereça a questão de como computar a contagem de intervalos por um algoritmo “força bruta”, o que é feito na próxima seção.

### 5.3 Natureza combinatória do problema

O próximo lema é direto e é usado como base para desenhar um algoritmo de tempo exponencial que decide se  $IC(P) = k$ , dados uma ordem  $P$  e um inteiro  $k$ .

**Lema 5.3.** *Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem de intervalo e  $k \geq 1$  um inteiro. Então,  $IC(P) = k$  se e somente se  $k$  é o menor inteiro para o qual existe uma partição  $S_1 \cup \dots \cup S_k$  de  $X$  e um modelo  $\{I_x \mid x \in X\}$  de  $P$  tal que  $|I_x| = |I_y| \iff \{x, y\} \subseteq S_i$  para algum  $1 \leq i \leq k$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente da definição da contagem de intervalos.  $\square$

Note que  $P = (X, \prec)$  é uma ordem de intervalo e  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  uma partição de  $X$ . Seja  $(G_S)$  o modelo de programação linear definido abaixo, onde  $\delta > 0$  e  $\epsilon > 0$  são constantes,  $\ell_x, r_x, s_i$  são variáveis para todo  $x \in X$ ,  $1 \leq i \leq k$ , e  $F(P)$  é uma função linear qualquer que envolva tais variáveis.

$$(G_S): \min \quad F(P) \quad (5.1)$$

*s.a.*

$$r_x - \ell_x = s_i \quad , \text{ para todo } x \in S_i, 1 \leq i \leq k \quad (5.2)$$

$$s_i + \delta \leq s_{i+1} \quad , \text{ para todo } 1 \leq i < k \quad (5.3)$$

$$r_x + \epsilon \leq \ell_y \quad , \text{ para todo } x \prec y \quad (5.4)$$

$$\ell_y + \epsilon \leq r_x \quad , \text{ para todo } x \parallel y \quad (5.5)$$

$$\ell_x, r_x \geq \epsilon \quad , \text{ para todo } x \in X \quad (5.6)$$

$$s_1 \geq \epsilon \quad (5.7)$$

**Teorema 5.4.** *Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem de intervalo e  $k \geq 1$ . Então, é possível decidir se  $IC(P) = k$  por um algoritmo cujo tempo de execução é exponencial em relação ao tamanho da entrada composta de  $P$  e  $k$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 5.1, é claro que  $G_S$  é viável se e somente se existir um modelo de intervalo  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  de  $P$  tal que  $\ell_x = \ell(I_x)$ ,  $r_x = r(I_x)$  para todo  $x \in X$ , e  $|I_x| = |I_y| \iff \{x, y\} \subseteq S_i$  para algum  $1 \leq i \leq k$ . Portanto, pelo Lema 5.3,  $IC(P) = k$  se e somente se  $k$  é o menor inteiro para o qual  $G_S$  é viável para alguma partição  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$  de  $X$ .  $\square$

É direto produzir um algoritmo análogo para grafos, bastando utilizar a definição de contagem de intervalos que relaciona o problema de grafos ao problema de ordens. Esta seção é modesta nos resultados no que diz respeito à complexidade. Contudo, faz-se necessária para deixar claro o aspecto combinatório do problema, que fica obscuro dado que os extremos de intervalo variam continuamente na reta real.

## 5.4 Contagem de intervalos restrita a classes

No capítulo anterior, mostramos que a contagem de intervalos é conhecida para a classe das árvores, grafos de limiar, quase livres de  $K_{1,3}$  e grafos estrelados de limiar. Na verdade, para todos eles, a contagem de intervalos é limitada a dois. Neste seção, definiremos as classes de grafos e ordens que possuem estreita relação com os resultados a serem apresentados.

Assumimos que os grafos são *livres de gêmeos*, isto é, para cada  $uw \in E(G)$ ,  $N[u] \neq N[w]$ . De maneira análoga, assumimos que as ordens são livres de gêmeos, no sentido de que para cada  $u \parallel w$  com  $u \neq w$  numa ordem  $P$ ,  $S_P(u) \cup S_{P^d}(u) \neq S_P(w) \cup S_{P^d}(w)$ . Note que a ausência de gêmeos no contexto do problema da contagem de intervalos pode ser assumida sem perda de generalidade.

Um grafo de intervalo é *trivialmente perfeito* (TP) se ele é livre de  $P_4$  [31]. Um grafo é um *grafo de limiar generalizado* se pode ser obtido de um grafo de limiar substituindo-se cada vértice do conjunto independente por um grafo de intervalo

unitário. Claramente, os grafos generalizados de limiar propriamente contém os grafos estrelados de limiar. Um grafo  $XF_1^n$  ( $n \geq 0$ ) consiste de um caminho  $P$  de comprimento  $n$  e um vértice que é adjacente a cada vértice de  $P$  e, além disso, a ambas extremidades de  $P$ , um vértice é anexado [8]. Como exemplos,  $XF_1^0 = K_{1,3}$  e  $XF_1^1$  é um touro. Por conveniência, chamaremos o grafo  $XF_1^n$  para cada  $n \geq 1$  de touro estendido, desenhado esquematicamente na Figura 5.1. Um grafo é *livre de touro estendido* quando não possuir nenhum touro estendido como subgrafo induzido.

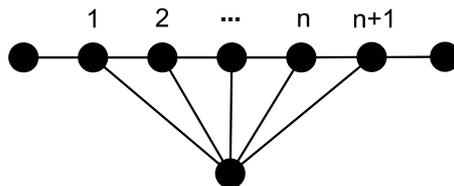


Figura 5.1: O grafo touro estendido, para  $n \geq 1$ .

A Figura 5.2 apresenta inclusão completa entre as classes. O diagrama segue as mesmas observações do capítulo anterior. Nestes exemplos, um grafo  $G$  tendo uma aresta  $uv$  onde  $v$  é representado por um vértice branco rotulado com  $G'$  representa o grafo obtido de  $G$  substituindo-se  $v$  por  $G'$ . A seguinte observação suporta a inclusão ESTRELADO DE LIMIAR  $\subset$  TP.

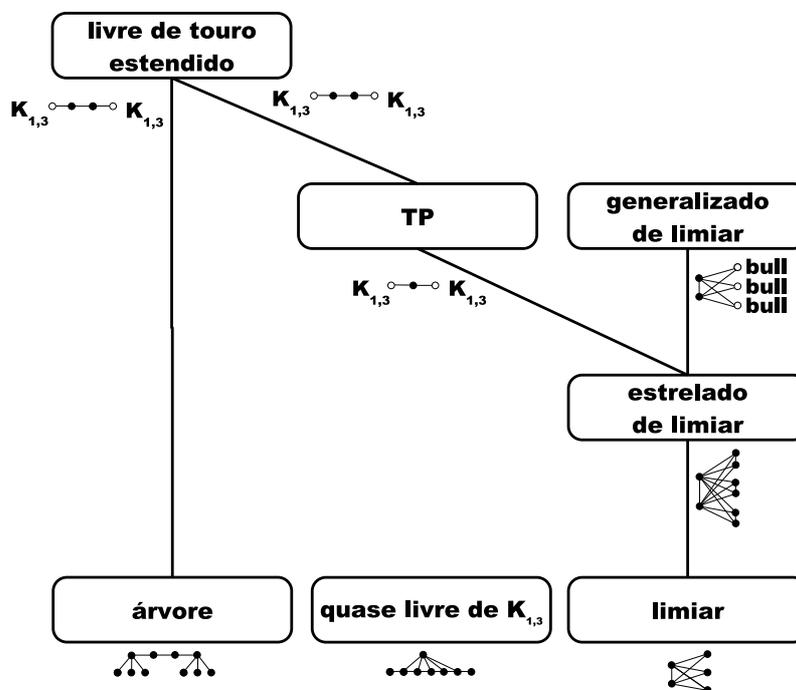


Figura 5.2: Diagrama de Inclusão.

**Observação 5.5.** *Se  $G$  é um grafo estrelado de limiar, então  $G$  é TP.*

*Demonstração.* Suponha que exista um  $P_4 = u_1, u_2, u_3, u_4$  em  $G$ . Seja  $G'$  o grafo de limiar tal que  $K \cup I$  particiona  $V(G')$  e  $G$  é obtido de  $G'$  substituindo-se cada vértice  $v_i \in I$  pela clique  $K_i$ , para cada  $1 \leq i \leq |I|$ . Se  $u_1 \in K$ , então  $u_3 \in K_i$  tal que  $u_1v_i \notin E(G')$  para algum  $1 \leq i \leq |I|$ . Como  $\{u_1u_2, u_2u_3\} \subseteq E(G)$ , então  $u_2 \in K$ . Portanto,  $u_4 \in K_i \cup K$  e, conseqüentemente,  $u_2u_4 \in E(G)$ , o que é uma contradição. Por isso, seja  $u_1 \in K_i$  para algum  $1 \leq i \leq |I|$ . Então,  $u_2 \in K$ , dado que se  $u_2 \in K_i$ , isto implicaria que  $u_1u_3 \in E(G)$ . Portanto,  $u_3 \in K$  ou, caso contrário se  $u_3 \in K_j$  para algum  $1 \leq j \leq |I|$  e  $j \neq i$ , isto implicaria que  $u_2u_4 \in E(G)$ . Logo,  $u_4 \in K_j$  para algum  $1 \leq j \leq |I|$  e  $j \neq i$ . Conseqüentemente, nem  $N(v_i) \subseteq N(v_j)$ , nem  $N(v_j) \subseteq N(v_i)$  em  $G'$ , o que é uma contradição com o fato de  $G'$  ser um grafo de limiar. Logo,  $G$  é livre de  $P_4$ .  $\square$

**Observação 5.6.** *Se  $G$  é um grafo TP, então  $G$  é livre de touro estendido.*

*Demonstração.* Conseqüência imediata do fato de  $G$  ser livre de  $P_4$ .  $\square$

O próximo teorema estende a propriedade de ter contagem de intervalos no máximo dois à classe dos grafos generalizados de limiar.

**Teorema 5.7.** *Se  $G$  é um grafo generalizado de limiar, então  $IC(G) \leq 2$ .*

*Demonstração.* Considere o seguinte processo de construir um modelo de intervalo  $\mathcal{R}$  de  $G$ . Seja  $G'$  o grafo de limiar tal que  $K \cup I$  particiona  $V(G')$  e  $G'$  é obtido de  $G$  substituindo-se cada vértice  $v_i \in I$  por um grafo de intervalo unitário  $G_i$  para cada  $1 \leq i \leq |I|$ . Sem perda de generalidade, considere  $N(v_i) \supseteq N(v_{i+1})$  para cada  $1 \leq i < |I|$ . Seja  $\mathcal{R}_i$  um modelo de intervalo de  $G_i$  tal que seus intervalos possuem tamanho unitário, para cada  $1 \leq i \leq |I|$ . Seja  $\mathcal{R}_K$  um modelo de  $K$  tal que todos os intervalos também possuem tamanho unitário. Tome  $\mathcal{R}_K, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{|I|}$  para construir  $\mathcal{R}$  colocando  $\mathcal{R}_K$  à esquerda de  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_i$  à esquerda de  $\mathcal{R}_{i+1}$  para cada  $1 \leq i < |I|$ . Então, para cada  $v \in K$ , mova  $r(I_v)$  para a direita até que todos os intervalos que devem fazer interseção com  $I_v$  o façam. Tal aumento de tamanho dos intervalos é possível dado que  $N(v_i) \supseteq N(v_{i+1})$  para cada  $1 \leq i < |I|$ . Finalmente, mova os extremos esquerdos dos intervalos em  $K$  para a esquerda de modo que tais intervalos passem a ter o mesmo tamanho. Claramente,  $IC(\mathcal{R}) \leq 2$ .  $\square$

Por outro lado, a próxima observação estabelece que os grafos TP (e, portanto, grafos livres de touro estendido) possuem valores arbitrários de contagem de intervalos.

**Observação 5.8.** *Seja  $k \geq 1$  um número inteiro. Existe um grafo TP  $G$  tal que  $IC(G) = k$ .*

*Demonstração.* Seja  $G_1$  um grafo formado por um único vértice  $u_1$ . Para cada  $k \geq 2$ , seja  $G_k$  o grafo que consiste de três cópias disjuntas de  $G_{k-1}$  acrescidas de um vértice  $u_k$  adjacente a todos os demais. Claramente,  $G_k$  é um grafo de intervalo. Além disso, note que  $G_1$  é livre de  $P_4$  e, assumindo que  $G_{k-1}$  também seja para  $k \geq 2$ , então claramente  $G_k$  também é livre de  $P_4$  por construção. Portanto,  $G_k$  é um grafo TP, para cada  $k \geq 1$ . Além disso, obviamente  $IC(G_1) = 1$ . Suponha que  $IC(G_i) = i$ , para cada  $1 \leq i < k$ . Como o intervalo correspondente a  $u_k$  em qualquer modelo de intervalo cobre completamente todos os intervalos correspondentes a uma das cópias de  $G_{k-1}$  que foram utilizadas para formar  $G_k$ , então  $IC(G_k) \geq IC(G_{k-1}) + 1$ . Por outro lado, é possível construir um modelo de  $G_k$  usando precisamente  $IC(G_{k-1}) + 1$  comprimentos distintos como segue. Para as três cópias de  $G_{k-1}$ , usa-se precisamente os mesmos  $IC(G_{k-1})$  comprimentos distintos e então usamos um comprimento adicional para o intervalo correspondente a  $u_k$ . Por isso,  $IC(G_k) \leq IC(G_{k-1}) + 1$ . Como resultado,  $IC(G_k) = IC(G_{k-1}) + 1 = (k - 1) + 1 = k$ .  $\square$

Existem também instâncias de grafos livres de touros estendidos que não são TP que igualmente possuem valores arbitrários de contagem de intervalos.

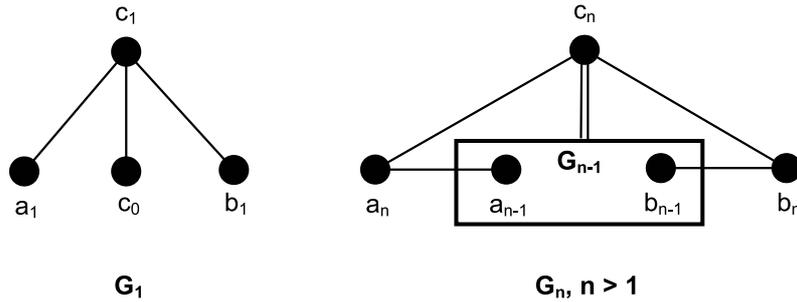


Figura 5.3: A definição de  $G_n$ , para todo  $n \geq 1$ .

**Lema 5.9.** *Seja  $k \geq 1$  um número inteiro. Existe um grafo  $G$  livre de touro estendido que não é TP com  $IC(G) = k$ .*

*Demonstração.* Considere a família de grafos definida na Figura 5.3. Para  $k = 1$  e  $k = 2$ , podemos tomar por  $G$  respectivamente o grafo  $P_4$  e aquele obtido de  $G_1$  por adição de um vértice anexado a  $a_1$ . Para  $k > 2$ , seja  $G$  o grafo  $G_{k-1}$ . Nesta figura, o vértice  $c_n$  ligado ao grafo  $G_{n-1}$  significa que  $c_n$  é adjacente a cada vértice de  $G_{n-1}$ . Afirmamos que  $G_{k-1}$  é um grafo não-TP que é livre de touro estendido e existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}_{k-1}$  de  $G_{k-1}$  com  $IC(\mathcal{R}_{k-1}) = IC(G_{k-1})$  para o qual as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. o intervalo  $I_{c_{k-1}}$  possui o maior tamanho;
2.  $\ell(I_{a_{k-1}})$  é o extremo de intervalo mais à esquerda;

3.  $r(I_{b_{k-1}})$  é o extremo de intervalo mais à direita;
4.  $IC(\mathcal{R}_{k-1}) = k$ .

Note que  $G_{k-1}$  sendo de fato um grafo não-TP que é livre de touro estendido e a propriedade (iv) sendo verdadeira, segue o resultado.

Suponha que as propriedades sejam satisfeitas para  $G_{k-2}$ . Seja  $\mathcal{R}_{k-2}$  um modelo de  $G_{k-2}$  para o qual as propriedades (i)-(iv) se verificam. Construimos  $\mathcal{R}_{k-1}$  como segue.

Primeiro, inclua  $\mathcal{R}_{k-2}$  em  $\mathcal{R}_{k-1}$ . Então, inclua em  $\mathcal{R}_{k-1}$  os intervalos  $I_{a_{k-1}}$  e  $I_{b_{k-1}}$  respectivamente ao lado esquerdo e direito de  $\mathcal{R}_{k-2}$  tais que os tamanhos de  $I_{a_{k-1}}$  e  $I_{b_{k-1}}$  sejam o mesmo e iguais ao menor comprimento em  $\mathcal{R}_{k-2}$ . Em seguida, deslize  $I_{a_{k-1}}$  para a direita e  $I_{b_{k-1}}$  para a esquerda de modo que  $r(I_{a_{k-1}})$  imediatamente suceda  $\ell(I_{a_{k-2}})$  e  $\ell(I_{b_{k-1}})$  imediatamente preceda  $r(I_{b_{k-2}})$ . Tal transformação é possível dado que as propriedades (ii) e (iii) se verificam em  $\mathcal{R}_{k-2}$ . Finalmente, inclua em  $\mathcal{R}_{k-1}$  o intervalo  $I_{c_{k-1}}$ , tal que  $\ell(I_{c_{k-1}}) = (\ell(I_{a_{k-1}}) + r(I_{a_{k-1}}))/2$  e  $r(I_{c_{k-1}}) = (\ell(I_{b_{k-1}}) + r(I_{b_{k-1}}))/2$ . Claramente,  $\mathcal{R}_{k-1}$  é um modelo de intervalo de  $G_{k-1}$ .

Note que  $|I_{c_{k-1}}| > |I_{c_{k-2}}|$ . Como  $I_{c_{k-2}}$  tem o maior comprimento em  $G_{k-2}$  pela propriedade (i), então  $I_{c_{k-1}}$  possui um tamanho distinto de todos os demais intervalos em  $G_{k-2}$ . Então, pela propriedade (iv),  $IC(\mathcal{R}_{k-1}) = IC(\mathcal{R}_{k-2}) + 1 = (k-1) + 1 = k$ . Como existe um caminho induzido  $a_{k-1}, a_{k-2}, c_{k-2}, b_{k-2}, b_{k-1}$ , então é claro que tal processo de construção de  $\mathcal{R}_{k-1}$  adiciona o menor número de novos tamanhos distintos a qualquer modelo de intervalo de  $G_{k-2}$ , pois a ordem das cliques que contém tais vértices não pode ser alterada. Como  $\mathcal{R}_{k-2}$  possui o menor número de tamanhos distintos de intervalo em relação a qualquer modelo de  $G_{k-2}$ , portanto  $IC(\mathcal{R}_{k-1}) = IC(G_{k-1})$ . Propriedades (i)-(iii) se verificam para  $G_{k-1}$  por construção.  $\square$

Como a contagem de intervalos de ordens e grafos livres de touro estendido é o principal tema nas seções que seguem, é digno de nota que o reconhecimento de grafos livres de touro estendido pode ser computado em tempo polinomial. Isto é formalmente estabelecido pela próxima observação.

**Observação 5.10.** *O problema de reconhecimento de grafos livres de touro estendido pode ser resolvido em tempo  $O(n^5(m+n))$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo. Seja  $\{v, a, b\} \subseteq V(G)$  um conjunto independente e suponha que exista  $\{a', b'\} \subseteq V(G)$  tal que  $a' \in N(v) \cap N(a) \setminus N(b)$  e  $b' \in N(v) \cap N(b) \setminus N(a)$ . Verifiquemos se  $v$  pode assumir, em um touro estendido  $B$  hipoteticamente existente, o papel do vértice adjacente a todos exceto dois vértices,

$a, b$  podem assumir o papel dos vértices de grau 1 de  $B$ , e  $a', b'$  podem corresponder aos vizinhos destes vértices de grau 1 de  $B$ . Mostramos que um touro estendido existe se e somente se  $a'$  e  $b'$  estão na mesma componente conexa do grafo  $G'$ , sendo  $G'$  o grafo  $G$  induzido por  $(N(v) \setminus (N(a) \cup N(b))) \cup \{a', b'\}$ , o que resulta na complexidade de reconhecimento mencionada.

Claramente, se  $B$  existe, então  $a'$  e  $b'$  estão na mesma componente conexa de  $G'$ . Por outro lado, suponha que  $a'$  e  $b'$  estão na mesma componente conexa de  $G'$ . Seja  $P$  o caminho mínimo entre  $a'$  e  $b'$  em  $G'$ . Portanto,  $P = \{a' = x_1, \dots, x_k = b'\}$  é um caminho induzido de ambos  $G'$  e  $G$ . Por construção, cada  $x \in P$  é adjacente a  $v$ , mas nem a  $a$ , nem a  $b$ . Portanto,  $\{v, a, b, x_1, \dots, x_k\}$  induz em  $G$  um touro estendido.  $\square$

## 5.5 Ordens livres de touro estendido

Nesta seção, mostramos um limite inferior para a contagem de intervalo de uma ordem e provamos que este limite é, para as ordens livres de touro estendido, a sua própria contagem de intervalos.

Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem de intervalo. A relação  $P^c = (X, \prec^c)$  é definida como segue:  $x \prec^c y$  se existe  $\{a, b\} \subseteq X$  tal que  $a \prec x \prec b$  e  $y \parallel a, y \parallel x, y \parallel b$ . Note que, se  $x \prec^c y$ , então em qualquer modelo de intervalo de  $P$  o intervalo correspondente a  $x$  está propriamente contido naquele correspondente a  $y$ . Quando tão condição é satisfeita, diremos que  $y$  inclui  $x$  em  $P$ . O próximo lema é claro.

**Lema 5.11.** *Se  $P$  é uma ordem de intervalo, então  $P^c$  é uma ordem.*

*Demonstração.* Claramente  $\prec^c$  é uma relação binária irreflexiva. Suponha  $x \prec^c y \prec^c z$ . Sejam  $a, b \in X$  tais que  $a \prec y \prec b$  e  $z \parallel a, y, b$ . Seja  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo de  $P$ . Como  $\ell(I_z) < r(I_a) < \ell(I_y) < \ell(I_x)$  e  $r(I_x) < r(I_y) < \ell(I_b) < r(I_z)$ , portanto  $a \prec x \prec b$  e  $z \parallel x$ . Então,  $x \prec^c z$ .  $\square$

Dado uma ordem  $P$ , a altura de  $P^c$ , chamada de *altura de inclusão* de  $P$ , fornece uma cota inferior para a contagem de intervalos de  $P$ , como estabelecido pelo seguinte lema.

**Lema 5.12.**  $IC(P) \geq H(P^c)$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo de  $P$ . Se  $x \prec^c y$ , então  $|I_x| < |I_y|$ . Seja  $x_1 \prec^c \dots \prec^c x_k$  uma cadeia maximal de  $P^c$ , onde  $k = H(P^c)$ . Portanto,  $|I_{x_1}| < \dots < |I_{x_k}|$ .  $\square$

Uma questão natural que surge do Lema 5.12 é para que classes de ordens tal cota inferior é a própria contagem de intervalos destas classes. Provamos no Teorema 5.14 que as ordens livres de touro estendido possuem esta característica. (Note,

no entanto, que ela não é a única; a própria classe dos grafos formados unicamente pelos touros estendidos também é um exemplo.) O Lema 5.13 é um resultado técnico a ser utilizado no Teorema 5.14.

**Lema 5.13.** *Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem livre de touro estendido possuindo um modelo de intervalo  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  com extremos distintos e sejam  $a, b \in X$  tais que  $|I_a| < |I_b|$  e  $a \not\prec^c b$ . Existe um modelo de intervalo  $\mathcal{R}' = \{I'_x \mid x \in X\}$  de  $P$  com extremos distintos tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $|I'_a| = |I_b|$
2.  $|I'_x| \geq |I_x|$ , para todo  $x \in S_{P^c}[a]$
3.  $|I'_x| = |I_x|$ , para todo  $x \in X \setminus S_{P^c}[a]$

*Demonstração.* Sejam  $P$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $a$ ,  $b$  respectivamente uma ordem de intervalo, um modelo de intervalo e elementos de  $X$  tais que as condições do teorema se verificam. Seja inicialmente  $\mathcal{R}' = \{I'_x \mid x \in X\}$  um modelo de  $P$  tal que  $I'_x = I_x$  para todo  $x \in X$ . Transforme  $\mathcal{R}'$  como segue.

Mova  $r(I'_a)$  para a direita e  $\ell(I'_a)$  para a esquerda até que ou (1)  $|I'_a| = |I_b|$ , ou (2) nem é possível cruzar  $\ell(I'_a)$  com o extremo de intervalo  $r(I_u)$  anterior, nem é possível cruzar  $r(I'_a)$  com o próximo extremo de intervalo  $\ell(I_v)$  para algum  $\{u, v\} \subseteq X$ , pois  $u \prec a \prec v$ . Se a condição (1) é satisfeita, a transformação está terminada e segue o resultado. Suponha que a condição (2) seja satisfeita.

Seja  $G$  o grafo com o qual  $P$  concorda. Se  $G \setminus a$  é conexo, seja  $W = v_1, \dots, v_{|W|}$  um caminho mínimo entre  $u$  e  $v$  em  $G \setminus a$ . Se  $|W| \geq 4$ , então o grafo induzido em  $G$  por  $W \cup \{a\}$  é um touro estendido com  $n = |W| - 3$ , o que é uma contradição. Portanto, ou  $G \setminus a$  é desconexo, ou  $|W| = 3$ . Claramente, em ambos os casos, existe para certos números reais  $p, \beta > 0$  um intervalo aberto  $(p, p + \beta) \subset I'_a$  que não contém nenhum extremo de intervalo e tal que para todo  $x \in X$ , verifica-se que  $(p, p + \beta) \subset I'_x$  se e somente se  $x \in S_{P^c}[a]$ . Cresça  $\mathcal{R}'$  esticando o intervalo  $(p, p + \beta)$  do modelo até que  $|I'_a| = |I_b|$ , obtendo  $\mathcal{R}'$  como desejado.  $\square$

Note que a prova do Lema 5.13 define um procedimento para obter o modelo que possui as propriedades requeridas 1, 2 e 3 do lema. De fato, este procedimento é usado no Algoritmo 1. A sua complexidade de tempo é dada pela complexidade de tempo de: (i) mover os extremos de intervalo de  $I_a$  para a esquerda e para direita até quando for possível; (ii) escolher o ponto certo para esticar o intervalo  $I'_a$  e aqueles que incluem  $I'_a$ , e (iii) esticar os intervalos. Passos (i) e (iii) são claramente executados em tempo linear. Passo (ii) pode também ser executado em tempo linear usando a seguinte estratégia. Seja  $G_a$  o grafo induzido pelos vizinhos de  $a$  (elementos

correspondentes aos intervalos que fazem interseção com  $I'_a$ ). Se  $G_a$  é conexo, então ou  $\ell(I'_a)$  ou  $r(I'_a)$  é um ponto possível de ser escolhido para se esticar o modelo. Se  $G_a$  é desconexo e  $G_1$  e  $G_2$  são duas componentes conexas consecutivas no modelo, então qualquer ponto no intervalo  $(\max\{r(I_x) \mid x \in V(G_1)\}, \min\{\ell(I_x) \mid x \in V(G_2)\})$  é um ponto possível de ser escolhido para se esticar o modelo. Portanto, a complexidade de tempo do procedimento definido no Lema 5.13 é de  $O(m+n)$ , respectivamente.

**Teorema 5.14.** *Se  $P = (X, \prec)$  é uma ordem livre de touro estendido, então  $IC(P) = H(P^c)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{R} = \{I_x \mid x \in X\}$  um modelo de intervalo de  $P$  com extremos de intervalo distintos. Para cada  $1 \leq i \leq H(P^c)$ , seja  $H_i$  o conjunto de elementos em  $X$  com altura  $i$  em  $P^c$ . Considere a execução do Algoritmo 1 com  $P$  e  $\mathcal{R}$  como entrada.

Primeiro, note que a transformação aplicada na Linha 7, pelo Lema 5.13, aumenta somente os intervalos correspondentes a  $S_{P^c}[a]$  e de forma que  $|I_a^{(i,j+1)}| = \beta_i$ . Como para cada  $1 \leq i \leq H(P^c)$ ,  $x \parallel y$  em  $P^c$  para todo  $\{x, y\} \subseteq H_i$ , verifica-se o seguinte invariante na entrada da Linha 11: para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq i$ ,  $|I_k^{(j,0)}| = \beta_j$  para cada  $k \in H_j$ . Logo, o modelo produzido na Linha 12 possui  $H(P^c)$  comprimentos distintos de intervalo, nomeadamente  $\beta_1, \dots, \beta_{H(P^c)}$ . Conseqüentemente,  $IC(P) \leq H(P^c)$ . Como pelo Lema 5.12 é verdade que  $IC(P) \geq H(P^c)$ , então  $IC(P) = H(P^c)$ .  $\square$

---

### Algoritmo 1 Modelo

---

```

1: função MODELO( $P, \mathcal{R}$ ) ▷  $P$  é uma ordem livre de touro estendido
2:    $\mathcal{R}^{(1,0)} \leftarrow \mathcal{R}$ 
3:   para  $i \leftarrow 1$  até  $H(P^c)$  faça
4:     Seja  $b \in H_i$  tal que  $|I_b^{(i,0)}| = \beta_i = \max\{|I_x^{(i,0)}| \mid x \in H_i\}$ 
5:      $j \leftarrow 0$ 
6:     para todo  $a \in H_i$  tal que  $|I_a| < |I_b|$  faça
7:       Seja  $\mathcal{R}^{(i,j+1)}$  o modelo  $\mathcal{R}'$  produzido pela transformação descrita no
       Lema 5.13, considerando  $P, \mathcal{R}^{(i,j)}, a$  e  $b$ .
8:        $j \leftarrow j + 1$ 
9:     fim para
10:     $\mathcal{R}^{(i+1,0)} \leftarrow \mathcal{R}^{(i,j)}$ 
11:  fim para
12:  devolva  $\mathcal{R}^{(H(P^c)+1,0)}$ 
13: fim função

```

---

A complexidade de tempo do Algoritmo 1 é dada pela complexidade máxima em relação a todas as iterações de computar o intervalo possuindo o tamanho máximo em cada altura (Linha 4) e invocando o procedimento definido na prova do Lema 5.13 (Linha 7). Para o primeiro, claramente pode ser feito em  $O(m+n)$ . Para o segundo,

dado que cada elemento pode assumir o papel de  $b$  somente uma única vez durante toda a execução, sua complexidade é  $O(n(m + n))$ , que é portanto a complexidade do algoritmo.

Os seguintes resultados são conseqüências diretas relevantes.

**Corolário 5.15.** *Se  $G$  é um grafo livre de touro estendido e  $P$  é uma ordem que concorda com  $G$ , então  $IC(G) \leq H(P^c)$ .*

*Demonstração.* Como  $P$  é livre de touro estendido e usando Teorema 5.14, segue que  $IC(G) \leq IC(P) = H(P^c)$ .  $\square$

**Corolário 5.16.** *Se  $G$  é um grafo livre de touro estendido, então  $IC(G)$  é o mínimo de  $\{H(P^c) \mid P \text{ concorda com } G\}$ .*

*Demonstração.* Como  $IC(G) = \min\{IC(P) \mid P \text{ concorda com } G\}$ , o resultado segue diretamente do Teorema 5.14.  $\square$

## 5.6 Grafos TP

Nesta seção, descrevemos algoritmos eficientes para computar a contagem de intervalos de grafos livres de touro estendido cujas PQ-trees possuem somente nós  $P$  como nós internos. Tal classe de grafos coincide com aquela dos grafos TP [12].

Como vimos na Seção 2.1, as PQ-trees possuem estreita relação com os grafos de intervalo. Note que uma PQ-tree de um grafo  $G$  define uma ordenação das cliques lidas da esquerda para a direita de um modelo de intervalo de  $G$ , enquanto uma ordem de intervalo que concorda com  $G$  define uma ordenação dos intervalos de um modelo de intervalo existente de  $G$ . Como é equivalente definir a ordenação das cliques e definir a ordenação dos intervalos, existe uma correspondência um-para-um entre PQ-trees de um grafo de intervalo  $G$  e as ordens que concordam com  $G$ . Quando o grafo  $G$  é claro no contexto, será conveniente para o que segue usar indistintamente a notação  $P$  para uma ordem que concorda com  $G$  e a notação  $T$  para a PQ-tree de  $G$  que possui a mesma ordenação de cliques que  $P$ . Como um exemplo de tal extensão de notação, diremos que o Corolário 5.16 reduz o problema da contagem de intervalos de um grafo  $G$  livre de touro estendido àquele de encontrar uma PQ-tree  $T$  de  $G$  que minimiza  $H(T^c)$ . Outro exemplo é a notação  $H_{T^c}(v)$  usada mais a frente,  $T$  sendo uma PQ-tree de um grafo  $G$ , que representa na verdade  $H_{P^c}(v)$ , onde  $P$  é a ordem que concorda com  $G$  e possui a mesma ordenação de cliques que  $T$ .

Seja  $T$  uma PQ-tree. Denotamos por  $T^R$  a PQ-tree equivalente de  $T$  obtida pela inversão da ordem dos nós filhos da raiz de  $T$ . Note que a notação  $T^d$  possui outro significado: como as notações de PQ-trees  $T$  e ordens  $P$  que correspondem a um

mesmo modelo podem ser utilizadas de maneira intercambiável,  $T^d$  representa na verdade  $P^d$ , que é a ordem obtida de  $P$  pela inversão de todas as suas relações de comparabilidade. Como em  $T^R$  não necessariamente todas as comparabilidades são invertidas, então  $T^R \neq T^d$  em geral.

Por conveniência, usaremos de maneira indistinta  $T$  e o conjunto de vértices que pertencem às cliques nas folhas de  $T$ , ou ainda o conjunto de cliques que são folhas de  $T$ , quando nenhuma ambigüidade ocorrer. Se  $v$  está em toda clique em  $T$ , então  $v$  é dito ser *universal* em  $T$ . As seguintes observações são dignas de nota.

**Observação 5.17.** *Seja  $T$  uma PQ-tree de um grafo  $G$  tal que  $T_1, \dots, T_\omega$  são PQ-trees filhas da raiz de  $T$ . Para todo  $1 \leq i < j \leq \omega$ , se um vértice  $v \in T_i \cap T_j$ , então  $v$  é universal em  $T_k$ , para cada  $i \leq k \leq j$ .*

*Demonstração.* Seja  $T$  uma PQ-tree do grafo  $G$  tal que  $T_1, \dots, T_\omega$  são PQ-trees filhas da raiz de  $T$ . Como as cliques contendo um dado vértice  $v$  são consecutivas em qualquer PQ-tree de  $G$ , é suficiente provar que  $v$  é universal em ambas  $T_i$  e  $T_j$ . Com o propósito de encontrar uma contradição, suponha que para algum  $1 \leq i < j \leq \omega$  existe  $v \in T_i \cap T_j$  tal que  $v$  não seja universal em  $T_i$  ou  $T_j$ . Considerando a operação de reversão de  $T$ , sem perda de generalidade, assumamos  $v \notin C$  para alguma clique  $C$  em  $T_i$ . Sejam  $C'$  e  $C''$  cliques em  $T_i$  e  $T_j$ , respectivamente, tais que  $v \in C' \cap C''$ . Seja  $T'$  a PQ-tree equivalente a  $T$  definida pela ordenação  $T_1, \dots, T_i^R, \dots, T_\omega$  das PQ-trees filhas. Então, a ordenação  $C', C, C''$  de cliques ocorre em  $T'$ , o que é uma contradição, pois as cliques contendo  $v$  devem ser consecutivas.  $\square$

**Observação 5.18.** *Seja  $T$  uma PQ-tree do grafo conexo  $G$  tal que a raiz de  $T$  é um nó  $P$ . Necessariamente, existe um vértice universal em  $G$ .*

*Demonstração.* Seja  $T_1, \dots, T_\omega$  as PQ-trees filhas da raiz de  $T$ . Como  $G$  é conexo, existe  $v \in T_1 \cap T_2$ . Seja  $T'$  a PQ-tree equivalente a  $T$  definida pela ordenação  $T_1, T_\omega, T_3, \dots, T_{L-1}, T_2$  das PQ-trees filhas. Como  $v \in T_1 \cap T_2$  em  $T'$ , pelo Lema 5.17  $v$  é universal em  $G$ .  $\square$

Introduzimos as noções cruciais das funções  $H(G)$  e  $u(G)$ . A primeira função é definida como  $H(G) = \min\{H(P^c) \mid P \text{ concorda com } G\}$ , cuja motivação é clara ( $H(G) \leq IC(G)$ ). A motivação para a segunda é melhor ilustrada pelo seguinte exemplo. Suponha que um dado grafo conexo  $G$ , cujas PQ-trees possuem por raiz um nó  $P$ , possui  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  como componentes conexas depois da remoção do vértice universal  $u \in V(G)$  (cuja existência é garantida pela Observação 5.18). Além disso, suponhamos  $H(G_1) > H(G_2) = H(G_3)$ . Seja  $T_i$  a PQ-tree de  $G_i$  tal que  $H(T_i^c) = H(G_i)$ , para cada  $1 \leq i \leq 3$ . Se  $T_1$  é colocado como a PQ-tree do meio da raiz da PQ-tree  $T$  de  $G$ , então necessariamente  $H(T^c) = H(T_1^c) + 1$ . Contudo,  $H(T^c)$  pode se feito igual a  $H(T_1^c)$  se for possível colocar  $T_1$  como a primeira PQ-tree filha

e  $T_1$  ser tal que todos os seus vértices possuindo a altura máxima de inclusão em  $T_1^C$  pertencem à primeira clique. Neste caso, como  $u$  não inclui nenhum vértice da primeira clique,  $u$  não incluirá nenhum vértice possuindo a altura máxima em  $T_1^C$  e, portanto,  $H(T^C) = H(T_1^C)$ . Esta propriedade, isto é, a existência de uma ordem  $P$  que concorda com um dado grafo tal que sua altura de inclusão é mínima sobre todas as ordens que concordam com  $G$  e para a qual todos os vértices possuindo a altura máxima em  $P^C$  pertencem à primeira clique, é a informação codificada por  $u(G)$ . Em outras palavras, seja  $u(T)$  uma função indicadora tal que  $u(T) = 0$  se para todo  $v \in T$  que possui a *altura máxima de inclusão* em  $T$ , isto é  $H_{T^C}(v) = H(T^C)$ , satisfaz que  $v$  está na primeira clique de  $T$ ; caso contrário,  $u(T) = 1$ . Além disso, seja  $u(G) = \min\{u(T) \mid T \text{ é uma PQ-tree de } G \text{ e } H(T^C) = H(G)\}$ .

Como exemplos de grafos  $G$  possuindo valores distintos de  $u(G)$ , considere os grafos  $G_a$  e  $G_b$  definidos por seus modelos de intervalo representados na Figura 5.4 (a) e (b), respectivamente. Seja  $T_a$  e  $T_b$  as PQ-trees correspondentes aos modelos de intervalo (a) e (b), respectivamente. O conjunto de vértices possuindo a altura máxima de inclusão é  $\{e, f\}$  em  $T_a$  e  $\{d\}$  em  $T_b$ . Em ambas  $T_a$  e  $T_b$ , existe um vértice possuindo a altura máxima de inclusão que não está na primeira clique ( $f$  para  $T_a$  e  $d$  para  $T_b$ ). Portanto,  $u(T_a) = u(T_b) = 1$ . É claro que existe uma PQ-tree  $T'_b$  de  $G_b$ , em particular aquela obtida pela reversão de todas as comparabilidades do modelo de intervalo (b), tal que  $u(T'_b) = 0$ . Logo,  $u(G_b) = 0$ . Por outro lado, é fácil verificar que o conjunto dos vértices com a altura de inclusão máxima é um invariante para  $G_a$ , isto é para toda PQ-tree  $T$  de  $G_a$ ,  $u(T) = 1$ , e vértices  $e$  e  $f$  não podem estar ambos na primeira clique de um modelo de  $G_a$ . Portanto,  $u(G_a) = 1$ .

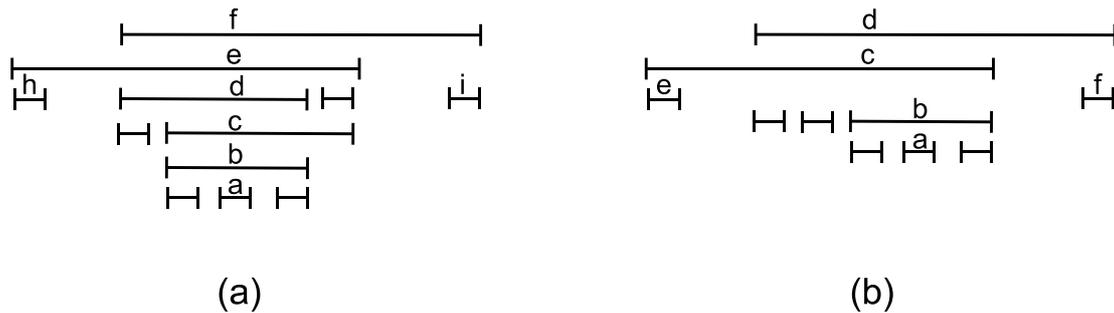


Figura 5.4: Exemplos de grafos  $G$  tais que  $u(G) = 1$  e  $u(G) = 0$ .

Em geral, nossa abordagem para computar a contagem de intervalos de um dado grafo livre de touro estendido  $G$  é aquela de computar uma PQ-tree  $T$  de  $G$  que minimiza  $H(T^C)$ . Pelo Corolário 5.16,  $IC(G)$  é então dado por  $H(T^C)$ . Tal computação se baseia no processo de computar e combinar as PQ-trees que minimizam  $H(T_i^C)$ ,  $1 \leq i \leq \omega$ , onde  $T_i$  representa uma PQ-tree filha da raiz de  $T$ . A função principal é chamada MODELO, que, dado um grafo  $G$  como entrada, devolve uma

PQ-tree  $T$  de  $G$  tal que  $H(T^c) = H(G)$  e  $u(T) = u(G)$ . Na verdade, descreveremos MODELO por duas funções distintas, MODELO-P descrita pelo Algoritmo 2 e MODELO-Q descrito pelo Algoritmo 3, que são chamadas dependendo se a raiz das PQ-trees de  $G$  são nós P ou nós Q, respectivamente.

Afirmamos que o Algoritmo 2 devolve como saída uma PQ-tree  $T$  de um dado grafo  $G$  cujas PQ-trees possuem como raiz um nó P tal que  $H(T^c) = H(G)$ . Teorema 5.19 trata da correção do Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Produz uma PQ-tree  $T$  de  $G$  tal que  $H(T^c) = H(G)$ .

---

```

1: função MODELO-P( $G$ )                                ▷  $G$  possuem suas PQ-trees com um
                                                         nó P como raiz
2:   se  $V(G)$  é uma clique  $C$  então
3:     Seja  $T$  ser  $C$ 
4:   senão
5:     se  $G$  é desconexo então
6:       Seja  $G_1, \dots, G_\omega$  as componentes conexas de  $G$ 
7:     senão
8:       Seja  $u$  o vértice universal em  $G$ 
9:       Seja  $G_1, \dots, G_\omega$  as componentes conexas de  $G \setminus u$ 
10:    fim se
11:     $T_i \leftarrow \text{MODELO}(G_i)$ , para todo  $1 \leq i \leq \omega$ 
    Assuma que  $H(T_1^c) \geq H(T_\omega^c) \geq H(T_i^c)$ , para todo  $1 < i < \omega$ 
12:    Seja  $T$  a PQ-tree que tem um nó P como raiz e  $T_1, \dots, T_{\omega-1}, T_\omega^R$ 
    como PQ-trees filhas desta raiz
13:     $T \leftarrow T^R$ , se  $u(T^R) < u(T)$ 
14:  fim se
15:  devolva  $T$ 
16: fim função

```

---

**Teorema 5.19.** *Seja  $G$  um grafo cujas PQ-trees possui por raízes um nó P. Suponha que  $\text{MODELO}(\overline{G})$  devolva como saída uma PQ-tree  $\overline{T}$  de um grafo  $\overline{G}$  tal que  $H(\overline{T}^c) = H(\overline{G})$  e  $u(\overline{T}) = u(\overline{G})$ , para todos os grafos  $\overline{G}$  possuindo menos vértices que  $G$ . Se  $T$  é a devolução de  $\text{MODELO-P}(G)$ , então  $H(T^c) = H(G)$  e  $u(T) = u(G)$ .*

*Demonstração.* Provamos separadamente os três casos distintos considerados pelo algoritmo. Primeiro, se  $G$  é um grafo completo, então o resultado trivialmente se verifica.

Suponha que  $G$  seja desconexo. Note que  $H(G) \leq H(T^c) = \max\{H(T_i^c) \mid 1 \leq i \leq \omega\} = H(T_k^c)$  para algum  $1 \leq k \leq \omega = H(G_k)$  pela hipótese. Além disso, claramente  $H(G) \geq H(G_k)$ . Portanto, a igualdade se verifica por toda a desigualdade e, por isso,  $H(T^c) = H(G)$ . Além disso, se  $H(T_1^c) = H(T_\omega^c)$  então como  $H(G_1) = H(T_1^c) = H(T_\omega^c) = H(G_\omega) \geq H(T_i^c) = H(G_i)$  para cada  $1 < i < \omega$ , portanto  $u(G) = 1 = u(T)$ ; caso contrário, isto é  $H(T_1^c) > H(T_\omega^c)$ , então  $u(T) = u(T_1) = u(G_1) = u(G)$ .

Suponha que  $G$  seja conexo. Neste caso, note que  $u(T^R) \geq u(T)$  segue da Linha 13. Analisamos os seguintes casos para mostrar que  $H(T^C) \leq H(G)$  e  $u(T) = u(G)$ . Como  $H(T^C) \geq H(G)$ , segue que  $H(T^C) = H(G)$ .

1.  $H(T_1^C) > H(T_\omega^C)$ : Se  $u(T_1) = 0$ , então  $H(T^C) = H(T_1^C) = H(G_1) \leq H(G)$ . Se  $u(T_1) = 1$ , como  $u(T_1) = u(G_1)$ , então  $u(T'_1) = 1$  para cada PQ-tree equivalente  $T'_1$  a  $T_1$  tal que  $H(T_1'^C) = H(T_1^C)$ . Portanto,  $H(G) \geq H(G_1) + 1 = H(T_1^C) + 1 = H(T^C)$ . Claramente, em ambos os casos,  $u(T) = 0 = u(G)$ .
2.  $H(T_1^C) = H(T_\omega^C) = H(T_k^C)$ , para algum  $1 < k < \omega$ : Como  $u$  tem que “cobrir” completamente  $T_1$ ,  $T_\omega$  ou  $T_k$  para cada PQ-tree de  $G$ , temos que  $H(G) \geq \min\{H(G_1), H(G_\omega), H(G_k)\} + 1 = \min\{H(T_1^C), H(T_\omega^C), H(T_k^C)\} + 1 = H(T^C)$ . Claramente,  $u(T) = 0 = u(G)$ .
3.  $H(T_1^C) = H(T_\omega^C) > H(T_i^C)$ , para cada  $1 < i < \omega$ : Se  $u(T_1) = 1$ , como  $u(T_1) = u(G_1)$ , então  $u(T'_1) = 1$  para cada PQ-tree equivalente  $T'_1$  de  $T_1$  tal que  $H(T_1'^C) = H(T_1^C)$ . Portanto,  $H(G) \geq H(G_1) + 1 = H(T_1^C) + 1 = H(T^C)$ . Analogamente, se  $u(T_\omega) = 1$ , então  $u(T'_\omega) = 1$  para cada PQ-tree equivalente  $T'_\omega$  de  $T_\omega$  tal que  $H(T_\omega'^C) = H(T_\omega^C)$  e, portanto,  $H(G) \geq H(G_\omega) + 1 = H(T_\omega^C) + 1 = H(T^C)$ . Claramente, em ambos os casos,  $u(T) = 0 = u(G)$ . Caso contrário, se  $u(T_1) = u(T_\omega) = 0$ , então  $H(T^C) = H(T_1^C) = H(T_\omega^C) = H(G_1) = H(G_\omega) \leq H(G)$  e  $u(T) = 1$ . Como  $H(G_1) = H(G_\omega) = H(G)$ , qualquer PQ-tree  $T'$  de  $G$  tal que  $H(T'^C) = H(G)$  possui um vértice  $x \in V(G_\omega)$  possuindo  $H_{T'^C}(x) = H(G)$ . Portanto,  $u(G) = 1$ .

Logo,  $H(T^C) = H(G)$  e  $u(T) = u(G)$ . □

A complexidade de tempo do Algoritmo 2 é  $O(m + n)$ , pois (i) a realização da premissa da Linha 11 pode ser computada mantendo-se a altura de cada PQ-tree em sua estrutura de dados e usando-se uma ordenação por caixas (*bucket sort*) para ordenar  $H(T_i^C)$ ,  $1 \leq i \leq \omega$ , e (ii) a decisão se  $u(T) = 0$  pode ser computada analisando-se  $H(T_i^C)$  e  $u(T_i)$  para cada  $1 \leq i \leq \omega$  em modo similar ao que é feito na prova do Teorema 5.19. Note, no entanto, que se for requerido que se produza um modelo de intervalo da PQ-tree resultante que realiza a contagem de intervalos, é necessário o uso do Algoritmo 1 da Seção 5.5, cuja complexidade de tempo é  $O(n(m + n))$ .

Portanto, é possível computar eficientemente a contagem de intervalos de grafos TP como observado pelo seguinte corolário.

**Corolário 5.20.** *Se  $G$  é um grafo TP, então  $\text{MODELO}(G)$  devolve uma PQ-tree  $T$  de  $G$  tal que  $H(T^C) = IC(G)$ .*

*Demonstração.* Um grafo  $G$  é um grafo TP se e somente se  $G$  não possuir nós  $Q$  em suas PQ-trees [12]. Portanto,  $\text{MODELO}(G)$  consiste apenas de  $\text{MODELO-P}(G)$ . Pelo Teorema 5.19 e Corolário 5.16, segue que  $H(T^c) = H(G) = IC(G)$ .  $\square$

## 5.7 Grafos livres de touro estendido

Nesta seção, descrevemos um algoritmo eficiente para computação da contagem de intervalos dos grafos livre de touro estendido definidos na Seção 5.4. Complementando o algoritmo fornecido na seção anterior, endereçamos a computação de contagens de intervalo de PQ-trees que possuem um nó  $Q$  como raiz.

Sejam  $G$  um grafo cujas PQ-trees possuem um nó  $Q$  como nó raiz,  $P = (X, \prec)$  uma ordem que concorda com  $G$  e  $T$  a PQ-tree correspondente a  $P$ . Sejam  $T_1, \dots, T_\omega$  as PQ-trees filhas da raiz de  $T$ . Seja  $U_P$  o subconjunto de elementos de  $X$  que pertencem ao menos a duas PQ-trees filhas, isto é  $U_P = \{u \in X \mid u \in T_i \cap T_{i+1} \text{ para algum } 1 \leq i < \omega\}$ . Para cada  $1 \leq i \leq \omega$ , definimos as ordens  $P(i)$ ,  $P_1(i)$ , e  $P_2(i)$  como segue.

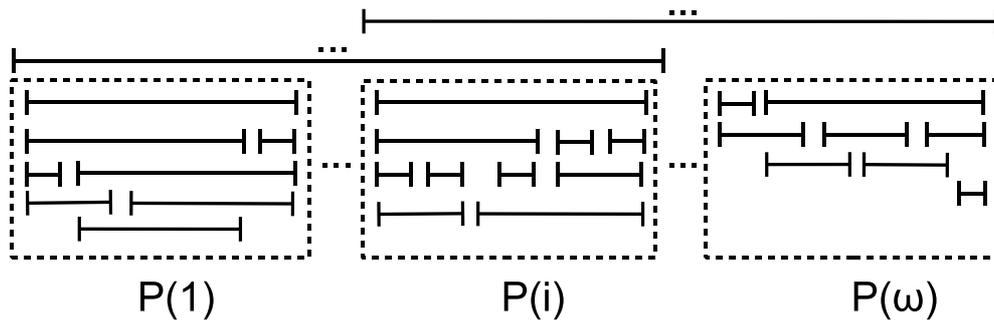


Figura 5.5: Exemplo esquemático da ordem  $P$  e subordens  $P(1), \dots, P(\omega)$ .

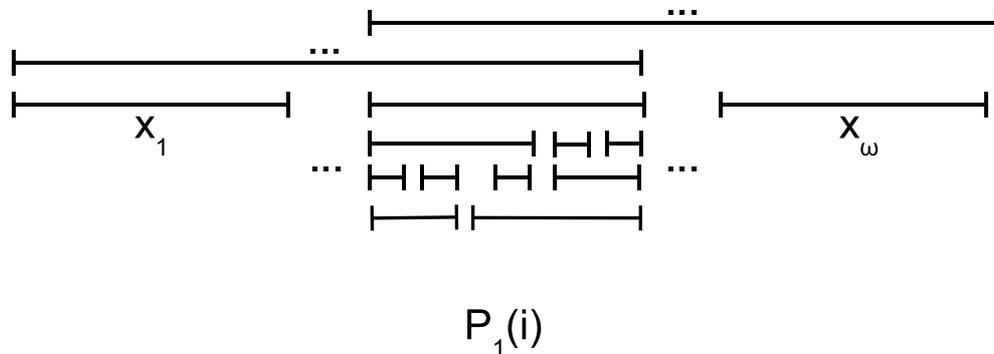


Figura 5.6: Exemplo esquemático de  $P_1(i)$  ( $P$  definido na Figura 5.5).

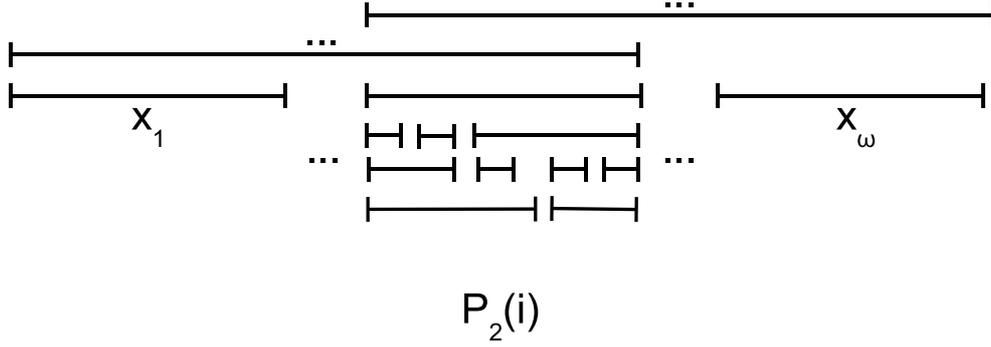


Figura 5.7: Exemplo esquemático de  $P_2(i)$  ( $P$  definido na Figura 5.5).

Seja  $P(i) = (X_i, \prec_i)$  uma ordem induzida em  $P$  por  $T_i \cap (X \setminus U_P)$ . Além disso, defina a ordem  $P_1(i)$  como aquela obtida de  $P$  substituindo-se todos os vértices em  $X_j$  por um único novo vértice  $x_j$  para todo  $1 \leq j \leq \omega$  e  $j \neq i$ . Finalmente, defina  $P_2(i)$  como a ordem obtida de  $P_1(i)$  pela reversão das comparabilidades entre os intervalos correspondentes àqueles em  $X_i$ . A Figura 5.5 mostra um exemplo esquemático de uma ordem  $P$  e suas subordens induzidas  $P(1), \dots, P(\omega)$ , e as Figuras 5.6 e 5.7 apresentam modelos de intervalo esquemáticos das ordens  $P_1(i)$  e  $P_2(i)$ , respectivamente.

Antes de estabelecer o resultado principal, precisamos de dois lemas auxiliares para o Teorema 5.23.

**Lema 5.21.** *Se  $P = (X, \prec)$  é uma ordem e  $\omega$  representa o número de PQ-trees filhas da raiz da PQ-tree correspondente a  $P$ , então  $H(P^c) = \max\{H(P_1(i)^c) \mid 1 \leq i \leq \omega\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{x, y\} \subseteq X$  tal que  $x \prec^c y$ . Portanto, existe  $\{a, b\} \subseteq X$  tal que  $a \prec x \prec b$  e  $y \parallel a$ ,  $y \parallel x$ ,  $y \parallel b$ . Seja  $T_1, \dots, T_\omega$  as PQ-trees filhas da raiz da PQ-tree  $T$  correspondente a  $P$ , e seja  $T_i$  tal que  $\{x, y\} \subseteq T_i$  para algum  $1 \leq i \leq \omega$ . Sejam  $T'$  a PQ-tree correspondente a  $P_1(i) = (X', \prec')$  e  $T'_1, \dots, T'_\omega$  as PQ-trees filhas da raiz de  $T'$ . Se  $a \in T_i$ , então  $a \in T'$ , implicando que  $a \prec' x$  e  $a \parallel y$  em  $P_1(i)$ . Caso contrário, então  $a \in T_j$  para algum  $1 \leq j < i$ . Se  $a \in U_P$ , então  $a \in T'$ , e portanto  $a \prec' x$  e  $a \parallel y$  em  $P_1(i)$ . Se  $a \in X_j$ , então como  $y$  é universal em  $T_j$  pela Observação 5.17,  $x_j \in T'_j$  representa o mesmo papel em  $T'$  que  $a$  representa em  $T$ , isto é,  $x_j \prec' x$  e  $x_j \parallel y$  em  $P_1(i)$ . Por argumentos simétricos, segue que ou  $x \prec' b$  e  $b \parallel y$  em  $P_1(i)$ , ou  $x \prec' x_j$  e  $x_j \parallel y$  em  $P_1(i)$  para algum  $i < j \leq \omega$ . Portanto,  $x \prec'^c y$ .

Seja  $x_1 \prec^c \dots \prec^c x_k$  uma cadeia em  $P^c$ . Seja  $x_1 \in T_j$ , para algum  $1 \leq j \leq \omega$ . Portanto,  $x_i \in T_j$  para cada  $1 < i \leq k$ . Conseqüentemente,  $x_1, \dots, x_k$  é também uma cadeia em  $P_1(j)^c$ . Portanto,  $H(P^c) = \max\{H(P_1(i)^c) \mid 1 \leq i \leq \omega\}$ .  $\square$

Seja  $P = (X, \prec)$  uma ordem. Seja  $U_P(i)$  um subconjunto de  $U_P$  correspondente aos vértices que incluem um daqueles que possuem a altura de inclusão máxima em  $P(i)$ . Formalmente,  $U_P(i) = \{u \in U_P \mid x \prec^c u, x \in \{x \in X_i \mid H_{P(i)^c}(x) = H(P(i)^c)\}\}$ . Como exemplos,  $U_{P_a}(1) = \emptyset$ ,  $U_{P_a}(2) = \{e, f\}$ , e  $U_{P_a}(3) = \emptyset$  para a ordem  $P_a$  definida pelo modelo de intervalo exibido na Figura 5.4 (a). Relembre que quando um modelo de intervalo de um grafo  $G$  corresponde a ambos uma PQ-tree  $T$  de  $G$  e uma ordem  $P$  que concorda com  $G$ , então por conveniência de notação usaremos as notações  $P$  e  $T$  indistintamente. Portanto, usaremos as notações  $U_T$ ,  $T(i)$ ,  $T_1(i)$ , e  $T_2(i)$  nos referindo a  $U_P$ ,  $P(i)$ ,  $P_1(i)$ , e  $P_2(i)$ , respectivamente.

**Lema 5.22.** *Seja  $T$  e  $\bar{T}$  as PQ-trees do grafo  $G$  cujas PQ-trees possuem como raiz um nó  $Q$  e tais que, se  $T_1, \dots, T_\omega$  e  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_\omega$  são as PQ-trees filhas das raízes de respectivamente  $T$  e  $\bar{T}$ ,  $T_i$  é equivalente a  $\bar{T}_i$ ,  $1 \leq i \leq \omega$ . Para todo  $1 \leq i \leq \omega$ , se  $H(T(i)^c) \leq H(\bar{T}(i)^c)$ , então  $H(T_1(i)^c) > H(\bar{T}_1(i)^c)$  somente se  $H(T(i)^c) = H(\bar{T}(i)^c)$  e  $U_T(i) \setminus U_{\bar{T}}(i) \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Seja  $1 \leq i \leq \omega$  e suponha  $H(T(i)^c) \leq H(\bar{T}(i)^c)$ . Seja  $T'$  e  $\bar{T}'$  a PQ-tree obtida de  $T$  e  $\bar{T}$  respectivamente por remoção dos elementos que estão no conjunto  $U_i = \{x \in U \mid \text{ou } x \in T_{i-1} \cap T_i \text{ ou } x \in T_i \cap T_{i+1}\}$ . Como  $H(T(i)^c) \leq H(\bar{T}(i)^c)$ , então claramente  $H(T'(i)^c) \leq H(\bar{T}'(i)^c)$ . Note que, por construção,  $x \not\prec^c y$  para qualquer  $\{x, y\} \subseteq U$  e que  $U_i \subseteq U$ . Portanto,  $H(T_1(i)^c) - H(T'_1(i)^c) \in \{0, 1\}$  e  $H(\bar{T}_1(i)^c) - H(\bar{T}'_1(i)^c) \in \{0, 1\}$ . Conseqüentemente,  $H(\bar{T}_1(i)^c) \geq H(\bar{T}'_1(i)^c) \geq H(T'_1(i)^c)$ . Se  $H(T_1(i)^c) > H(\bar{T}_1(i)^c)$ , então  $H(T_1(i)^c) = H(\bar{T}_1(i)^c) + 1 = H(\bar{T}'_1(i)^c) + 1 = H(T'_1(i)^c) + 1 = H$ . Suponha, com o propósito de encontrar uma contradição,  $H(T(i)^c) < H(\bar{T}(i)^c) = h$ , e seja  $y_1 \overleftarrow{c} \dots \overleftarrow{c} y_h$  uma cadeia máxima em  $\bar{T}(i)^c$ . Como  $H(T(i)^c) < H(\bar{T}(i)^c) = h$  e  $H(T_1(i)^c) = H$ , existe  $x_1 \prec^c \dots \prec^c x_H$  em  $T_1(i)^c$ . Seja  $k$  o máximo inteiro para o qual  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X_i$ . Claramente,  $k \geq 1$  ou, caso contrário,  $H(\bar{T}_1(i)^c) \geq H$ . Portanto, verifica-se que  $y_1 \overleftarrow{c} \dots \overleftarrow{c} y_{h-1} \overleftarrow{c} x_{k+1} \overleftarrow{c} \dots \overleftarrow{c} x_H$  em  $\bar{T}_1(i)^c$ . Como  $k \leq H(T(i)^c) < H(\bar{T}(i)^c) = h$ , então  $k \leq h - 1$  e, conseqüentemente,  $H(\bar{T}_1(i)^c) \geq H$ , o que representa uma contradição. Logo,  $H(T(i)^c) = H(\bar{T}(i)^c)$ . Além disso, como  $H(T'_1(i)^c) = H(\bar{T}'_1(i)^c)$ ,  $H(T_1(i)^c) - H(T'_1(i)^c) = 1$ , e  $H(\bar{T}_1(i)^c) - H(\bar{T}'_1(i)^c) = 0$ , então claramente  $U_T(i) \setminus U_{\bar{T}}(i) \neq \emptyset$ .  $\square$

Mostramos que o Algoritmo 3 retorna uma PQ-tree  $T$  de um dado grafo  $G$  cujas PQ-trees possuem um nó  $Q$  como raiz tal que  $H(T^c) = H(G)$ . O próximo teorema trata da questão relativa a correção do Algoritmo 3.

**Teorema 5.23.** *Seja  $G$  um grafo conexo cujas PQ-trees possuem como raiz um nó  $Q$ . Suponha que  $\text{MODELO}(\bar{G})$  devolve uma PQ-tree  $\bar{T}$  de qualquer grafo  $\bar{G}$  tal que  $H(\bar{T}^c) = H(\bar{G})$  e  $u(\bar{T}) = u(\bar{G})$ , para todos os grafos  $\bar{G}$  com menos vértices que*

---

**Algoritmo 3** Produz uma PQ-tree  $T$  de  $G$  tal que  $H(T^c) = H(G)$ .

---

- 1: **função** MODELO-Q( $G$ ) ▷  $G$  possui suas PQ-trees com um  
nó Q como raiz
  - 2:   Seja  $T'$  uma PQ-tree de  $G$  que possui  $T'_1, \dots, T'_\omega$  como PQ-trees filhas
  - 3:    $U \leftarrow \{u \in T' \mid u \in T'_i \cap T'_{i+1} \text{ para algum } 1 \leq i < \omega\}$
  - 4:    $X_i \leftarrow T'_i \setminus U$  e  $G_i \leftarrow G[X_i]$ ,  $1 \leq i \leq \omega$
  - 5:    $T_i \leftarrow \text{MODELO}(G_i)$ ,  $1 \leq i \leq \omega$
  - 6:   Sejam  $T$  uma PQ-tree que possui um nó Q como raiz e  $T_1, \dots, T_\omega$   
as PQ-trees filhas da raiz  
Assuma  $H(T_1(i)^c) \leq H(T_2(i)^c)$ ,  $1 \leq i \leq \omega$
  - 7:    $T \leftarrow \text{MINIMIZAR-U}(T)$
  - 8:   **devolva**  $T$
  - 9: **fim função**
- 

$G$ . Seja  $T$  a devolução da chamada  $\text{MODELO-Q}(G)$ . Então,  $H(T^c) = H(G)$  e  $u(T) = u(G)$ .

*Demonstração.* Primeiro, note que  $\text{MINIMIZAR-U}$  invocado na Linha 7 pode somente reverter a própria  $T$  ou algumas PQ-trees filhas da raiz de  $T$  de tal maneira que se  $\bar{T}$  é a devolução de  $\text{MINIMIZAR-U}(T)$ , então  $H(\bar{T}^c) \leq H(T^c)$ . Portanto, é suficiente provar que  $H(T^c) = H(G)$  antes de ser processado por  $\text{MINIMIZAR-U}$  de modo a provar que  $H(T^c) = H(G)$  depois de tal processamento. Além disso, mostramos que  $u(T) = u(G)$  depois do processamento de  $\text{MINIMIZAR-U}$ , seguindo o resultado.

Seja  $\bar{T}$  uma PQ-tree de  $G$  tal que  $H(\bar{T}^c) = H(G)$ . Seja  $T$  uma PQ-tree de  $G$  antes de ser processada por  $\text{MINIMIZAR-U}$ . Assuma, sem perda de generalidade considerando-se a operação de reversão de  $\bar{T}$ , que a PQ-tree  $\bar{T}_i$  filha de  $\bar{T}$  é equivalente a PQ-tree  $T_i$  filha de  $T$  para todo  $1 \leq i \leq \omega$ . Pelo Lema 5.21,  $H(\bar{T}^c) = \max\{H(\bar{T}_1(i)^c) \mid 1 \leq i \leq \omega\}$  e  $H(T^c) = \max\{H(T_1(i)^c) \mid 1 \leq i \leq \omega\}$ . Mostramos que  $H(T_1(i)^c) \leq H(\bar{T}_1(i)^c)$  para cada  $1 \leq i \leq \omega$ , seguindo que  $H(T^c) \leq H(\bar{T}^c)$ . Como  $H(T^c) \geq H(G) = H(\bar{T}^c)$ , então  $H(T^c) = H(\bar{T}^c) = H(G)$ . Provamos a afirmação como segue.

Suponha que  $H(T_1(i)^c) > H(\bar{T}_1(i)^c)$ , para algum  $1 \leq i \leq \omega$ . Note que  $H(T(i)^c) \leq H(\bar{T}(i)^c)$  pela hipótese sobre a devolução de  $\text{MODELO}$ . De acordo com o Lema 5.22,  $H(T(i)^c) = H(\bar{T}(i)^c)$  e  $U_T(i) \setminus U_{\bar{T}}(i) \neq \emptyset$ . Portanto, ou  $u(\bar{T}(i)) = 0$ , ou  $u(\bar{T}(i)^d) = 0$  (caso contrário,  $U_T(i) \setminus U_{\bar{T}}(i) = \emptyset$ ). Como  $H(G_i) = H(T(i)^c) = H(\bar{T}(i)^c)$  e ou  $u(\bar{T}(i)) = 0$  ou  $u(\bar{T}(i)^d) = 0$ , então  $u(G_i) = 0$ . Com isso, ou  $u(T(i)) = 0$ , ou  $u(T(i)^d) = 0$  segue da hipótese sobre a devolução de  $\text{MODELO}$ . Além disso,  $u(T(i)) = 0$  (resp.  $u(T(i)^d) = 0$ ) precisamente quando  $u(\bar{T}(i)^d) = 0$  (resp.  $u(\bar{T}(i)) = 0$ ), ou caso contrário  $U_T(i) \setminus U_{\bar{T}}(i) = \emptyset$ . Conseqüentemente, como  $H(T(i)^c) = H(\bar{T}(i)^c)$ , segue que  $H(T_2(i)^c) = H(\bar{T}_1(i)^c) < H(T_1(i)^c)$ , o que contradiz a premissa da Linha 6 de  $\text{MODELO-Q}$ .

Finalmente, suponha que  $u(T) > u(G)$  depois do processamento de  $\text{MINIMIZAR-U}$

---

**Algoritmo 4** Dada a PQ-tree  $T$  de entrada, minimiza  $u(T)$  sem aumentar  $H(T^c)$ .

---

1: **função** MINIMIZAR-U( $T$ ) ▷  $T$  é uma PQ-tree  
2:   **para todo**  $\bar{T} \in \{T, T^R\}$  **faça**  
3:     **para todo** PQ-tree  $T_i$  filha da raiz de  $\bar{T}$  **faça**  
4:       Seja  $B(j, k)$  a expressão lógica: “ou  $H(\bar{T}_k(j)^c) < H(\bar{T}^c)$ , ou  $u(\bar{T}_k(j)) = 0$  e  $H(\bar{T}_k(j)^c) = H(\bar{T}^c)$ ”  
5:       **se**  $B(i, 1)$  **então**  
6:           $T'_i \leftarrow \bar{T}_i$   
7:       **senão se**  $B(i, 2)$  **então**  
8:           $T'_i \leftarrow \bar{T}_i^d$   
9:       **senão**  
10:           $T'_i \leftarrow \emptyset$   
11:       **fim se**  
12:     **fim para**  
13:     **se**  $T'_i \neq \emptyset$  para todo  $1 \leq i \leq \omega$  **então**  
14:       Seja  $T'$  uma PQ-tree cuja raiz é um no Q e que possui  $T'_1, \dots, T'_\omega$  como PQ-trees filhas  
15:       **devolva**  $T'$   
16:     **fim se**  
17:   **fim para**  
18:   **devolva**  $T$   
19: **fim função**

---

U, isto é, existe uma PQ-tree  $\bar{T}$  de  $G$  com  $H(\bar{T}^c) = H(T^c)$  tal que  $u(\bar{T}) = 0$  e  $u(T) = 1$ . Sem perda de generalidade considerando-se a operação de reversão de  $T$ , seja  $T_i$  uma PQ-tree a  $\bar{T}_i$ , para todo  $1 \leq i \leq \omega$ . De acordo com a afirmação anterior,  $H(T_1(i)^c) \leq H(\bar{T}_1(i)^c)$  para cada  $1 \leq i \leq \omega$ . Seja  $J \subseteq \{1, \dots, \omega\}$  tal que para cada  $i \in J$ ,  $u(T_1(i)) = 1$  e  $H(T^c) = H(T_1(i)^c) = H(\bar{T}_1(i)^c) = H(\bar{T}^c)$ . Para todo  $i \in J$ , claramente  $u(\bar{T}_1(i)) = 0$  (como  $u(\bar{T}) = 0$ ). Se  $u(\bar{T}(i)) = 1$ , então dado que todos os intervalos em  $U \cap \bar{T}(i)$  cobrem um intervalo com altura máxima de inclusão em  $\bar{T}(i)$ ,  $u(T_1(i)) \leq u(\bar{T}_1(i))$ , o que representa uma contradição. Portanto,  $u(\bar{T}(i)) = 0$  e, conseqüentemente,  $u(G_i) = 0$ . Logo, ou  $u(T(i)) = 0$ , ou  $u(T(i)^d) = 0$ . Como  $u(T_1(i)) = 1$  e  $u(\bar{T}_1(i)) = 0$ , então  $u(T(i)^d) = 0$ . Como  $H(G_i) = H(T(i)^c) = H((T(i)^d)^c) \leq H(\bar{T}_1(i)^c)$ , então  $H(T_2(i)^c) \leq H(\bar{T}_1(i)^c) = H(T_1(i)^c)$ . Para não contradizer a escolha de  $T$  pela Linha 6 de MODELO-Q, segue que  $H(T_2(i)^c) = H(T_1(i)^c)$ . Como  $u(T(i)^d) = 0$ , segue que existe uma contradição com a escolha de  $T$  por MINIMIZAR-U.  $\square$

A complexidade de tempo para computar  $P^c$  de  $P$  é  $O(m^2)$ , enquanto as avaliações de  $H(P^c)$  e  $u(P)$  são feitas em tempo linear. Como MINIMIZAR-U computa  $H(P_j(i)^c)$  e  $u(P_j(i))$  para cada PQ-tree  $T_i$  filha e  $j \in \{1, 2\}$ , portanto requer não mais que tempo  $O(m^2n)$ . Como o número de nós numa PQ-tree é  $O(n)$ , a complexidade de tempo do Algoritmo 3 é portanto  $O(m^2n^2)$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

A classe dos grafos de intervalo tem atraído o interesse de diversos pesquisadores devido à sua riqueza estrutural e ao seu emprego em certas aplicações, resultando em diversos estudos teóricos sobre suas propriedades [1–3, 9, 15, 26, 30, 31, 36, 37, 44, 45, 47, 54]. Existem diversos métodos eficientes de reconhecimento da classe dos grafos de intervalo. O mais antigo, com tempo ótimo de  $O(n + m)$ , é devido a Booth e Lueker [6]. No entanto, para certas classes de grafos que generalizam aquela dos grafos de intervalo, métodos de reconhecimento eficientes não são atualmente conhecidos. Este é o caso do problema de reconhecimento dos grafos PI, que é um problema em aberto desde 1987 [7, 8, 14, 17, 21, 23, 41, 50].

No Capítulo 2, tratamos o problema de cliques extremas em grafos de intervalo, Neste trabalho, caracterizamos as clique extremas de um grafo de intervalo por subgrafos induzidos proibidos. Além disso, caracterizamos os grafos de intervalos nos quais todas as cliques são extremas. No Capítulo 3, reformulamos o problema de reconhecimento dos grafos PI usando a noção de dimensão linear-intervalar introduzida. Mais especificamente, mostramos que o problema de reconhecer um grafo PI é equivalente ao de reconhecer se uma ordem a ele associada tem dimensão linear-intervalar limitada por certa constante. Além disso, mostramos que tal dimensão é um invariante de comparabilidade e que, para todo valor de dimensão, existe uma ordem exatamente com tal valor. No Capítulo 4, apresentamos um apanhado (*survey*) sobre o problema de computar o número mínimo de tamanhos de intervalos necessário para representar um grafo de intervalo por um modelo que só utiliza intervalos daqueles tamanhos. No Capítulo 5, apresentamos os resultados por nós obtidos no tema, em particular, a computação eficiente da contagem de intervalos de grafos e ordens livres de touro estendido. Os trabalhos e apresentações derivadas desta tese encontram-se destacados na Seção 1.2.

Por último, ressaltamos que o estudo dos grafos e ordens, mesmo considerando apenas os temas abordados neste trabalho, não se esgotam aqui. Existem muitas perguntas em aberto que não foram trabalhadas, algumas dasquais resumimos a

seguir.

Assim como os grafos de intervalo, outras de suas generalizações são baseadas no conceito de grafos de interseção. Neste caso, podemos sempre nos perguntar para quais vértices do grafo os conjuntos correspondentes estão nos limites desta representação, isto é, são extremos. Tomemos o exemplo dos grafos cordais, Um grafo é *cordal* se é o grafo de interseção de subárvores de uma árvore. Definindo neste caso um vértice como extremo se sua subárvore correspondente possui alguma folha da árvore, uma questão interessante é a de caracterizar os vértices extremos neste contexto.

Outro tópico abordado foi o conceito de dimensão. Existem muitos artigos que tratam do problema da dimensão linear. Em particular, destacamos o livro de Trotter [53] para um extenso tratado. Como exemplos de resultados, estão aqueles relacionados a determinar com precisão ou com limites superiores e/ou inferiores esta dimensão para diversas classes de ordens. No entanto, tanto para dimensão intervalar quanto para a dimensão linear-intervalar que definimos (que é uma generalização da anterior), os resultados são quase inexistentes. Um tópico de pesquisa interessante, portanto, é a investigação de como (ou se) os resultados existentes para a dimensão linear migram para o contexto da dimensão linear-intervalar. Além disso, vimos que o conceito de linear-intervalar pode ser utilizado para caracterizar uma generalização importante de grafos de intervalo, a saber os grafos PI. No entanto, para outras generalizações não é claro se isto é possível ou se outras dimensões devem ser introduzidas para tal fim, como por exemplos os grafos PI\* e os grafos de paralelogramos. Naturalmente, fica também em aberto a complexidade de decidir, para dada ordem  $P$ , se a dimensão linear-intervalar de  $P$  é no máximo  $(2, 1)$ . Em outras palavras, fica em aberto a complexidade de se reconhecer os grafos PI.

O último assunto abordado foi a contagem de intervalos. Vimos que a classes dos grafos livres de touro estendido está propriamente incluída naquela dos grafos cujas contagens de intervalos são iguais às respectivas alturas de inclusão. Neste caso, uma questão de interesse é caracterizar completamente esta classe para qual a única razão de aumento de contagem de intervalos é a presença de intervalos aninhados. Outra questão de interesse é determinar outras razões pelas quais a contagem de intervalos sofre alteração para além da altura de inclusão.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. F. ALLEN, H. A. KAUTZ, R. N. PELAVIN e J. D. TENENBERG. *Reasoning About Plans*. Morgan Kaufmann, 1991.
- [2] J. F. ALLEN. *Maintaining Knowledge About Temporal Intervals*. Morgan Kaufmann, 1990.
- [3] S. BENZER. “On the topology of the genetic fine structure”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 45, n. 11, pp. 1607–1620, 1959.
- [4] K. P. BOGART e D. B. WEST. “A short proof that “proper = unit””, *Discrete Mathematics*, v. 201, n. 1-3, pp. 21–23, 1999.
- [5] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [6] K. S. BOOTH e G. S. LUEKER. “Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms”, *Journal of Computer and System Sciences*, v. 13, pp. 335–379, 1976.
- [7] A. BRANDSTÄDT, V. B. LE e J. P. SPINRAD. *Graph Classes: a Survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [8] A. BRANDSTÄDT, V. B. LE, T. SZYMCAK e F. SIEGEMUND. “Information system on graph class inclusions v.2.0”, 2006-01-09. <http://www.teo.informatik.uni-rostock.de/isgci/>.
- [9] A. CARRANO. “Establishing the order to human chromosome-specific DNA fragments”in: A. Woodhead e B. Barnhart (Eds.), *Biotechnology and the Human Genome*, Plenum Press, pp. 37–50, New York, 1988.
- [10] M. R. CERIOLI e J. L. SZWARCFITER. “Characterizing intersection graphs of substars of a star”, *Ars Combinatoria*, v. 79, pp. 21–31, 2006.
- [11] M. R. CERIOLI, F. DE S. OLIVEIRA e J. L. SZWARCFITER. “Linear-interval dimension and PI orders”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 30, pp. 111–116, 2008.

- [12] M. R. CERIOLI, F. DE S. OLIVEIRA e J. L. SZWARCFITER. “Extreme cliques in interval graphs”, *Ars Combinatoria*, v. 94, pp. 103–114, 2010.
- [13] M. R. CERIOLI, F. DE S. OLIVEIRA e J. L. SZWARCFITER. “On counting interval lengths of interval graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. a aparecer, pp. –, 2011.
- [14] F. CHEAH e D. G. CORNEIL. “On the structure of trapezoid graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 66, n. 2, pp. 109–133, 1996.
- [15] C. COOMBS e J. SMITH. “On the detection of structures in attitudes and developmental processes”, *Psychological Reviews*, v. 80, pp. 337–351, 1973.
- [16] T. H. CORMEN, C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST e C. STEIN. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2001.
- [17] D. G. CORNEIL e P. A. KAMULA. “Extensions of permutation and interval graphs”, *Congressus Numerantium*, v. 58, pp. 267–275, 1987.
- [18] D. G. CORNEIL, H. KIM, S. NATARAJAN, S. OLARIU e A. P. SPRAGUE. “Simple Linear Time Recognition of Unit Interval Graphs”, *Information Processing Letters*, v. 55, n. 2, pp. 99–104, 1995.
- [19] D. G. CORNEIL. “A simple 3-sweep LBFS algorithm for the recognition of unit interval graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 138, n. 3, pp. 371–379, 2004.
- [20] I. DAGAN, M. C. GOLUBIC e R. Y. PINTER. “Trapezoid graphs and their coloring”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 21, n. 1, pp. 35–46, 1988.
- [21] S. M. DE ALMEIDA. *Grafos PI*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2005.
- [22] C. M. H. DE FIGUEIREDO, J. MEIDANIS e C. P. DE MELLO. “A linear-time algorithm for proper interval graph recognition”, *Information Processing Letters*, v. 56, n. 3, pp. 179–184, 1995.
- [23] F. DE S. OLIVEIRA. *Caracterizações de Grafos de Interseção de Triângulos*. Dissertação de Mestrado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2006.
- [24] X. DENG, P. HELL e J. HUANG. “Linear-Time Representation Algorithms for Proper Circular-Arc Graphs and Proper Interval Graphs”, *SIAM Journal on Computing*, v. 25, n. 2, pp. 390–403, 1996.

- [25] S. FELSNER, M. HABIB e R. MÖHRING. “On the interplay between interval dimension and ordinary dimension.” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 7, pp. 32–40, 1994.
- [26] P. C. FISHBURN. *Interval Orders and Interval Graphs*. John Wiley & Sons, 1985.
- [27] D. R. FULKERSON e O. A. GROSS. “Incidence matrices and interval graphs”, *Pacific Journal of Mathematics.*, v. 15, pp. 835–855, 1965.
- [28] F. GARDI. “The Roberts characterization of proper and unit interval graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 307, n. 22, pp. 2906–2908, 2007.
- [29] J. GIMBEL. “End vertices in interval graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 21, pp. 257–259, 1988.
- [30] M. C. GOLUBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Elsevier, 2004.
- [31] M. GOLUBIC e A. TRENK. *Tolerance Graphs*. Cambridge University Press, 2003.
- [32] T. GREENOUGH. *The Representation and Enumeration of Interval Orders*. Tese de Doutorado, Dartmouth College, Estados Unidos, 1974.
- [33] M. HABIB, D. KELLY e R. MÖHRING. “Interval dimension is a comparability invariant.” *Discrete Applied Mathematics*, v. 88, pp. 211–229, 1992.
- [34] P. HELL e J. HUANG. “Certifying LexBFS Recognition Algorithms for Proper Interval Graphs and Proper Interval Bigraphs”, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, v. 18, n. 3, pp. 554–570, 2005.
- [35] G. ISAAK. “Discrete interval graphs with bounded representation”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 33, pp. 157–183, 1993.
- [36] R. M. KARP. “Mapping the genome: some combinatorial problems arising in molecular biology”, in: *STOC '93: Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 278–285, New York. ACM, 1993.
- [37] D. G. KENDALL. “Incidence matrices, interval graphs, and seriation in archaeology”, *Pacific Journal of Mathematics*, v. 28, pp. 565–570, 1969.
- [38] L. LANGLEY. “Recognition of orders of interval dimension 2.” *Discrete Applied Mathematics*, v. 60, pp. 257–266, 1995.

- [39] R. LEIBOWITZ. *Interval Counts and Threshold Numbers of Graphs*. Tese de Doutorado, Rutgers University, Estados Unidos, 1978.
- [40] R. LEIBOWITZ, S. F. ASSMANN e G. W. PECK. “The interval count of a graph”, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, v. 3, n. 4, pp. 485–494, 1982.
- [41] Y.-L. LIN. “Triangle graphs and simple trapezoid graphs.” *Journal of Information Science and Engineering*, v. 18, n. 3, pp. 467–473, 2002.
- [42] T.-H. MA e J. P. SPINRAD. “On the 2-chain subgraph cover and related problems”, *Journal of Algorithms*, v. 17, n. 2, pp. 251–268, 1994.
- [43] T. A. MCKEE e F. R. MCMORRIS. *Topics in Intersection Graph Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [44] K. NÖKEL. *Temporally Distributed Symptoms in Technical Diagnosis*. Springer-Verlag, 1991.
- [45] C. H. PAPADIMITRIOU e M. YANNAKAKIS. “Scheduling interval-ordered tasks”, *SIAM Journal on Computing*, v. 8, n. 3, pp. 405–409, 1979.
- [46] I. PE’ER e R. SHAMIR. “Realizing interval graphs with size and distance constraints”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 10, n. 4, pp. 662–687, 1997.
- [47] F. ROBERTS. *Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems*. Prentice Hall, 1976.
- [48] F. ROBERTS. “Indifference graphs”, in: *F. Harary (Ed.) Proof Techniques in Graph Theory*, pp. 139–146. Academic Press, 1969.
- [49] D. SKRIEN. “Chronological orderings of interval graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 8, pp. 69–83, 1984.
- [50] J. P. SPINRAD. *Efficient Graph Representations*, v. 19, *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, 2003.
- [51] J. L. SZWARCFITER e L. MARKENZON. *Estrutura de Dados e seus Algoritmos*. LTC, 1994.
- [52] W. T. TROTTER. “Interval graphs, interval orders, and their generalizations”, in: *SIAM Applications of Discrete Mathematics*, R. Ringeisen and F. Roberts, eds., pp. 45–58, 1988.

- [53] W. T. TROTTER. *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*. The Johns Hopkins University Press, 1992.
- [54] S. A. WARD e R. H. HALSTEAD. *Computation Structures*. MIT Press & McGraw-Hill, 1990.
- [55] M. YANNAKAKIS. “The complexity of the partial order dimension problem.” *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, v. 3, pp. 351–358, 1982.