



## REPRESENTAÇÃO DE NÃO-CONVEXIDADES NO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA UTILIZANDO PDDE

Fernanda Souza Thomé

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Helena Costa Fampa

Rio de Janeiro  
Junho de 2013

REPRESENTAÇÃO DE NÃO-CONVEXIDADES NO PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA UTILIZANDO PDDE

Fernanda Souza Thomé

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Márcia Helena Costa Fampa, D.Sc.

---

Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Sc.

---

Prof. Marcus Vinicius Soledade Poggi de Aragao, D.Sc.

---

Dr. Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.

---

Dr. Sergio Granville, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
JUNHO DE 2013

Thomé, Fernanda Souza

Representação de Não-Convexidades no Planejamento da Operação Hidrotérmica utilizando PDDE/Fernanda Souza Thomé. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XIII, 119 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Márcia Helena Costa Fampa

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 113 – 119.

1. Convexificação. 2. Programação Dinâmica Dual Estocástica. 3. Relaxação Lagrangiana. I. Fampa, Márcia Helena Costa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Aos meus pais e irmãs, a quem  
devo todas as minhas conquistas.*

*Ao meu marido Júnior, meu  
companheiro e minha inspiração,  
por todo amor e paciência.*

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a toda a minha família, em especial aos meus pais, minhas irmãs, meu marido, meus sogros, meus cunhados, meus tios e primos que me acompanharam em todos os momentos e cujo apoio, atenção e carinho foram a razão para que muitos obstáculos pudessem ser superados e assim foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

Gostaria de fazer um agradecimento especial ao meu orientador Mario Pereira, cuja relação amigável e profissional ao longo de 12 anos tem minha enorme admiração e representa um papel muito importante em todo o processo de amadurecimento da minha formação, e que levou à elaboração de uma tese a qual tenho muito orgulho de ter desenvolvido. A todos os meus colegas de trabalho e funcionários da PSR, um sincero agradecimento pelas contribuições que direta ou indiretamente foram importantes durante todas as fases deste trabalho. Gostaria de agradecer ao Sergio Granville, Nora Campodónico, Silvio Binato, Luiz Carlos, Rafael Kelman, Raphael Chabar, Luiz Augusto Barroso, Gustavo Voll, Martha Carvalho e Juliana Pontes pelas diversas oportunidades de discussão e aprendizado que foram especialmente relevantes para a minha tese.

À minha orientadora Márcia Fampa gostaria de agradecer pela sua paciência, sua disponibilidade e atenção constantes e suas valiosas colaborações que foram fundamentais ao longo de todos esses anos de relacionamento e trabalho, e que irão se estender para o futuro. Aos professores e funcionários do PESC, ao professor Nelson Maculan, às queridas Fátima, Solange e Cláudia gostaria de agradecer por muitos momentos de extrema boa vontade, simpatia e colaboração que tornaram todo este processo de aprendizado muito mais agradável.

Aos meus amigos Bruno Romanelli, Cecília Cabral, Diogo Gonçalves, Evelinne Varela, Felipe Gullo, Gabriela Saramago, Gustavo Almeida, Gustavo Audi, Gustavo Wo, Ingrid Delpy, João Lobo, Juliana Noronha, Leticia Fonti, Marcos Spiguel, Rafael Diniz e Tissiana Prazeres tenho muito a agradecer pelos constantes incentivos, pelos momentos muito importantes de descontração e todas as demonstrações de carinho. Agradeço à Áldina Souza, Juliana Mayrink, Raphael Neves, Renata Ferreira e Thaisa Neves que me acompanharam de perto e muito me apoiaram especialmente nos momentos mais difíceis durante a finalização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## REPRESENTAÇÃO DE NÃO-CONVEXIDADES NO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA UTILIZANDO PDDE

Fernanda Souza Thomé

Junho/2013

Orientador: Márcia Helena Costa Fampa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta tese descreve a extensão do algoritmo de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) para a representação de não-convexidades no problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, formulado a partir de um modelo multiestágio de programação linear-inteira mista. O objetivo do trabalho consiste na comparação de critérios para a convexificação da função de custo futuro (FCF). Neste contexto é proposta uma metodologia baseada em uma abordagem não-convencional da técnica de relaxação Lagrangeana das restrições recursivas, e aplicação de um novo procedimento de otimização dos multiplicadores, que visa tornar mais eficiente a obtenção de cortes fortes para a aproximação externa da FCF. Ainda que sejam evitados cortes de parte da região viável do problema, as aproximações externas podem conduzir a estratégias muito distorcidas para problemas de natureza altamente não-convexa e, conseqüentemente, resultar em operações não-econômicas ou inadequadas para o sistema. Esta tese propõe ainda uma nova metodologia para obtenção de aproximação convexa mais realista da função de produção de usinas hidrelétricas através de uma transformação não-linear das variáveis de volume em energia. Estudos de casos utilizando sistemas hidrotérmicos reais são usados para comparação dos resultados, permitindo conduzir análises e discussões sobre o dilema da escolha pela metodologia mais adequada para este problema.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NON-CONVEXITIES REPRESENTATION ON HYDROTHERMAL  
OPERATION PLANNING USING SDDP

Fernanda Souza Thomé

June/2013

Advisor: Márcia Helena Costa Fampa

Department: Systems Engineering and Computer Science

This thesis describes an extension of the Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP) algorithm to represent non-convexities on the hydrothermal operation planning problem formulated as a mixed integer multistage stochastic model. The objective of this work consists in a comparison of convexification criteria for constructing the future cost function (FCF) approximation. In this context, a new methodology is proposed based on a non-conventional approach of the Lagrangian relaxation of the recourse constraints, using a special procedure for the multipliers optimization, which aims to improve efficiency in generating stronger cuts for the FCF outer approximation. Although avoiding cutting feasible region of the problem, the outer approximations can lead to distorted strategies for highly non-convex problems and, therefore, result in non-economical or inadequate system operation. This thesis also proposes a new methodology for obtaining a more realistic convex approximation of the hydro production function using a non-linear transformation of storage variables into energy variables. Study cases of real hydrothermal systems are used to make comparisons and analysis over the dilemma of choosing the most suitable methodology for this problem.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Descrição do problema . . . . .	1
1.2 Otimização estocástica . . . . .	3
1.3 Motivação do trabalho . . . . .	7
1.4 Objetivo e contribuições . . . . .	11
1.5 Organização da tese . . . . .	15
<b>2 Planejamento da operação hidrotérmica</b>	<b>17</b>
2.1 Introdução . . . . .	17
2.2 Nomenclatura . . . . .	18
2.3 Descrição do Problema . . . . .	19
2.3.1 Usinas termelétricas . . . . .	19
2.3.2 Usinas hidrelétricas . . . . .	21
2.3.3 Demanda do sistema . . . . .	28
2.3.4 Formulação matemática . . . . .	28
2.4 Algoritmos de solução . . . . .	30
2.4.1 Programação Dinâmica Estocástica . . . . .	31
2.4.2 Programação Dinâmica Dual Estocástica . . . . .	33
<b>3 Critérios de convexificação</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução . . . . .	39
3.1.1 Problema convexo . . . . .	41
3.1.2 Problema de operação hidrotérmica . . . . .	43
3.1.3 Técnicas de convexificação . . . . .	46
3.2 Convexificação da FCF . . . . .	47
3.2.1 Descrição da metodologia . . . . .	47
3.2.2 Algoritmo de convexificação . . . . .	52
3.2.3 Considerações importantes . . . . .	57

3.3	Convexificação do Componente . . . . .	58
3.3.1	Descrição da metodologia . . . . .	58
3.3.2	Formulação matemática . . . . .	61
3.3.3	Considerações importantes . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Metodologia de convexificação da FPH</b>	<b>71</b>
4.1	Introdução . . . . .	71
4.2	Descrição da metodologia . . . . .	72
4.2.1	Transformação de variáveis . . . . .	72
4.2.2	Paralelização da cascata . . . . .	77
4.2.3	Perfil de esvaziamento . . . . .	80
4.3	Formulação matemática . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Estudos de casos</b>	<b>85</b>
5.1	Introdução . . . . .	85
5.1.1	Procedimento de avaliação . . . . .	85
5.1.2	Aproximação da função de produção . . . . .	87
5.2	Sistema de Honduras - Usina El Cajon . . . . .	90
5.2.1	Características do sistema . . . . .	90
5.2.2	Resultados . . . . .	91
5.3	Sistema Brasileiro - Região Sudeste . . . . .	98
5.3.1	Características do sistema . . . . .	98
5.3.2	Resultados . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Considerações finais e trabalhos futuros</b>	<b>107</b>
6.1	Conclusões . . . . .	107
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	110
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>113</b>

# Lista de Figuras

1.1	Processo de decisão sob incerteza . . . . .	2
1.2	Problema de minimização do custo total . . . . .	4
1.3	Construção da FCF por PDE . . . . .	5
1.4	Construção da FCF por PDDE . . . . .	6
1.5	FCF não-convexa . . . . .	7
1.6	Aproximação linear-por-partes não-convexa . . . . .	10
1.7	Critério de Convexificação da FCF . . . . .	12
1.8	Critério de Convexificação do Componente . . . . .	13
2.1	Esquema de operação de usina termelétrica . . . . .	19
2.2	Curva de custo operativo térmico . . . . .	20
2.3	Esquema de operação de usina hidrelétrica . . . . .	22
2.4	<i>Grid</i> de discretização de variáveis de uma função . . . . .	24
2.5	Cobertura do <i>grid</i> de discretização . . . . .	26
2.6	Balço hídrico de usina hidrelétrica . . . . .	27
2.7	Esquema de solução por PDE . . . . .	31
2.8	Esquema de solução por PDDE . . . . .	33
2.9	Extrapolação da FCF para um estado . . . . .	34
3.1	Conjunto convexo versus não-convexo . . . . .	40
3.2	Função convexa versus não-convexa . . . . .	40
3.3	Extrapolação linear para FCF convexa . . . . .	43
3.4	Extrapolação linear para FCF não-convexa . . . . .	45
3.5	Aproximações para FCF não-convexa . . . . .	46
3.6	Aproximação via Convexificação da FCF . . . . .	50
3.7	Envoltória convexa via Convexificação da FCF . . . . .	50
3.8	Esquema de solução via Convexificação da FCF . . . . .	51
3.9	Limites inferiores para cada critério de convexificação . . . . .	61
3.10	Discretização da função não-convexa . . . . .	62
3.11	Aproximação convexa por maximização dos hiperplanos . . . . .	63
3.12	Envoltória convexa da função . . . . .	63

3.13	Eliminação de hiperplanos que não pertencem à envoltória convexa . . . . .	64
3.14	Aproximação linear-por-partes convexa . . . . .	65
3.15	Aproximação convexa da função custo térmico . . . . .	67
3.16	Esquema de solução via Convexificação do Componente . . . . .	69
4.1	Fator de produção em função do volume armazenado . . . . .	74
4.2	Fator de produção em função da energia armazenada . . . . .	75
4.3	Aproximação exata para FCF sem cascata . . . . .	76
4.4	Representação paralela de usinas em cascata . . . . .	77
4.5	Transformação de variáveis de armazenamento . . . . .	79
4.6	Relação biunívoca de transformação . . . . .	79
4.7	Perfil de esvaziamento dos reservatórios . . . . .	81
4.8	Aproximação da função do fator de produção . . . . .	82
4.9	Aproximação da relação de transformação . . . . .	83
5.1	Avaliação dos critérios de convexificação . . . . .	86
5.2	Discretização uniforme x não-uniforme das variáveis . . . . .	88
5.3	Distorções devido às discretizações . . . . .	89
5.4	Usina hidrelétrica El Cajón - Honduras . . . . .	90
5.5	Fator de produção da usina El Cajón . . . . .	91
5.6	Discretização da função de produção da usina El Cajón . . . . .	92
5.7	Tempo de execução total - Honduras . . . . .	96
5.8	Valor esperado do custo operativo - Honduras . . . . .	97
5.9	Região SE/CO do Sistema Elétrico Brasileiro . . . . .	98
5.10	Topologia hidráulica do Sudeste Brasileiro . . . . .	99
5.11	Discretização da função de produção da usina de Furnas . . . . .	100
5.12	Discretização da função de produção da usina de M.Moraes . . . . .	101
5.13	Perfil de esvaziamento das usinas do Sudeste Brasileiro . . . . .	102
5.14	Tempo de execução total - Sudeste Brasileiro . . . . .	104
5.15	Valor esperado do custo operativo - Sudeste Brasileiro . . . . .	105
5.16	Valor esperado do custo marginal de operação - Sudeste Brasileiro . . . . .	106

# Lista de Tabelas

5.1	Dados operativos da usina El Cajón - Honduras . . . . .	93
5.2	Dados operativos das térmicas fictícias - Honduras . . . . .	93
5.3	Resultados do cálculo da política operativa - Honduras . . . . .	94
5.4	Resultados da simulação operativa - Honduras . . . . .	94
5.5	Dados do Sistema Sudeste Brasileiro . . . . .	99
5.6	Resultados do cálculo da política operativa - Sudeste Brasileiro . . . .	102
5.7	Resultados da simulação operativa - Sudeste Brasileiro . . . . .	103

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Descrição do problema

Um sistema hidrotérmico de geração de energia é composto por usinas termelétricas e hidrelétricas responsáveis pelo atendimento da demanda de um mercado consumidor.

O processo de geração de energia termelétrica é baseado na transformação de energia térmica em energia mecânica para a movimentação de uma turbina acoplada a um gerador, e então transformada em energia elétrica. Os custos operativos associados a uma usina termelétrica estão relacionados ao tipo de combustível que a usina utiliza e na forma como esse é consumido.

O Brasil é um país onde a energia termelétrica corresponde a uma parcela pequena da produção total, dada à abundância de aproveitamentos de recursos hidráulicos. Dados atuais<sup>1</sup> apontam que, aproximadamente, 82% da produção de geração do país são de origem hidrelétrica e 17% de origem termelétrica, sobrando 1% que se divide em outras fontes renováveis de energia como biomassa, eólica, etc. Diversos países ao redor do mundo também dependem da hidroeletricidade como principal fonte de energia. A hidroeletricidade é uma fonte limpa de energia a um custo imediato de produção praticamente nulo.

O processo de geração de energia hidrelétrica baseia-se na transformação de energia potencial hidráulica em energia elétrica. As usinas hidrelétricas aproveitam a diferença de energia potencial existente entre o nível de água de montante e o de jusante, obtida a partir do armazenamento de água em reservatórios que, por sua vez, é conseguido através da construção de obras de represamento. Os reservatórios, conforme sua capacidade de armazenamento de água, possibilitam a regularização de rios. Como a flutuação de vazão de água em um rio, em condições naturais, raramente coincide com a flutuação da necessidade de uso da água, inclusive para a produção de energia elétrica, esta regularização é, em geral, extremamente benéfica.

---

<sup>1</sup>fonte: <http://www.ons.org.br/>

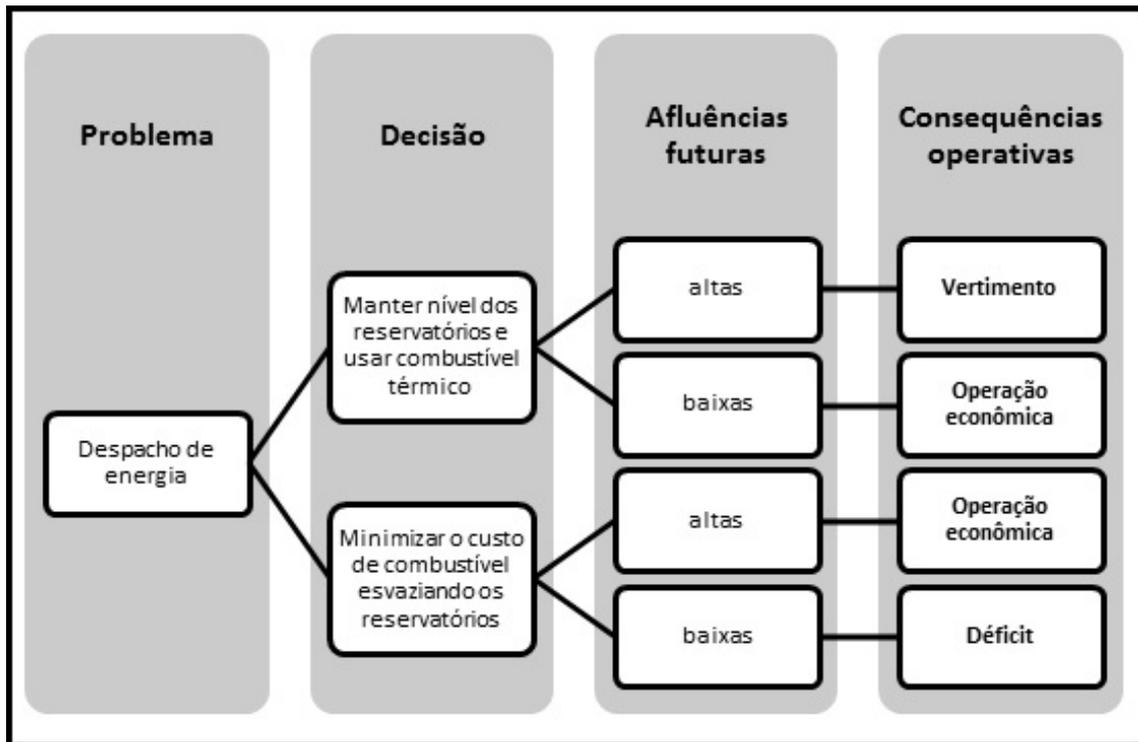


Figura 1.1: Processo de decisão sob incerteza

Os reservatórios que têm grande capacidade de estocar energia na forma de água armazenada, permitem transferir energia de um período de chuvas para um período de estiagem e assim reduzir os custos associados ao consumo de combustível pelas usinas térmicas e, em casos extremos, evitar racionamentos de energia.

O objetivo do problema de programação da operação hidrotérmica consiste em determinar a política operativa ótima para a utilização dos recursos hídricos e térmicos tal que minimize o custo esperado total para o atendimento da demanda de eletricidade de um sistema em um determinado horizonte de tempo. Estão incluídos nestes custos basicamente os gastos com os combustíveis das usinas termelétricas e os custos de não atendimento à demanda.

Os sistemas hidrotérmicos são caracterizados principalmente pelas incertezas associadas às vazões afluentes, devido à imprevisibilidade das mesmas, e o acoplamento temporal das decisões operativas, uma consequência da existência de limites de armazenamento dos reservatórios. Neste contexto, a programação da operação pode ser vista como um processo de decisão de um planejador pelo uso da água no estágio corrente (reduzindo o custo imediato de geração e levando a um possível racionamento de energia no futuro se ocorrer um período seco) ou armazenamento da água para uso nos estágios futuros (aumentando o custo imediato e levando a possível vertimento no futuro se ocorrer um período úmido), conforme ilustrado na figura 1.1.

## 1.2 Otimização estocástica

As vazões afluentes por sua vez, apesar de incertas, não são totalmente aleatórias uma vez que existem padrões sazonais e dependência em relação a vazões anteriores. Por estas razões, métodos de otimização estocástica podem ser aplicados sob a suposição de que a real distribuição das vazões pode ser adequadamente aproximada por uma distribuição conhecida. De fato, metodologias de programação estocástica têm sido aplicadas há mais de 30 anos e consolidaram-se como as ferramentas utilizadas para problemas de planejamento da operação hidrotérmica.

Um levantamento da literatura em algoritmos de planejamento da operação hidrotérmica até meados dos anos 80 foi realizado por Yeh [70]. Desde essa época, muitas contribuições significativas foram feitas nesta área. A pesquisa feita por Labadie [35] em 2004 cobre uma grande variedade de modelos e métodos de solução com diferentes abordagens para a incorporação de incertezas nas vazões afluentes em problemas de otimização multi-reservatório. Problemas discretos, não-lineares e multi-objetivo são discutidos ao lado dos modelos lineares. Wallace e Fleten [67] apresenta uma revisão de modelos genéricos de programação estocástica aplicados a problemas de energia.

Existem diferentes formas de formular problemas de programação estocástica. Quando modelados por problemas determinísticos equivalentes, um conjunto de cenários é definido, constituído por sequências de realizações das variáveis aleatórias do modelo. Os cenários e suas probabilidades associadas são incorporados na formulação de um grande problema determinístico. A vantagem deste tipo de formulação é que estes problemas podem ser solucionados a partir de técnicas de otimização determinística [68], entretanto, de maneira a capturar a natureza aleatória de um problema prático multi-estágio, geralmente é necessária a modelagem de um grande número de cenários, resultando em problemas de dimensões computacionalmente intratáveis [24], [55].

Pesquisas em algoritmos de programação estocástica têm se concentrado em métodos que visam acomodar um grande número de cenários de forma que aplicações realistas possam ser atendidas. Técnicas de decomposição têm sido particularmente relevantes para problemas estocásticos multi-estágio, pois a ideia de resolver uma série de problemas menores no lugar de um único grande problema, passou ser computacionalmente atraente.

Uma revisão sobre as técnicas de programação dinâmica (PD) para gerenciamento de recursos hídricos foi apresentada por Lamond e Boukhtouta [36] em 1996. As metodologias de PD se baseiam em um procedimento de decomposição do problema multi-estágio em soluções recursivas de problemas de um único estágio [5] para a construção de aproximações das chamadas funções de custo futuro (FCF)

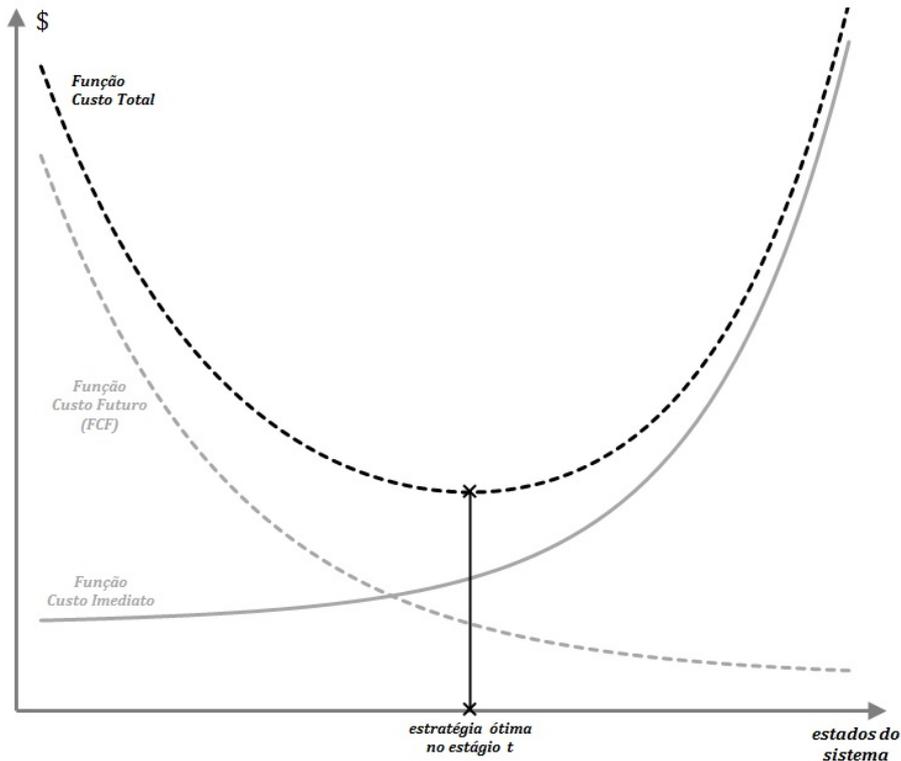


Figura 1.2: Problema de minimização do custo total

que estabelecem, para cada estado do sistema, o valor esperado do custo futuro associado à melhor decisão operativa imediata. A figura 1.2, utilizada para ilustrar o problema de minimização do custo total associado ao problema de um estágio  $t$ , destaca a necessidade de adoção de um critério para a aproximação da função de custo futuro a ser considerada no cálculo da estratégia ótima de operação.

A literatura, até os anos 80, esteve direcionada em métodos de programação dinâmica estocástica (PDE) que sugerem discretização das variáveis de estado e solução do problema de um determinado estágio para cada combinação dessas variáveis, conforme a FCF ilustrada na figura 1.3. Estes métodos, apesar de apresentarem aspectos bastante robustos, por exemplo, ao permitirem a representação de modelos não lineares complexos para a representação do sistema, sofrem da chamada maldição da dimensionalidade devido ao crescimento exponencial do espaço de estados com o número de variáveis discretizadas. Isto significa que a solução de problemas de operação hidrotérmica, mesmo sendo de pequeno/médio porte, frequentemente torna-se impraticável com a aplicação destes métodos.

As primeiras pesquisas em métodos de PDE foram desenvolvidas por Hall e Buras [30], Buras [12], e Turgeon [63], [64]. Revisões na literatura foram feitas por Yakowitz [69], Yeh [70], e Stedinger [32]. Uma revisão um pouco mais recente dos métodos de PDE, suas aplicações e comparações com outras abordagens em programação estocástica foi realizada por Sahinidis [50]. Uma profunda discussão sobre aspectos

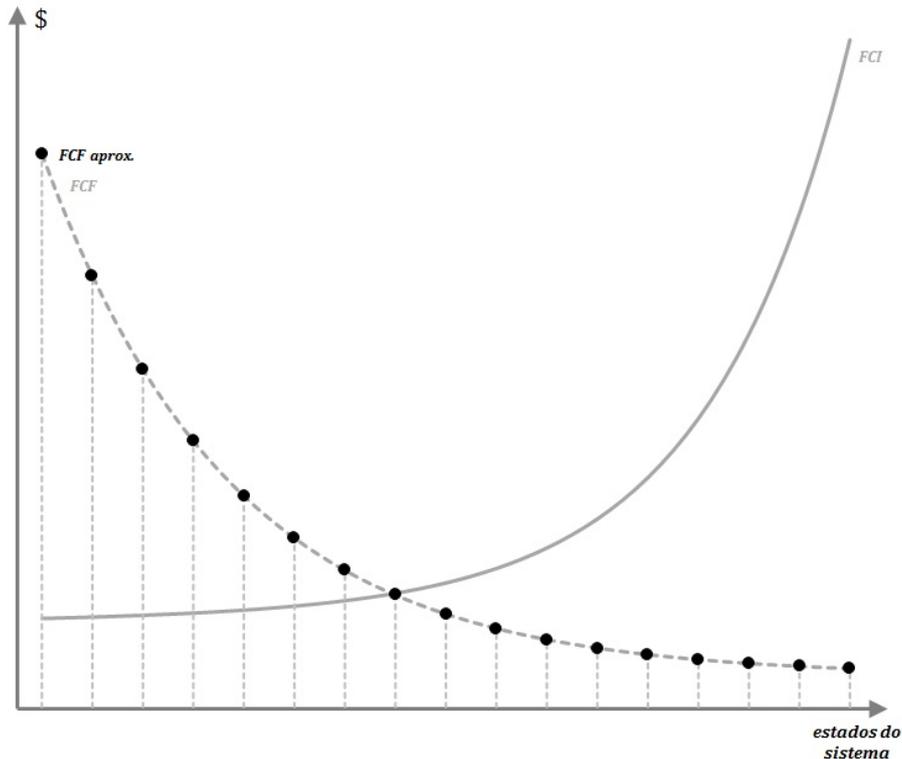


Figura 1.3: Construção da FCF por PDE

computacionais de métodos de PDE foi apresentada por Hanson [31], onde destaque especial foi dado às técnicas computacionais para superar o problema de maldição da dimensionalidade através de grid computing, paralelismo e aprimoramento de estrutura de dados.

Com o objetivo de efetivamente solucionar o problema de maldição da dimensionalidade, deu-se origem a uma sucessão de pesquisas baseadas em métodos de decomposição de Benders multi-estágio [8]. Dentre elas estão os artigos de Pereira e Pinto [46], Jacobs et al. [33] e Morton [40], enquanto Vel'asquez et al. [65] apresentaram uma modificação do algoritmo de programação dinâmica dual de Pereira e Pinto para o caso multi-estágio. A maldição da dimensionalidade foi finalmente superada pelo método de programação dinâmica dual estocástica (PDDE) desenvolvido por Pereira [45] e Pereira e Pinto [47].

O algoritmo de PDDE utiliza a técnica de decomposição de Benders para separar o problema original em problemas de um estágio e iterativamente construir aproximações das funções de custo futuro como funções lineares por partes, como mostra a figura 1.4. Esta metodologia torna dinâmico o processo de discretização do espaço de estados e possibilita a geração de limites para a solução ótima do problema, eliminando assim todas as desvantagens associadas aos métodos de PDE.

Atualmente, a PDDE é uma metodologia consolidada e considerada o estado-da-arte na solução de problemas de planejamento da operação hidrotérmica.

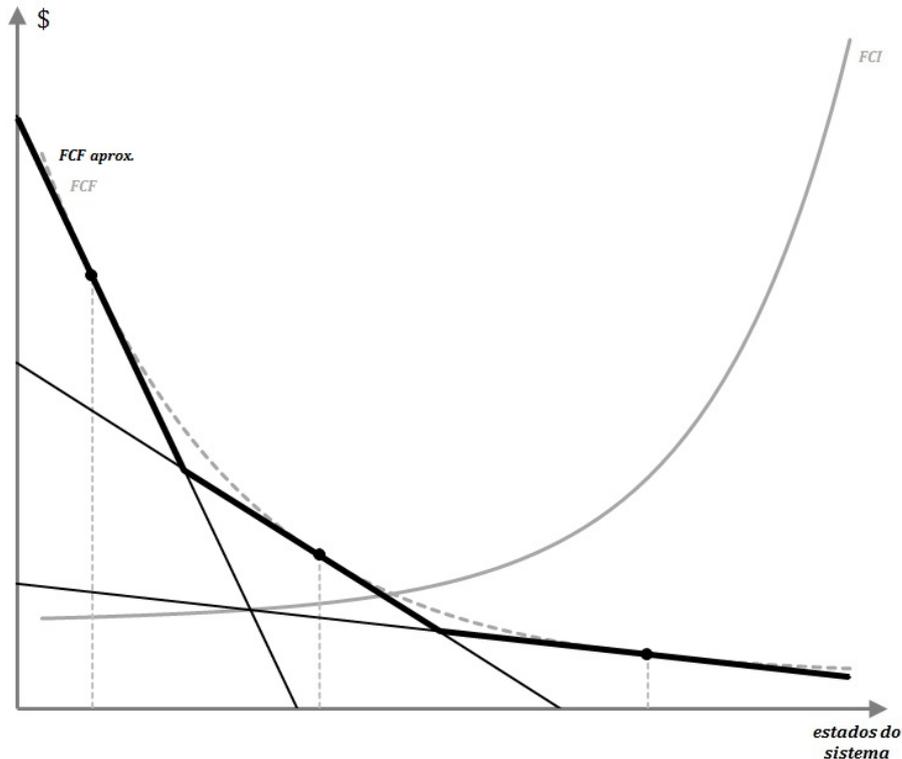


Figura 1.4: Construção da FCF por PDDE

É extensivamente utilizada em estudos de operação e centros de despacho em mais de 30 países em todo o mundo, nos cinco continentes, incluindo América do Sul, Centroamérica e América do Norte, Áustria, Espanha, Noruega, Turquia, Nova Zelândia e China. Em 2008, Maceira et al. [38] apresentou a história de 10 anos de sucesso da metodologia no sistema brasileiro.

Existem diversos registros sobre algoritmo de PDDE na literatura baseados na publicação original de Pereira [45] e Pereira e Pinto [47], dentre eles estão as publicações de Oliveira et al. [44], Tilmant e Kelman [62], Gjelsvik et al. [27], e Bezerra et al. [9]. Além disso, a documentação da ferramenta de otimização hidrotérmica desenvolvida pela empresa PSR<sup>2</sup> e batizada com o próprio nome do algoritmo (em inglês, SDDP) apresenta detalhados aspectos da modelagem [2]. A versão original do algoritmo de PDDE conduziu a uma corrente de pesquisas que introduziram diversas extensões, aprimoramentos e variações da metodologia.

Embora essas variações do algoritmo considerem diferentes níveis de detalhamento na modelagem dos sistemas, como a metodologia é baseada em um processo iterativo de adição de planos cortantes, ou cortes de Benders, todos estes modelos compartilham do fato de utilizarem modelagens convexas para os problemas a serem resolvidos. Esta é a principal limitação do algoritmo de PDDE e é necessária para garantir o critério de convergência, caso contrário, a aplicação

<sup>2</sup><http://www.psr-inc.com>

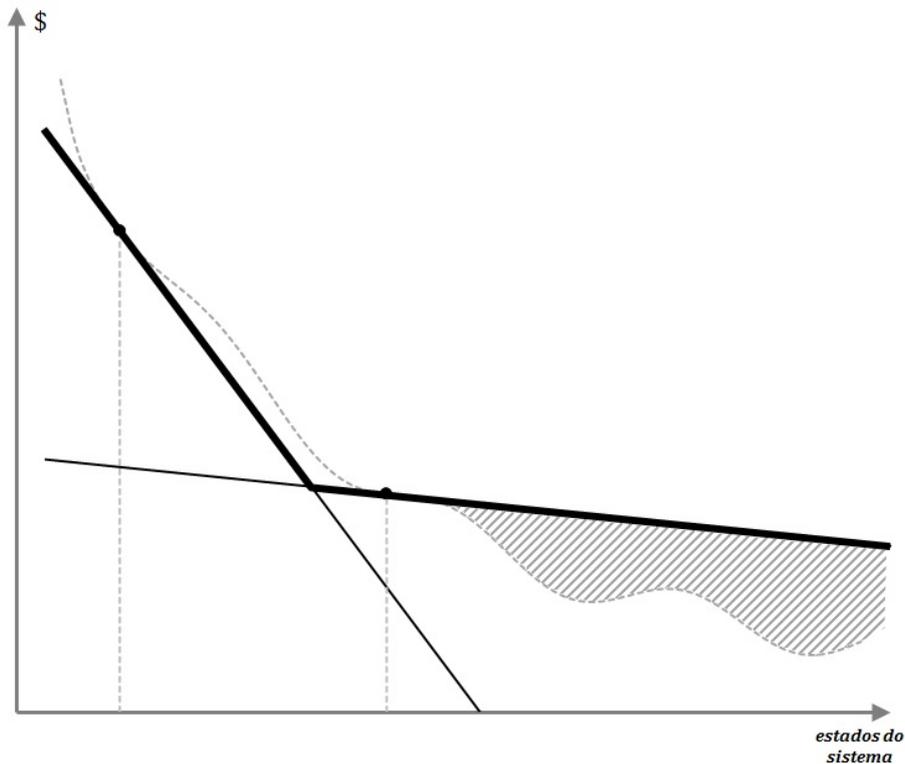


Figura 1.5: FCF não-convexa

do método de decomposição de Benders [25] pode levar à geração de cortes que excluem grande parte da região viável do problema, conforme mostrado na figura 1.5. Observa-se que, ainda que a função original seja moderadamente não-convexa, este procedimento pode levar à construção de aproximações muito distorcidas e, conseqüentemente, resultar em políticas muito descoladas da realidade, tornando não-econômica a operação do sistema.

### 1.3 Motivação do trabalho

Diversos componentes de um sistema hidrotérmico de energia estão sujeitos a princípios físicos os quais tornam a modelagem da programação da operação um problema não-convexo. Podemos citar como exemplos:

- A produção de energia de um gerador hidráulico, que é dada pelo produto de um fator de produção, função não-linear da altura de queda líquida do reservatório, e do turbinamento da usina;
- A programação do despacho das usinas, tanto térmicas quanto hidrelétricas, também conhecida como "unit commitment", que é associada a decisões discretas de partida e parada dos geradores;
- O modelo de fluxo de potência ótimo CA; entre outros.

Como os efeitos relacionados a estas não-convexidades podem ser menos ou mais significativos de acordo com a aplicação do problema, tanto o algoritmo de solução adotado, quanto o nível de precisão na representação dos componentes do sistema, podem variar de maneira a atender à relação mais adequada entre esforço computacional, consistência técnica e qualidade dos resultados obtidos. Ao lidar com o problema de planejamento da operação hidrotérmica para médio prazo, por exemplo, o uso de modelos muito simplificados, apesar de acelerarem a solução do problema, podem acabar resultando em estratégias de operação inadequadas, o que significa um mau gerenciamento dos níveis de armazenamento dos reservatórios.

Tradicionalmente, a variabilidade da função de produção hidrelétrica (FPH) com a altura de queda líquida somente pode ser desconsiderada quando os efeitos sobre a operação do sistema forem muito pequenos, para o tipo de estudo realizado, e a produção de energia pode ser função somente do turbinamento da usina. A representação mais detalhada dessas funções tem sido alvo constante de diversas linhas de pesquisa, onde buscam-se, geralmente, modelos de operação hidrotérmica que melhor relacionam elevada precisão e esforço computacional reduzido.

Na literatura existe uma coleção de publicações com diferentes tipos de abordagens para a representação da FPH. Uma revisão recente foi elaborada por Diniz e Maceira [19], incluindo trabalhos que apresentam modelos para funções lineares, lineares por partes, quadráticas e quadráticas por partes.

A modelagem da FPH utilizada por Li et al. [37], em 1997, e Chang et al. [17], em 2001, utiliza uma representação linear por partes em função da vazão defluente das usinas, sem considerar efeitos de variações de altura de queda. No entanto, perdas hidráulicas são consideradas proporcionais à vazão turbinada por Chang et al. [17] e desconsideradas por Li et al. [37].

Soares e Salmazo [57], em 1997, deram atenção especial à representação das curvas de eficiência de geração hidrelétrica, considerando as perdas ocasionadas pela elevação do nível de canal de fuga, as perdas no sistema de adução e aquelas associadas à diminuição do rendimento do conjunto turbina-gerador.

Em 1999, Guan et al. [29] e Ni et al. [41], consideraram a presença de zonas proibidas de geração hidráulica, contudo, as unidades geradoras são agregadas em uma unidade equivalente. Enquanto Guan et al. [29] consideram altura de queda constante, Ni et al. [41] modelam como função linear do volume de água no reservatório e a potência de saída, por sua vez, como função quadrática da vazão defluente, desconsiderando perdas hidráulicas e assumindo rendimentos constantes.

Em 2000, Shawwash et al. [53] consideraram que as funções de produção das unidades hidrelétricas são modeladas por uma família de funções lineares por partes, permitindo a representação de variações de altura de queda, vazão defluente e disponibilidade das unidades e desconsiderando as perdas hidráulicas.

Em 2002, Arce et al. [4] mostraram uma aplicação para o despacho ótimo de unidades geradoras da usina de Itaipú, onde foi apresentada uma metodologia para quantificação das perdas no sistema de geração, levando em consideração a elevação do nível de canal de fuga, o atrito do fluxo d'água pelo sistema de adução e as variações do rendimento do conjunto turbina-gerador.

Em 2003, Soares et al. [58] utilizaram uma modelagem do sistema de geração onde consideram constante o nível à montante do reservatório, entretanto o nível de jusante e as perdas hidráulica são modeladas como função da vazão turbinada de cada unidade geradora. Belloni et al. [6] apresentaram um modelo onde as funções de produção das unidades hidrelétricas são funções lineares por partes convexas que dependem da vazão turbinada na usina, nível de armazenamento dos reservatórios e da vazão vertida. Ainda em 2003, Borghetti et al. [10] utilizaram uma representação linear da função de produção hidrelétrica em função da vazão turbinada, altura de queda e do rendimento das unidades. Mais recentemente, em 2008, Borghetti et al. [11] apresentaram uma representação linear por partes da função com incorporação de variáveis binárias.

O trabalho de Finardi e Silva [22], em 2006, considerou uma modelagem detalhada da função de produção de natureza não-linear e propõem uma formulação que considera os efeitos do nível de jusante, da altura de queda, perdas hidráulicas e zonas proibidas de geração.

Cunha et al. [18] mostraram, em 1997, que a consideração da variação da produtividade das usinas hidroelétricas permite uma expressiva melhoria na modelagem do problema de otimização energética do sistema elétrico brasileiro em relação à consideração de uma produtividade média constante. Neste trabalho a FPH foi modelada como uma função linear por partes variando com o volume armazenado e defluência total, correspondente à soma das vazões turbinada e vertida. Em 2004, Diniz et al. [20] apresentaram um aprimoramento da formulação de modo a considerar explicitamente a vazão vertida na construção da FPH, o que permitiu uma melhor representação da geração das usinas hidrelétricas, em particular nas situações em que ocorrem grandes vertimentos.

As funções lineares por partes são tradicionalmente utilizadas para aproximação suave de funções não-lineares. A função original é calculada para um determinado número de pontos de um grid e utiliza-se interpolação linear entre estes pontos para obter a aproximação. Desta maneira, qualquer problema de programação não-linear, inclusive os problemas não-convexos, que possuem restrições que podem ser expressas como somas de funções não-lineares de no máximo duas variáveis, podem ser eficientemente aproximados por problemas de programação linear-inteira mista (PLIM) [28]. A figura 1.6 mostra um exemplo de aproximação de uma função não-convexa de uma variável como uma função linear por partes.

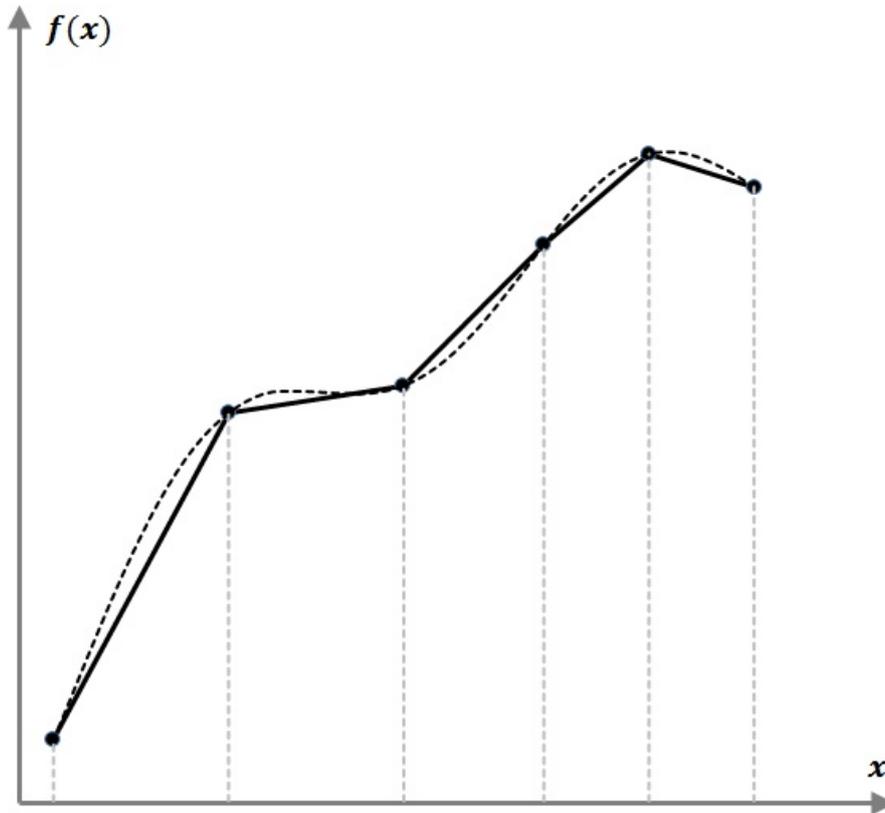


Figura 1.6: Aproximação linear-por-partes não-convexa

A incorporação de variáveis inteiras, seja para a representação de funções lineares por partes, para as decisões de unit commitment ou qualquer outra fonte de não-convexidade, tornam muito mais difícil a solução de um problema multi-estágio de natureza estocástica linear-inteira mista (PELIM). Recentemente, progresso tem sido feito para solucionar estes problemas e suas aplicações em sistemas de potência. Na teoria, estes problemas podem ser escritos como grandes problemas determinísticos equivalentes inteiros e algumas técnicas de solução encontradas na literatura podem ser empregadas, tais como: métodos de branch and bound estocástico [42], [3]; métodos de decomposição de cenários [13], [48], [60]; métodos de decomposição de dois estágios [14], [49], [43], [56]. Uma pesquisa sobre métodos de programação estocástica multi-estágio inteira foi conduzida pelo grupo de Schultz e Sem [51], [52]. No entanto, casos práticos destes problemas geralmente excedem qualquer capacidade computacional de *hardware* e *software* para solucioná-los.

É por esta razão que o algoritmo de PDDE é uma referência para a solução dos problemas de operação hidrotérmica, pois incorpora de maneira eficiente a representação das incertezas hidrológicas. Neste contexto, a adoção do algoritmo de PDDE na solução de problemas não-convexos, visando a representação mais realista do sistema, torna indispensável a utilização de técnicas especializadas para a construção de aproximações convexas das FCF, resultando em políticas operativas

mais adequadas para o sistema.

As FCFs determinam a política ótima de gerenciamento dos reservatórios hidráulicos e, portanto, cada método de convexificação selecionado resulta em uma estratégia diferente de operação, de acordo com a aproximação obtida. Por esse motivo, estes métodos estão em constante aperfeiçoamento, não apenas para garantir as melhores aproximações, como também para permitir representações ainda mais detalhadas do sistema através da incorporação de diversas fontes de não-convexidade ao problema.

## 1.4 Objetivo e contribuições

Esta tese tem como objetivo descrever, comparar e desenvolver técnicas de convexificação para a construção de aproximações das funções de custo futuro, permitindo a extensão do algoritmo de PDDE para a representação de não-convexidades no problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. Neste trabalho, as técnicas de convexificação são classificadas segundo dois critérios: o primeiro critério está associado à construção da função de custo futuro convexa a partir dos cortes obtidos com a relaxação Lagrangeana da formulação não-convexa do problema (Convexificação da FCF), e o segundo critério está associado à convexificação do modelo dos componentes do sistema, resultando em um problema convexo, cujos cortes constroem aproximação convexa para a função de custo futuro (Convexificação dos Componentes). De maneira mais específica:

### Convexificação da FCF

A representação não-convexa dos componentes do sistema, por exemplo, da variabilidade do fator de produção hidrelétrico e das decisões de unit commitment, são mantidas na formulação do problema e a técnica de relaxação Lagrangeana é aplicada após a solução deste problema para obtenção de cortes que dão origem a uma aproximação convexa da FCF. Ao contrário da aplicação tradicional, para a solução de problemas complexos, nesta abordagem a técnica é utilizada para a relaxação das restrições que possuem as variáveis de estado do problema, isto é, aquelas cujas variáveis duais associadas, na solução ótima, são usadas para calcular os coeficientes dos cortes de Benders [26], [23]. A solução de cada problema relaxado e o vetor de multiplicadores de Lagrange associado são usados então para obtenção de cortes inferiores que aproximam externamente a função original. Desta forma, o uso de técnicas de otimização destes multiplicadores permitem a construção de aproximações mais próximas à envoltória convexa da função. A figura 1.7 ilustra a

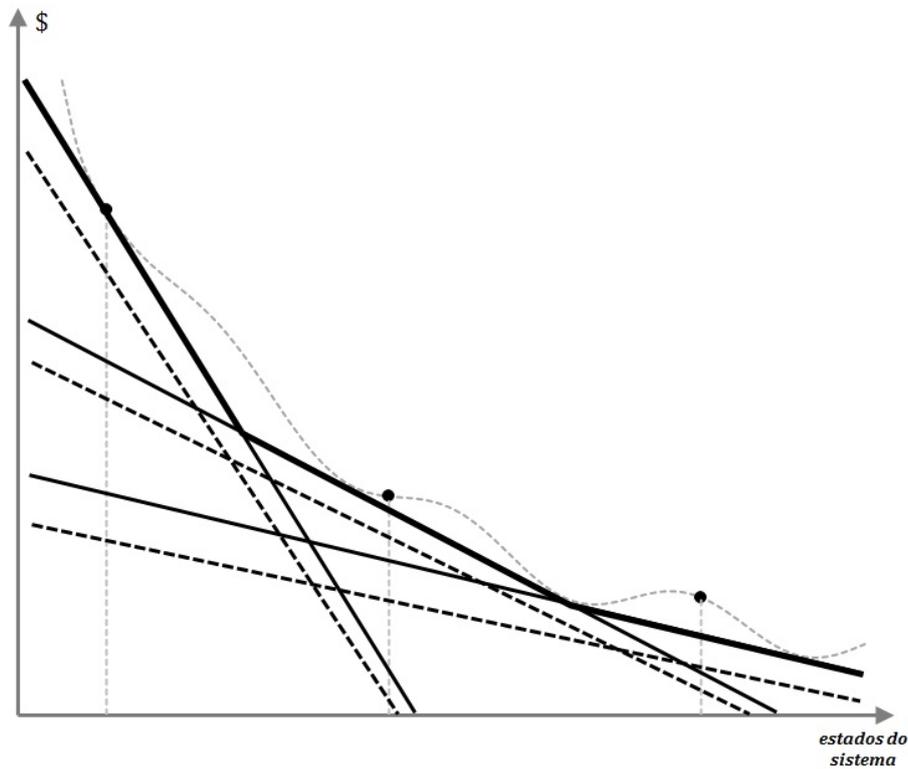


Figura 1.7: Critério de Convexificação da FCF

construção de aproximação convexa segundo o critério de convexificação da FCF.

### Convexificação do Componente

A formulação original do problema é substituída a priori por uma aproximação convexa das funções que modelam os componentes não-convexos do sistema. Estes métodos têm como principal característica, concentrar todo o esforço de convexificação uma única vez, antes da aplicação do algoritmo de PDDE. Dentre as técnicas mais comumente utilizadas estão a substituição das funções não-convexas do problema por funções lineares por parte convexas, normalmente obtidas através de algoritmos de cálculo de hiperplanos tangentes, ou substituição por modelo de envelope de McCormick [39]. Como as aproximações externas dos componentes podem tornar a solução do problema muito otimista, esta abordagem considera a possibilidade de realização de ajustes destas funções para minimização do erro médio de aproximação. Por essa razão, a aproximação resultante para a FCF, geralmente, não é inferior à função original. A figura 1.8 ilustra a obtenção da aproximação convexa da FCF segundo o critério de convexificação do Componente.

Como é possível notar a partir das figuras 1.7 e 1.8, para ambos os critérios de convexificação da FCF, a existência de *gaps* em relação à função aproximada, devido à não-convexidade do problema, faz com que o critério de convergência do

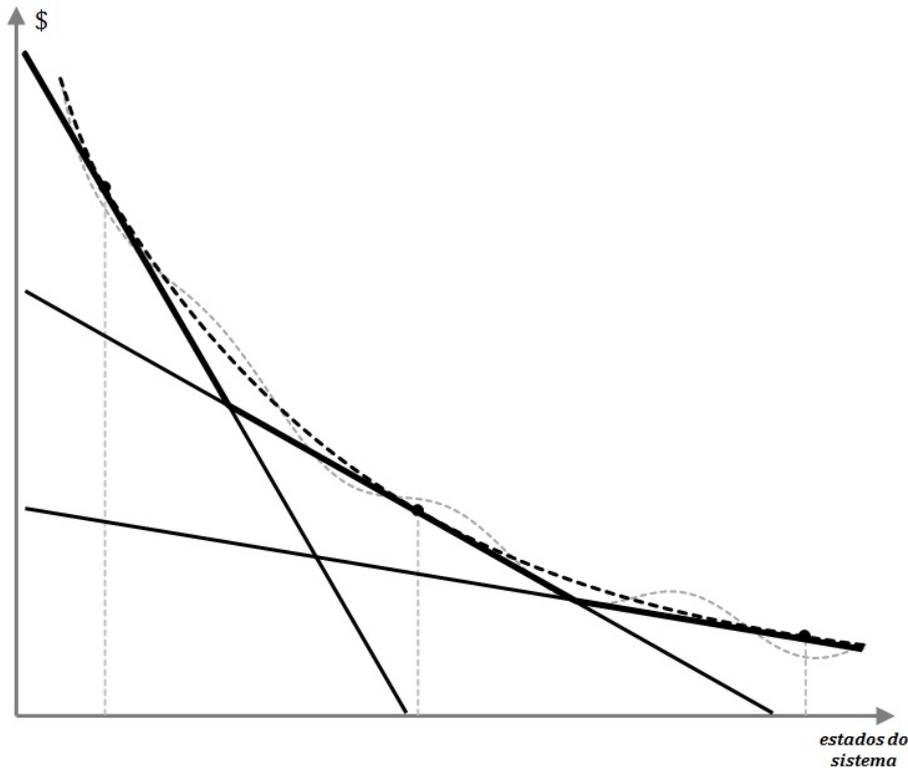


Figura 1.8: Critério de Convexificação do Componente

algoritmo de PDDE deixe de ser garantido, o que a princípio não impossibilita a aplicação do algoritmo. A única inconveniência consiste, no entanto, na distorção que é introduzida na política operativa resultante, que pode ser muito elevada se o problema for altamente não-convexo. Isto significa que estamos assumindo que as não-convexidades associadas à operação de sistemas hidrotérmicos são, em geral, "bem comportadas" o que permite a aplicação bem sucedida dos critérios discutidos neste trabalho. Apesar de restritiva, esta é uma suposição que, na prática, é bastante razoável dada a natureza moderadamente não-convexa normalmente considerada para os componentes representados neste problema.

Cada um dos critérios de convexificação abordados tem suas vantagens e desvantagens associadas: o primeiro, Convexificação da FCF, garante que a aproximação obtida para a FCF é também externa e, portanto, garante-se que não existe corte de parte da região viável do problema. Entretanto, para os problemas que apresentam não-convexidades mais fortes, esta aproximação pode nunca vir a ser próxima o suficiente da função original em determinadas regiões do domínio da função, tornando muito otimista a política operativa resultante. O segundo critério, Convexificação do Componente, tem como principal vantagem utilizar representações mais realistas do comportamento dos componentes do sistema mas, uma vez que não se trata necessariamente de uma aproximação externa, então não se pode garantir a otimalidade da solução devido a possíveis cortes da região viável

do problema.

Uma propriedade interessante da abordagem de Convexificação da FCF está relacionada ao fato de se tratar de uma aplicação não-convencional da técnica de relaxação Lagrangeana uma vez que não está sendo utilizada para efetivamente resolver o problema original, mas para gerar cortes para a aproximação convexa da FCF. Portanto, isto significa que os valores para os multiplicadores de Lagrange, na prática, não precisam necessariamente ser ótimos para que os cortes ainda sejam válidos. De qualquer forma, como são estes multiplicadores que definem a inclinação dos cortes, então existe uma forte motivação para se buscar valores próximos ao ótimo e obter, assim, melhores aproximações. Na literatura são encontradas diversas técnicas para a otimização dos multiplicadores de Lagrange, incluindo métodos de proximal bundle [21], sequential refinement [34], ascending directions [7] e outer-approximations [15]. Em geral, estes métodos compartilham da necessidade de um número grande de iterações para convergirem. Quando incorporado em um esquema de solução com PDDE, o procedimento de otimização dos multiplicadores é aplicado para cada um dos problemas de cada iteração de PDDE, o que torna ainda mais crucial o uso de algoritmos eficientes.

O uso da relaxação Lagrangeana para obtenção dos cortes de Benders é proposta em [16] e [15] considerando uma formulação disjuntiva de envelope de McCormick, entretanto estes trabalhos desprezaram a otimização dos multiplicadores de Lagrange e utilizaram uma versão simplificada do método de PDDE, considerando uma pequena árvore de cenários para modelar as incertezas hidrológicas. Uma contribuição significativa apresentada nesta tese consiste na incorporação de um novo algoritmo eficiente para a busca de multiplicadores de Lagrange em uma abordagem de Convexificação da FCF. Baseado no fato de que cada problema PLIM de um estágio é, na prática, relativamente simples de ser resolvido, então o algoritmo usa a solução ótima do problema original para dois propósitos: permitir a construção de um problema localmente convexificado, cujas variáveis duais constituem uma boa condição inicial para os valores dos multiplicadores de Lagrange; e obter o melhor limite inferior para o cálculo do passo usado na atualização dos multiplicadores durante o procedimento iterativo de busca.

É importante ressaltar que, para fins de comparações entre as metodologias de convexificação, este trabalho não se preocupa em estabelecer o melhor nível de detalhamento para a representação dos componentes do sistema, o que depende fundamentalmente das características do sistema e do escopo do estudo a ser realizado, ficando a critério do planejador definir a modelagem mais adequada para o seu problema. No entanto, é levada em consideração a importância da representação da variabilidade das capacidades de geração hidrelétrica em um problema de operação de sistemas cuja parcela de geração dessas usinas é muito

expressiva. Neste contexto, também constitui uma contribuição deste trabalho a proposta de uma nova metodologia de Convexificação do Componente, esta baseada no trabalho de Suanno [59], onde a não-convexidade do problema é eliminada através de transformação de variáveis de volume de água em energia armazenada. Ao contrário do método original, a metodologia proposta permite a representação da variabilidade do fator de produção de usinas hidrelétricas em cascata, o que consistia na principal limitação do modelo. Este aperfeiçoamento foi viabilizado graças à incorporação de uma modelagem aproximada de paralelização do sistema hidrelétrico, obtida a partir de uma técnica de decomposição espacial da cascata.

Para a formulação do problema de operação, este trabalho utiliza um modelo PLIM, onde a função de produção hidrelétrica é modelada como uma restrição bi-linear representada por uma aproximação linear por partes, com precisão melhorada pela incorporação das variáveis binárias. O cálculo da política operativa ótima considera uma extensão do algoritmo de PDDE para a construção das aproximações convexas das FCFs, de acordo com o critério de convexificação escolhido. Entretanto, não existe uma maneira direta de avaliar qual critério pode levar aos melhores resultados: aquele que garante aproximação externa e, portanto, não corta região viável do problema, ou aquele que minimiza o erro médio da aproximação? Para comparar os resultados obtidos para cada política são feitas simulações operativas considerando o modelo PLIM, que melhor representa o comportamento real do sistema.

O trabalho [61] apresentou as metodologias propostas nesta tese e alguns resultados preliminares que serão discutidos detalhadamente ao longo deste trabalho.

## 1.5 Organização da tese

Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentada a formulação do problema de operação hidrotérmica como um modelo de programação linear-inteira mista onde são levadas em consideração restrições de atendimento à demanda, balanço hídrico por usina, limite de capacidade de produção hidrelétrica considerando função não-convexa da altura de queda líquida e defluência da usina e decisões binárias de unit commitment para representar o acionamento de usinas térmicas.

No capítulo 3 são discutidos os dois critérios para a construção das aproximações das FCFs. Na primeira parte é abordado o critério de Convexificação da FCF utilizando a aplicação da técnica de relaxação Lagrangeana nas restrições que contém variáveis de estado do problema. Nesta seção é apresentada uma proposta de aperfeiçoamento desta técnica com a incorporação de uma estratégia de busca eficiente para cálculo dos multiplicadores de Lagrange. Na segunda seção aborda-se

a Convexificação dos Componentes, critério tradicionalmente adotado utilizando substituição das não-linearidades por funções lineares por partes convexas. Uma análise é feita comparando-se os dois critérios em relação à obtenção dos cortes mais fortes que, conseqüentemente, geram melhores aproximações.

O capítulo 4 apresenta a proposta de uma nova metodologia, enquadrada no critério de Convexificação dos Componentes, para aproximação da função de produção hidrelétrica através da reformulação do problema de operação hidrotérmica usando a transformação de variáveis de volume de água em energia armazenada. Neste capítulo mostra-se que, de maneira a permitir a representação da variabilidade dessas funções nas usinas a jusante em uma cascata, pode-se utilizar um procedimento heurístico para aproximação das relações entre variáveis.

No capítulo 5 são mostrados os resultados obtidos para cada uma das metodologias apresentadas neste trabalho. Utilizando dois casos de sistemas hidrotérmicos reais, porém com características diferentes, foram comparadas as estratégias de convexificação a partir das simulações operativas para cada uma das políticas calculadas. O primeiro caso é da hidrelétrica de El Cajon do sistema de Honduras, e foi escolhido pelas características particulares relacionadas à função de produção desta usina. Já o segundo caso contém uma versão reduzida da região Sudeste do sistema Brasileiro, conhecido pela alta disponibilidade e diversidade de recursos hidráulicos.

Finalmente, no capítulo 6 são feitas as considerações finais e conclusões sobre o tema abordado neste trabalho. De uma maneira geral, buscando auxiliar a tarefa de planejamento ótimo da operação de sistemas hidrotérmicos, esta seção faz uma análise crítica sobre os possíveis critérios de convexificação para o cálculo das políticas operativas. Além disso, são apresentadas ainda algumas propostas para dar continuidade ao trabalho desenvolvido.

# Capítulo 2

## Planejamento da operação hidrotérmica

### 2.1 Introdução

Os sistemas hidrotérmicos de geração de energia elétrica são compostos por usinas termelétricas e hidrelétricas conectadas a um centro de carga. O objetivo do planejamento da operação do sistema é determinar uma estratégia de decisões de geração dessas usinas, otimizando os recursos disponíveis, de maneira a atender à demanda de energia a mínimo custo para um determinado horizonte de tempo. Este problema de otimização é formulado levando-se em conta o nível de detalhamento desejado para a representação dos componentes do sistema, aspecto fundamental que relaciona a qualidade da operação resultante e o esforço necessário para obtenção dos resultados.

Este trabalho de tese leva em consideração a importância da precisão na modelagem de determinados componentes do sistema, entretanto preocupa-se principalmente em tornar didaticamente claro o objetivo proposto e, portanto, permite-se realizar simplificações no modelo utilizado, sem comprometer a generalidade dos resultados obtidos posteriormente.

O capítulo começa apresentando na seção 2.2, a seguir, a definição da nomenclatura considerada. Na seção 2.3 são descritas as principais características associadas a cada um dos componentes do sistema hidrotérmico e o modelo matemático considerado para a representação do comportamento destes componentes, dando origem à formulação do problema de planejamento da operação considerado para este trabalho. Na seção 2.4 é apresentada uma visão sobre os dois algoritmos de programação dinâmica, PDE e PDDE, tipicamente adotados para a solução dos problemas de planejamento sob incerteza, e devidamente identificadas as vantagens e deficiências para cada um deles.

## 2.2 Nomenclatura

- Conjuntos e índices:

$\mathbb{T}, t$	Estágios de tempo
$\mathbb{J}, j$	Usinas termelétricas
$\mathbb{I}, i$	Usinas hidrelétricas
$\mathbb{M}_i, m$	Usinas a montante da hidrelétrica $i$

- Parâmetros:

$co_{t,j}$	Custo operativo unitário da térmica $j$	$\$/MWh$
$cdef$	Custo de déficit do sistema	$\$/MWh$
$d_t$	Demanda de energia do sistema	$MWh$
$a_{t,i}$	Afluência hidrológica da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$\eta_i$	Fator de eficiência da hidrelétrica $i$	p.u.
$\underline{v}_i$	Volume mínimo da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$\bar{v}_i$	Volume máximo da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$\underline{u}_i$	Turbinamento mínimo da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$\bar{u}_i$	Turbinamento máximo da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$\overline{gh}_i$	Geração máxima da hidrelétrica $i$	$MWh$
$\underline{gt}_j$	Geração mínima da térmica $j$	$MWh$
$\overline{gt}_j$	Geração máxima da térmica $j$	$MWh$

- Variáveis de decisão:

$gt_{t,j}$	Geração da térmica $j$	$MWh$
$xt_{t,j}$	<i>Unit commitment</i> da térmica $j$	$\{0, 1\}$
$gh_{t,i}$	Geração da hidrelétrica $i$	$MWh$
$v_{t,i}$	Volume armazenado da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$u_{t,i}$	Volume turbinado da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$s_{t,i}$	Volume vertido da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$q_{t,i}$	Volume defluente da hidrelétrica $i$	$hm^3$
$h_{t,i}$	Altura de queda líquida da hidrelétrica $i$	$m$
$r_t$	Déficit de energia do sistema	$MWh$
$z$	Valor esperado do custo operativo total	$\$$
$w_t$	Valor esperado do custo operativo no estágio $t$	$\$$
$\alpha_t$	Valor esperado do custo futuro no estágio $t$	$\$$

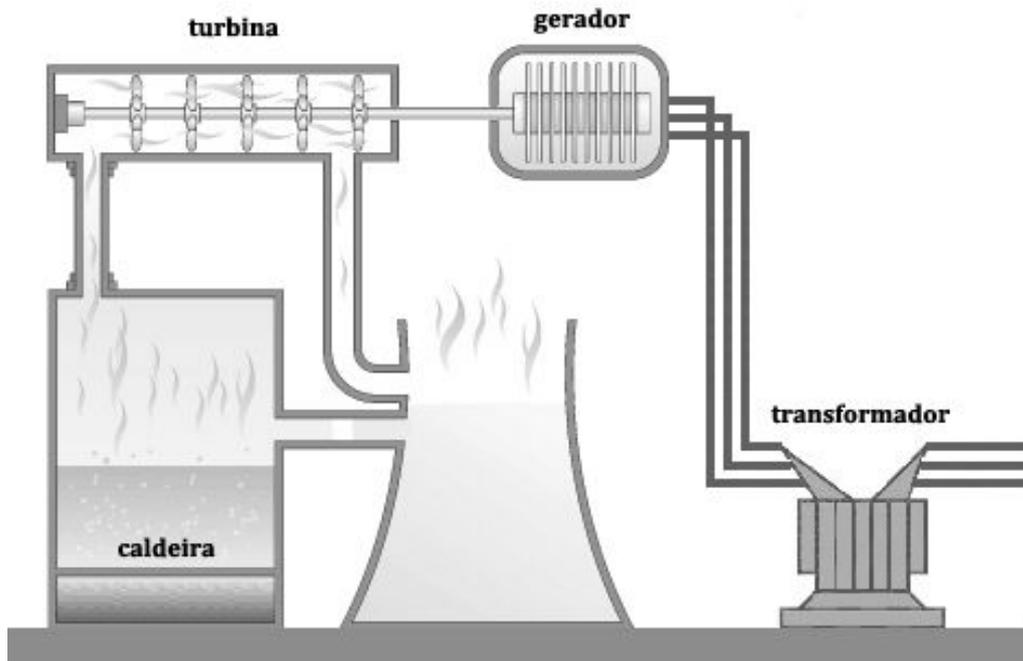


Figura 2.1: Esquema de operação de usina termelétrica

## 2.3 Descrição do Problema

### 2.3.1 Usinas termelétricas

O funcionamento das unidades termelétricas é baseado na conversão de energia térmica em energia cinética pela movimentação, através de vapor, de uma turbina que está acoplada a um gerador elétrico, conforme ilustrado na figura 2.1.

De uma maneira geral, a operação dessas usinas não está sujeita às limitações de recursos tal como o sistema hidrelétrico, que depende da disponibilidade de água proveniente das chuvas, entretanto está relacionada ao consumo específico dos combustíveis e seus custos associados.

Além disso, dependendo da natureza do combustível utilizado, consequentemente do tipo de caldeira, a operação das unidades termelétricas está sujeita a custos relacionados ao processo de acionamento das unidades e uma série de restrições não-triviais, como por exemplo, variações de potência necessariamente graduais que são matematicamente modeladas pelas restrições de rampa e de mínimo tempo de partida e parada das unidades. Como encontra-se fora do escopo desta tese, no modelo apresentado a seguir, iremos desconsiderar o detalhamento destas restrições, cujos efeitos geralmente são significativos apenas no planejamento de curto prazo. Por esta razão, como será visto a seguir, diferentemente da operação hidrelétrica, o modelo térmico não é acoplado no tempo.

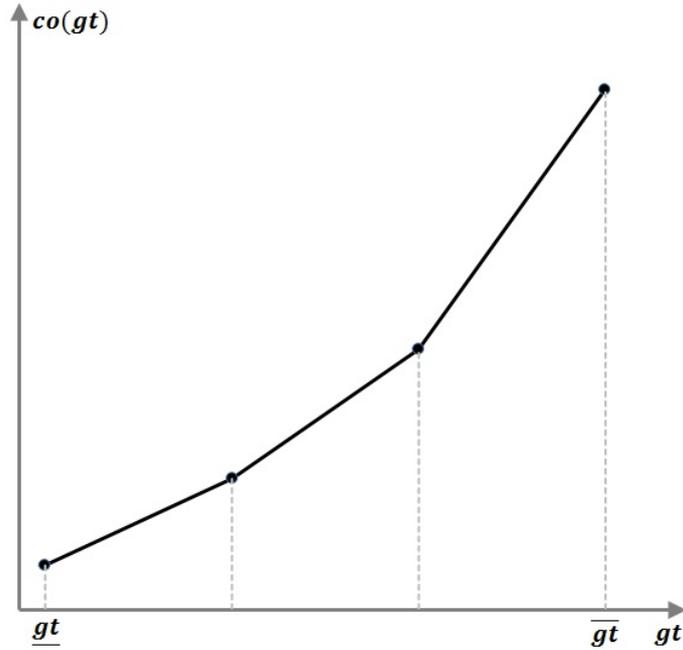


Figura 2.2: Curva de custo operativo térmico

### Custo das unidades termelétricas

Em condições normais de operação, o consumo específico de combustível, conseqüentemente o custo unitário térmico, é dado em função do nível de geração das unidades, tipicamente representado por uma curva convexa linear por partes, como está ilustrada na figura 2.2.

O custo operativo térmico de cada estágio  $t$  é modelado, então, pela expressão a seguir:

$$\sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j}, \quad t \in \mathbb{T} \quad (2.1)$$

### Limites operativos das unidades termelétricas

Os níveis mínimo e máximo de geração das unidades termelétricas estão normalmente relacionados às características físicas das caldeiras, em outros casos podem estar ligados a restrições energéticas oriundas do processo de planejamento. Matematicamente, estes limites operativos são modelados pelas seguintes desigualdades:

$$gt_{t,j} \geq \underline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{J}, \quad (2.2a)$$

$$gt_{t,j} \leq \overline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{J}, \quad (2.2b)$$

onde as variáveis binárias  $xt_{t,j}$ , que representam as decisões de *unit commitment* das termelétricas indicam que, uma vez em operação, as unidades necessariamente devem respeitar os limites mínimos e máximos de geração e, quando fora de operação, devem manter geração nula de energia, ou seja:

$$\begin{cases} \underline{gt}_j \leq gt_{t,j} \leq \overline{gt}_j, & \text{para } xt_{t,j} = 1 \\ gt_{t,j} = 0, & \text{para } xt_{t,j} = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{J}.$$

### 2.3.2 Usinas hidrelétricas

O funcionamento das usinas hidrelétricas é baseado no processo de aproveitamento hidráulico, conforme ilustrado na figura 2.3. Para um determinado nível de cota a montante de armazenamento, a água do reservatório é captada por uma tomada d'água e conduzida sob pressão através de condutos forçados até um nível mais baixo, local onde se encontra o conjunto de turbinas da usina, denominado de casa de força. Neste local, a água é direcionada de forma a impulsionar as pás das turbinas que estão acopladas aos geradores. Desta forma, a energia cinética de rotação desenvolvida é convertida em energia elétrica. Depois de passar pelas turbinas, a água retorna ao rio ou a um outro curso d'água através de canais ou condutos que recebem o nome de canal de fuga da usina, situado em um nível de cota a jusante.

Outra maneira de escoar água do reservatório é através do vertedouro, onde, neste caso, não há produção de energia uma vez que a água não passa pela turbina. Essa obra de descarga de vazões permite o controle do nível de água do reservatório, por exemplo em situações em que o volume armazenado é elevado e a capacidade de geração de energia não é suficiente para extravasar o fluxo de água que chega ao reservatório. Podem existir situações ainda, dependendo do tipo de construção da usina, em que o nível de água do reservatório não é máximo mas o vertimento é economicamente vantajoso para permitir a geração de energia a partir do turbinamento de uma usina a jusante.

O modelo matemático que descreve o comportamento deste componente de geração de energia é descrito a seguir.

#### Função de produção hidrelétrica - FPH

O processo de produção de uma unidade hidrelétrica é definido a partir da energia potencial armazenada  $ep$  no reservatório:

$$ep = m \cdot g \cdot h, \tag{2.3}$$

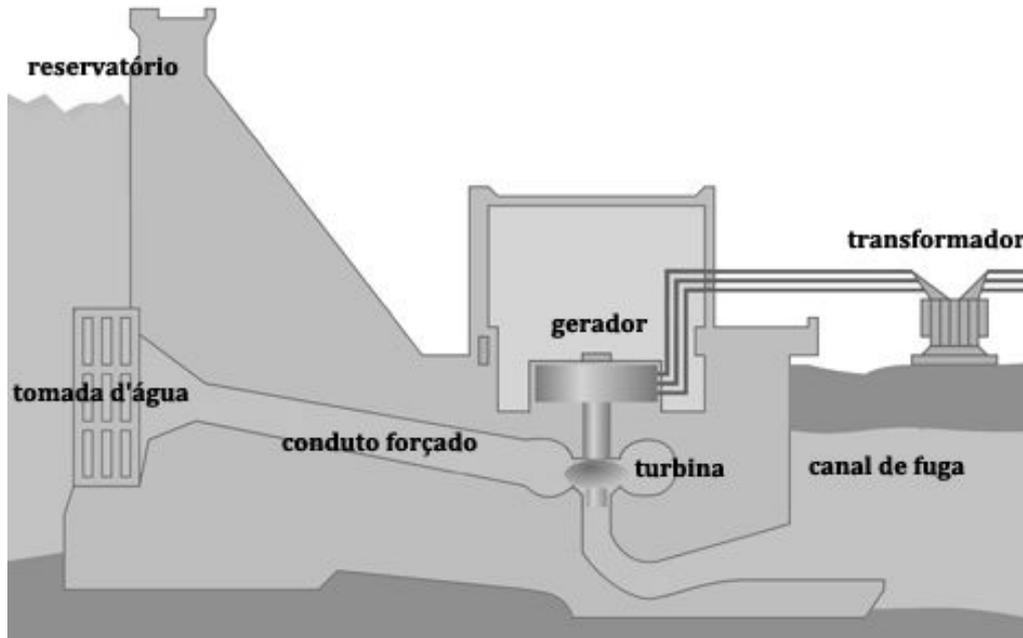


Figura 2.3: Esquema de operação de usina hidrelétrica

onde  $m$  é a massa de água no reservatório captada para a geração,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $h$  é a altura de queda líquida dada pela diferença entre os níveis de montante e de jusante do reservatório, provocada pelo represamento da água.

Utilizando o peso específico da água  $\mu = 1000\text{kg}/\text{m}^3$ , definido como a razão entre a massa  $m$  de um determinado volume  $u$ :

$$\mu = \frac{m}{u} \rightarrow m = \mu \cdot u. \quad (2.4)$$

Então pode-se escrever a equação da energia potencial em função do volume retirado do reservatório para a geração de energia:

$$ep = \mu \cdot u \cdot g \cdot h. \quad (2.5)$$

A transformação de energia potencial em energia elétrica  $gh$  está sujeita ao rendimento  $\eta$  das máquinas envolvidas no processo de conversão da energia:

$$gh = \eta \cdot ep. \quad (2.6)$$

Substituindo a expressão (2.5) para a energia potencial:

$$gh = \eta \cdot \mu \cdot u \cdot g \cdot h. \quad (2.7)$$

Esta equação pode então ser escrita da seguinte forma, para cada hidrelétrica  $i$  no estágio  $t$ :

$$gh_{t,i} = \kappa \cdot \eta_i \cdot u_{t,i} \cdot h_{t,i}, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (2.8)$$

onde  $\kappa$  é uma constante que incluiu os valores do peso específico da água, da aceleração da gravidade e um fator de conversão de unidade para *MWh*.

A altura de queda líquida da usina  $h_{t,i}$ , por sua vez, é função do volume armazenado  $v_{t,i}$ , do volume turbinado  $u_{t,i}$  e do volume vertido  $s_{t,i}$  pela usina, isto é:

$$h_{t,i} = h^m(v_{t,i}) - h^f(u_{t,i}, s_{t,i}) - h^p(u_{t,i}), \quad (2.9)$$

onde  $h^m(v_{t,i})$  é a cota de montante em metros da usina, função não-linear do volume armazenado no reservatório. A relação entre essas duas grandezas é dada pela curva cota x volume, que traduz a característica topográfica da área inundada pela construção da barragem;  $h^f(u_{t,i}, s_{t,i})$  é a cota de jusante em metros da usina, função não-linear do volume defluente no canal de fuga, dada pela soma do volume turbinado e o volume vertido pela usina. A relação entre essas grandezas é dada pela curva chave do canal de fuga, usualmente determinada experimentalmente, a partir de medições simultâneas de vazão defluente e do nível da água;  $h^p(u_{t,i})$  é a perda hidráulica por atrito em metros, ocorrida no escoamento entre a seção da tomada d'água e a seção localizada a jusante da turbina no canal de fuga, e geralmente dada por uma função quadrática do volume turbinado pela usina.

Podemos então reescrever a expressão que define uma função de produção hidrelétrica, dada pela equação (2.8), como a multiplicação do volume turbinado  $u$  e um fator de produção variável  $\rho(v, q)$  em função do volume armazenado e do volume defluente:

$$gh_{t,i} = \rho_i(v_{t,i}, q_{t,i}) \cdot u_{t,i}, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (2.10)$$

onde  $q_{t,i} = u_{t,i} + s_{t,i}$ .

Esta função não-linear é representada neste trabalho por um modelo de programação linear inteira mista dado por uma função linear por partes bi-variada em  $v$  e  $q$ , muito bem ajustada através da incorporação de variáveis binárias. Ao agregar as variáveis de turbinamento  $u$  e vertimento  $s$  em uma única variável de defluência  $q$ , para a representação da função, estamos assumindo que vertimentos ocorrem somente em situações em que a defluência total é maior que o máximo turbinamento, isto é:

$$\begin{aligned} u_{t,i} &= \min\{q_{t,i}, \bar{u}_i\} \\ s_{t,i} &= \max\{0, q_{t,i} - \bar{u}_i\} \end{aligned}$$

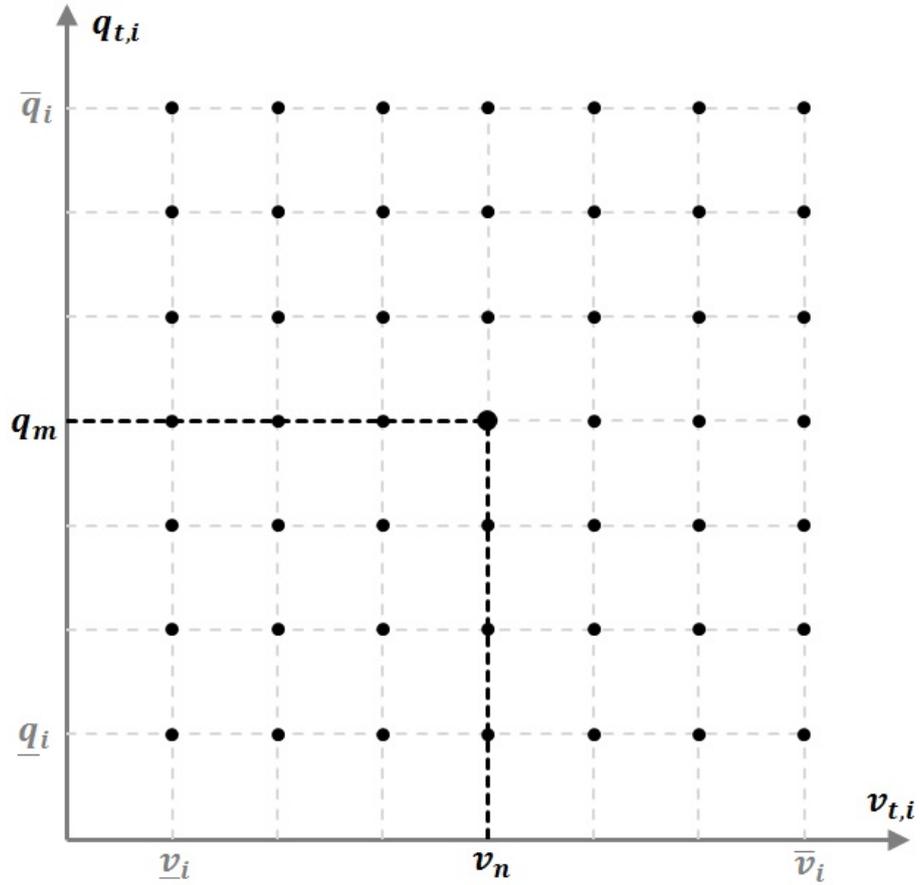


Figura 2.4: *Grid* de discretização de variáveis de uma função

Seja  $gh(v, q)$  uma função contínua definida sobre um domínio retangular, cujos intervalos  $[\underline{v}, \bar{v}]$  e  $[\underline{q}, \bar{q}]$ , que definem a região  $[\underline{v} \leq v \leq \bar{v}, \underline{q} \leq q \leq \bar{q}]$ , são divididos em subintervalos através de discretizações de  $N$  pontos de volume armazenado e  $M$  pontos de volume defluente. Então o ponto  $(v_n, q_m)$  corresponde ao ponto  $(n, m)$  do *grid*, como mostra a figura 2.4.

Considerando os retângulos obtidos pelos pontos  $(n, m)$ ,  $(n + 1, m)$ ,  $(n, m + 1)$  e  $(n + 1, m + 1)$ , conforme ilustrado na figura 2.5, o domínio da função é totalmente coberto por um conjunto único destes retângulos não-sobrepostos. A função é formulada portanto pelo seguinte conjunto de restrições lineares:

$$gh^L = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M gh_{n,m} \cdot \gamma_{n,m} \quad (2.12a)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_n \cdot \gamma_{n,m} \quad (2.12b)$$

$$q = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_m \cdot \gamma_{n,m} \quad (2.12c)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \gamma_{n,m} = 1 \quad (2.12d)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} x_n = 1 \quad (2.12e)$$

$$\sum_{m=1}^{M-1} y_m = 1 \quad (2.12f)$$

$$\gamma_{n,m} \leq x_n + x_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M \quad (2.12g)$$

$$\gamma_{n,m} \leq y_m + y_{m+1}, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M \quad (2.12h)$$

$$\gamma_{n,m} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M \quad (2.12i)$$

$$x_n \in \{0, 1\}, \quad n = 1, \dots, N - 1 \quad (2.12j)$$

$$y_m \in \{0, 1\}, \quad m = 1, \dots, M - 1 \quad (2.12k)$$

Onde as variáveis binárias auxiliares  $x$  e  $y$  indicam os subintervalos associados ao ponto resultante, isto é, quando  $x_n = 1$  e  $y_m = 1$ , o ponto  $(v, q)$  pertence ao  $n$ -ésimo intervalo de volume armazenado e  $m$ -ésimo intervalo de defluência, associados ao retângulo definido pelos pontos  $(v_n, q_m)$ ,  $(v_{n+1}, q_m)$ ,  $(v_n, q_{m+1})$  e  $(v_{n+1}, q_{m+1})$ . As restrições (2.12e) e (2.12f) garantem que o ponto  $(v, q)$  pertence a um único retângulo. As variáveis  $\gamma$  correspondem à combinação linear convexa dos pontos do *grid*, e as restrições (2.12g) e (2.12h) associam os pontos da combinação ao retângulo correspondente. Para estas restrições as variáveis  $x_N$  e  $y_M$  são removidas do problema.

*Propriedade da aproximação:* A aproximação linear por partes da função,  $gh_{t,i}^L(v_{t,i}, q_{t,i})$ , é idêntica à função  $gh_{t,i}(v_{t,i}, q_{t,i})$  para todos os pontos do *grid*, isto é,  $gh_{t,i}^L(v_n, q_m) = gh_{t,i}(v_n, q_m)$  para cada ponto  $(n, m)$ , e é uma função linear das variáveis  $(v_{t,i}, q_{t,i})$  no interior ou nas arestas de cada retângulo.

É importante ressaltar que o uso dessas funções lineares-por-partes não convexas permite que sejam representadas as características mais particulares de qualquer função bi-variada. O que significa que o detalhamento do modelo é flexibilizado

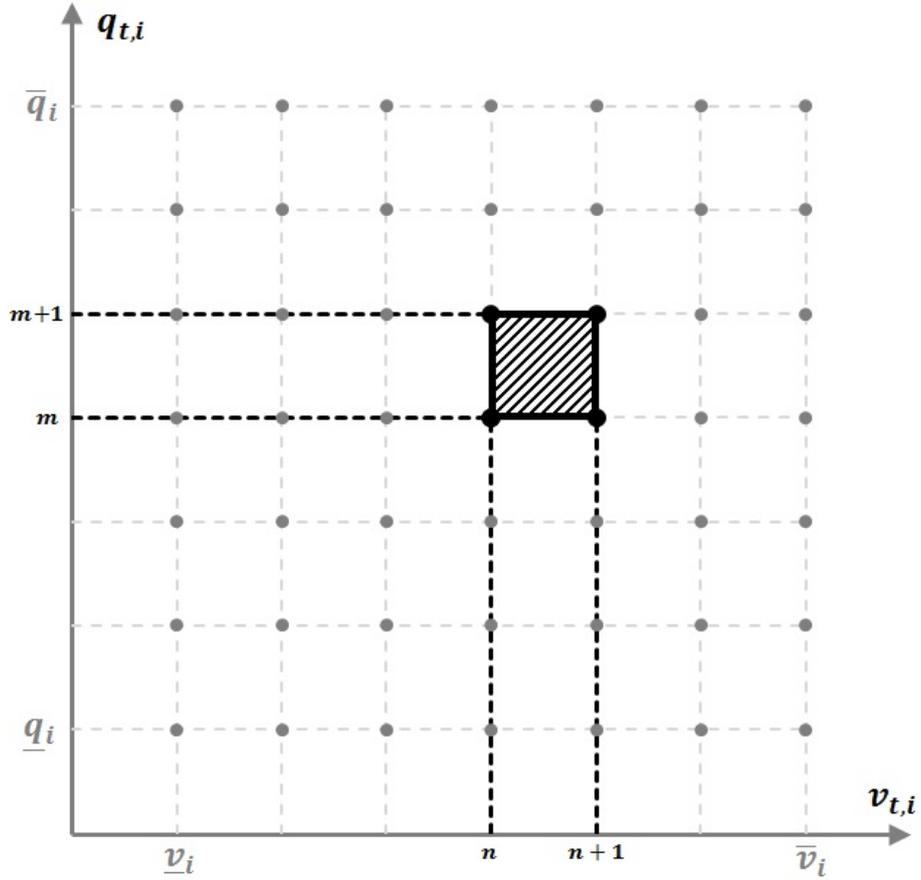


Figura 2.5: Cobertura do *grid* de discretização

pelo processo de discretização das variáveis da função. Todavia, sem perda de generalidade, para efeitos das análises comparativas realizadas entre as metodologias que serão apresentadas mais a diante neste trabalho, estamos considerando que o fator de produção das usinas hidrelétricas é uma função somente do volume armazenado no reservatório. Esta consiste na característica mais comumente encontrada em sistemas de operação hidrelétrica e isto significa que a produção de energia dessas usinas é representada pela seguinte função não-convexa:

$$gh_{t,i} = \rho_i(v_{t,i}) \cdot u_{t,i}, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (2.13)$$

A função linear-por-partes considerada, portanto, nesta tese é apresentada como  $gh_{t,i}^L(v_{t,i}, u_{t,i})$ .

### Balanco hídrico

As usinas hidrelétricas são geralmente construídas em cascata para melhor utilizarem os recursos existentes em um rio ou bacia hidrográfica. Este acoplamento hidráulico é representado sob a forma de restrições de balanço hídrico que modelam tanto o acoplamento espacial, criado pelas usinas em cascata, quanto o acoplamento

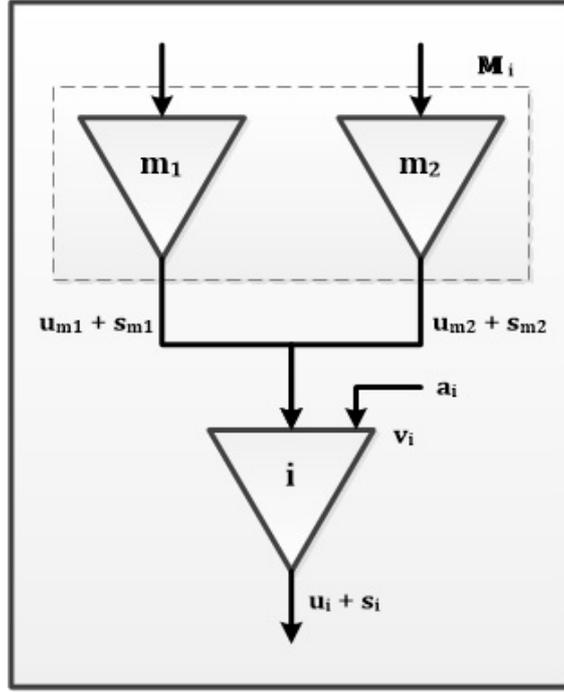


Figura 2.6: Balanço hídrico de usina hidrelétrica

temporal, criado pela relação entre os volumes armazenados em cada reservatório entre estágios consecutivos.

De forma mais específica, as equações de balanço hídrico obedecem ao princípio de conservação de massa, de acordo com a figura 2.6: o volume de água armazenada ao final de um determinado estágio deve ser igual ao volume no início do estágio (ou final do estágio anterior), adicionado o volume afluenta ao reservatório e descontado o volume defluenta da usina.

$$v_{t,i} = v_{t-1,i} + a_{t,i} - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in M_i} (u_{t,m} + s_{t,m}), \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (2.14)$$

onde o volume defluenta é dado pela soma dos volumes turbinado e vertido, e o volume afluenta é dado pela soma da afluenta hidrológica e a soma dos volumes defluentes das usinas a montante.

### Limites operativos das unidades hidrelétricas

O limite superior considerado para o volume armazenado nos reservatórios está associado ao nível máximo de água para fins operativos energéticos, o que não necessariamente corresponde ao nível de elevação máxima da barragem. De forma análoga é definido o limite inferior, associado ao nível mínimo de água armazenada que preserva a capacidade de geração de energia da usina. Dá-se o nome de volume

útil, à diferença entre estes valores. Níveis mínimo e máximo de turbinamento das usinas são geralmente estabelecidos em função de restrições técnicas dos equipamentos. Matematicamente, estes limites operativos são modelados pelas seguintes desigualdades:

$$\underline{v}_i \leq v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (2.15a)$$

$$\underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (2.15b)$$

### 2.3.3 Demanda do sistema

A demanda total do sistema elétrico é constituída pela soma das demandas de energia dos centros consumidores que devem ser atendidas pelo suprimento de geração das usinas hidrelétricas e termelétricas. À parcela de demanda não atendida pelas unidades geradoras dá-se o nome de déficit de energia e a ela está associada uma penalidade devido aos efeitos sociais provocados por um racionamento de energia.

#### Atendimento à demanda do sistema

O atendimento à demanda do sistema elétrico é formulado segundo a seguinte equação de balanço de energia:

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t, \quad t \in \mathbb{T} \quad (2.16)$$

#### Custo operativo total

O custo operativo total do sistema para cada estágio corresponde ao valor do custo imediato e é dado pela soma do custo operativo térmico e o custo do deficit, conforme a equação a seguir:

$$w_t = \sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j} + cdef \cdot r_t, \quad t \in \mathbb{T} \quad (2.17)$$

### 2.3.4 Formulação matemática

Os sistemas hidrotérmicos são caracterizados pela incerteza associada à imprevisibilidade das afluências hidrológicas nos estágios futuros, desta forma, o problema de planejamento da operação é formulado por um modelo de programação estocástica multi-estágio, onde a cada estágio  $t$  é sorteado um evento aleatório  $\xi_t$ , determinando o volume afluente  $a_t$ . O objetivo do problema é encontrar a política

operativa ótima que minimiza o valor esperado do custo total sujeito ao conjunto de restrições operativas, conforme descrito nas seções anteriores:

- Função objetivo: Minimizar valor esperado do custo operativo total

$$z = \min \mathbb{E}_{\xi_1} [w_1(\xi_1) + \mathbb{E}_{\xi_2} [w_2(\xi_2) + \cdots + \mathbb{E}_{\xi_T} [w_T(\xi_T)] \cdots]] \quad (2.18)$$

- Sujeito a: Equação de balanço hídrico

$$v_{t,i} = v_{t-1,i} + a_{t,i}(\xi_t) - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in \mathbb{M}_i} (u_{t,m} + s_{t,m}), \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I}$$

- Equação de atendimento à demanda

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t, \quad t \in \mathbb{T}$$

- Função de produção das usinas hidrelétricas

$$gh_{t,i} \leq gh_{t,i}^L(v_{t,i}, u_{t,i}), \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I}$$

- Limites operativos das usinas hidrelétricas

$$\begin{aligned} gh_{t,i} &\leq \overline{gh}_i, & t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\ \underline{v}_i &\leq v_{t,i} \leq \overline{v}_i, & t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\ \underline{u}_i &\leq u_{t,i} \leq \overline{u}_i, & t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

- Limites operativos das usinas térmicas

$$\begin{aligned} gt_{t,j} &\geq \underline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, & t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{J} \\ gt_{t,j} &\leq \overline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, & t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{J} \end{aligned}$$

- Decisões de *unit commitment* das usinas térmicas

$$xt_{t,j} \in \{0, 1\}, \quad t \in \mathbb{T}, j \in \mathbb{J}$$

Ao contrário dos modelos de programação determinística, este problema não fornece uma única solução como resultado. Para cada estágio  $t$ , um conjunto de soluções é obtido em função das realizações dos eventos aleatórios. Por esta razão, este conjunto de soluções é conhecido como política operativa. Na prática,

estamos interessados na decisão para o primeiro estágio, cuja solução carrega informações sobre os estágios futuros, por exemplo em relação a balanço de riscos de racionamento, secas ou vertimentos.

A incorporação de incerteza hidrológica associada à existência de múltiplos reservatórios tornam este problema de grande porte, exigindo que sejam feitas suposições sobre o modelo e sejam adotados algoritmos eficientes para lidar com as dificuldades do problema. Na seção a seguir é feita uma breve descrição dos algoritmos de programação dinâmica, tipicamente utilizados para solucionar este problema.

## 2.4 Algoritmos de solução

As usinas hidrelétricas utilizam o armazenamento de água nos reservatórios para produzir energia nos estágios futuros, substituindo custos associados ao uso de combustível pela usinas termelétricas. O limite de capacidade de armazenamento dos reservatórios em conjunto com a variabilidade das afluências futuras produzem um enlace entre as decisões operativas de um determinado estágio e as suas consequências futuras.

Através de metodologias baseadas em programação dinâmica, o problema multi-estágio é decomposto em soluções recursivas de problemas de um único estágio para a construção das chamadas funções de custo futuro (FCF), que estabelecem, para cada estado do sistema, o valor esperado do custo futuro associado à melhor decisão operativa imediata. Os estados, por sua vez, estão relacionados às condições iniciais do sistema para um determinado estágio.

De forma genérica, o problema de um estágio pode ser formulado como:

$$w_t(x_{t-1}, \xi_t) = \min_{x_t} [c_t x_t + E_{\xi_{t+1}} [w_{t+1}(x_t, \xi_{t+1})]]$$

$$\text{s/a } A_t x_t \geq b_t \quad (2.19a)$$

$$F_t x_{t-1} + G_t x_t = h_t(\xi_t) \quad (2.19b)$$

onde  $c_t x_t$  é o custo imediato associado à decisão operativa  $x_t$  e  $E_{\xi_{t+1}} [w_{t+1}(x_t, \xi_{t+1})]$  é o valor esperado do custo futuro para esta decisão. Restrições (2.19a) representam as relações intra-período e (2.19b) as restrições de acoplamento, ou inter-período.

Esta formulação serve como ponto de partida para diversos algoritmos de programação dinâmica. A seguir são apresentadas as metodologias de PDE e PDDE que buscam solucionar o problema multi-estágio através da obtenção de aproximação da função de custo futuro  $w_{t+1}$ .

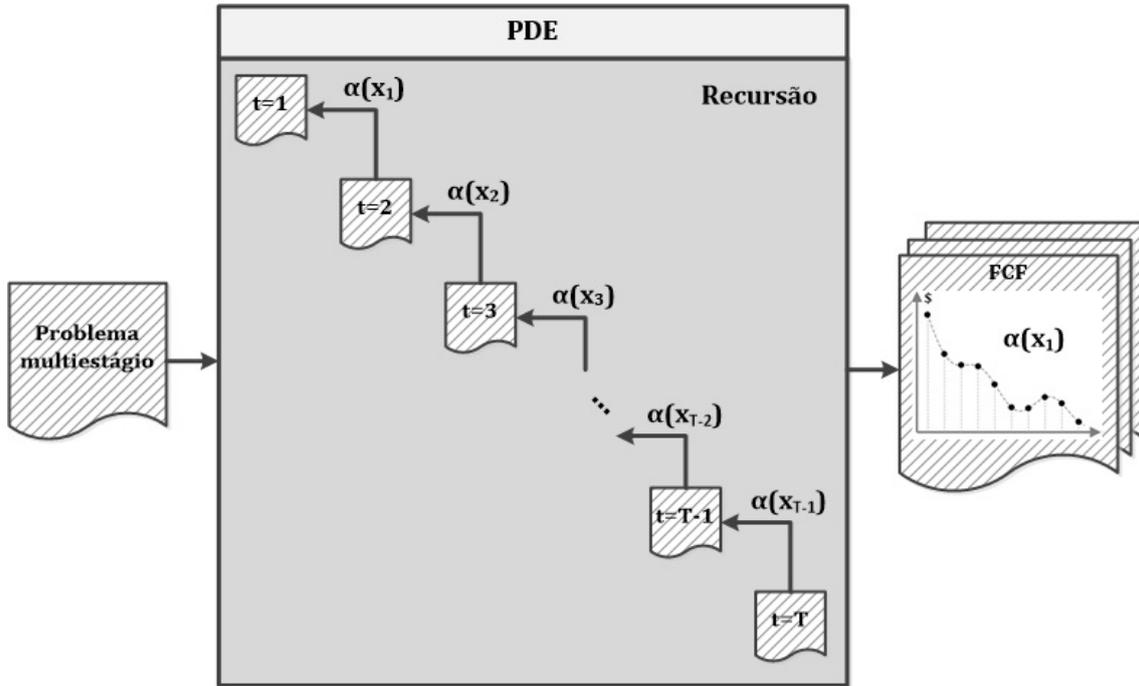


Figura 2.7: Esquema de solução por PDE

### 2.4.1 Programação Dinâmica Estocástica

Seguindo o critério da recursão de Bellman [5], o algoritmo começa pelo estágio  $T$  com o cálculo do custo  $w_T$  para todos os estados  $x_{T-1}$ , que corresponde à construção da função de custo futuro para o estágio  $T - 1$ . Movendo-se no sentido reverso do tempo, são solucionados recursivamente os problemas de cada estágio  $t$  considerando as FCF previamente calculadas, conforme ilustrado na figura 2.7.

A parte complicante do algoritmo, entretanto, consiste na determinação dos estados do sistema para cada problema. Devido à impossibilidade de solução dos problemas de um estágio para a combinação de todo o domínio contínuo das variáveis de estado, o algoritmo de PDE se baseia na discretização de um conjunto de valores para estas variáveis. A aproximação da FCF, representada por  $\alpha_t(x_{t-1})$ , é ajustada, por exemplo, através de interpolações dos pontos obtidos.

## Resumo do algoritmo de PDE

### 1. Inicialização

Inicializa FCF considerada no estágio  $T$ :

$$\alpha_{T+1}(x_T) = 0$$

### 2. Recursão

Para cada estágio  $t = T, \dots, 1$

Para cada estado do sistema  $k = 1, \dots, K$

Para cada realização da variável aleatória  $l = 1, \dots, L$

Soluciona o problema de otimização de um estágio:

$$\begin{aligned} w_t(x_{t-1}^k, \xi_t^l) = \min & \quad c_t x_t + \alpha_{t+1}(x_t) \\ \text{s/a} & \quad A_t x_t \geq b_t \\ & \quad F_t x_{t-1}^k + G_t x_t = h_t(\xi_t^l) \end{aligned}$$

Fim

Calcula o valor esperado da função objetivo associado ao estado  $x_{t-1}^k$ :

$$\bar{w}_t^k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_t(x_{t-1}^k, \xi_t^l)$$

Fim

Ajusta função de custo futuro:

$$\alpha_t(x_{t-1}) = \tilde{w}_t(x_{t-1})$$

onde

$$\tilde{w}_t : x_{t-1} \rightarrow \text{int} \{ \bar{w}_t^k, \quad k = 1, \dots, K \}$$

é a função aproximada obtida pela interpolação dos pontos calculados para a FCF.

Fim

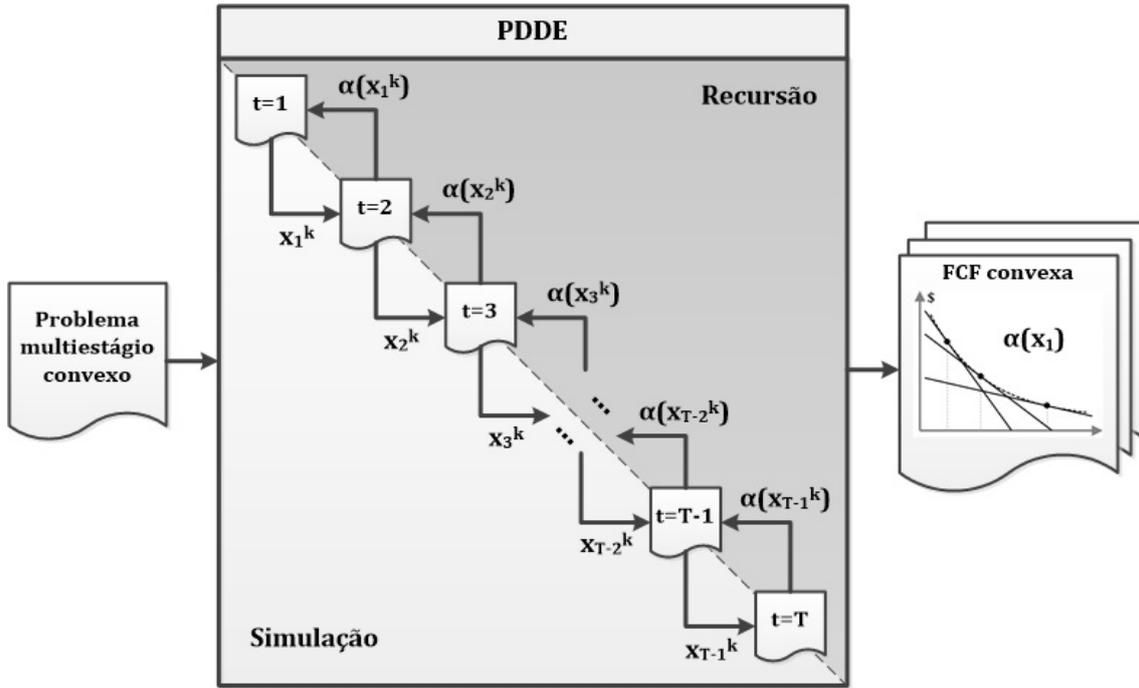


Figura 2.8: Esquema de solução por PDDE

Suponha agora que o problema contém  $N$  variáveis de estado e cada uma delas com  $M$  discretizações de valores. Então, em cada estágio, existirão  $K = M^N$  estados a serem resolvidos, resultado da combinação de estados de cada variável. Logo, verifica-se que o espaço de estados cresce exponencialmente com o número de variáveis e, a este fenômeno, dá-se o nome de maldição da dimensionalidade.

Em contra-partida, um ponto favorável com relação ao algoritmo de PDE é a capacidade de lidar com problemas complexos, uma vez que não há exigência alguma em relação à natureza das restrições, permitindo modelagens bastante flexíveis do problema. Flexibilidade esta que não é encontrada no algoritmo de PDDE, como será apresentado na seção a seguir, entretanto este algoritmo resolve a questão da maldição da dimensionalidade, fator que torna computacionalmente inviável a aplicação da metodologia de PDE para este problema.

## 2.4.2 Programação Dinâmica Dual Estocástica

O algoritmo de programação dinâmica dual estocástica, desenvolvido por Pereira [45], utiliza a técnica de decomposição de Benders multi-estágio baseada em um procedimento iterativo para construção das aproximações das funções de custo futuro como funções lineares por partes, dispensando a necessidade de discretização das variáveis de estado.

De maneira geral, o procedimento é composto de duas fases, como mostra a figura 2.8: a fase de recursão, ou *backward*, e a fase de simulação, ou *forward*. A

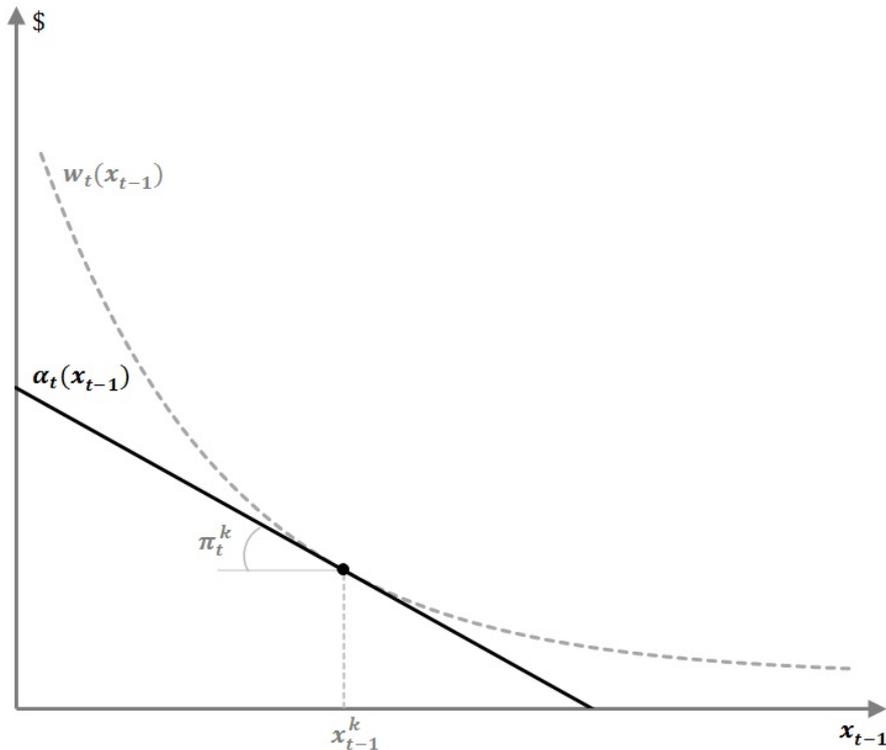


Figura 2.9: Extrapolação da FCF para um estado

recursão consiste na solução reversa no tempo dos problemas de um estágio para um conjunto bastante reduzido de estados do sistema. A informação dual associada à solução destes problemas é utilizada para construir uma aproximação de primeira ordem das FCFs, ou corte de Benders, em torno destes estados. A fase de simulação consiste em solucionar cronologicamente os problemas para um conjunto de cenários hidrológicos, levando em conta essas aproximações das FCFs, e assim visitar novos estados do sistema.

Observa-se que como os cortes obtidos são tangentes à FCF original, então a aproximação gerada subestima a função original. Portanto, ao final da fase de recursão, é obtida com a solução do problema para o primeiro estágio, um limite inferior para a solução do problema. Além disso, a soma dos custos imediatos de cada problema da fase de simulação, considerando cada cenário hidrológico, é usada para calcular o intervalo de confiança do limite superior para a solução. Considera-se como critério para convergência do algoritmo quando o valor do limite inferior pertence ao intervalo de confiança do limite superior.

Este algoritmo pode ser visto, na verdade, como um aperfeiçoamento do método de PDE ao tornar dinâmico o processo de discretização do espaço de estados e ao disponibilizar, a cada iteração do processo, limites para a solução do problema. Todavia, a metodologia de PDDE se baseia na convexidade dos problemas da fase de recursão para a obtenção das informações duais que permitem a construção de

uma aproximação da FCF através da extrapolação linear dos pontos obtidos para esta função.

De acordo com a figura 2.9, valores para a função  $w_t(x_{t-1})$  podem ser calculados em pontos específicos  $x_{t-1} = x_{t-1}^k$ . Com a informação das inclinações da função  $w_t(x_{t-1})$  nestes pontos, isto é,  $\pi_t^k = \left. \frac{\partial w_t(x_{t-1})}{\partial x_{t-1}} \right|_{x_{t-1}^k}$ , a função pode ser extrapolada devido à sua convexidade. Estas inclinações são obtidas a partir da informação dual de cada um dos problemas de operação. Desta maneira obtém-se uma aproximação externa  $\alpha_t(x_{t-1})$  da função original através de planos lineares tangentes aos pontos  $x_{t-1}^k$ .

## Resumo do algoritmo de PDDE

### 1. Inicialização

Inicializa número de cortes da FCF para cada estágio:

$$P_t = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

### 2. Recursão

Para cada estágio  $t = T, \dots, 1$

Para cada estado do sistema  $k = 1, \dots, K$

Para cada realização da variável aleatória  $l = 1, \dots, L$

Soluciona o problema de otimização de um estágio:

$$\begin{aligned} w_t(x_{t-1}^k, \xi_t^l) = \min \quad & c_t x_t + \alpha_{t+1} \\ \text{s/a} \quad & A_t x_t \geq b_t \\ & F_t x_{t-1}^k + G_t x_t = h_t(\xi_t^l) \\ & \alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \pi_{t+1}^p \cdot (x_t - x_t^p), \quad p = 1, \dots, P_t \end{aligned}$$

Fim

Incrementa número de segmentos da FCF do estágio  $t - 1$ :

$$P = P_{t-1} + 1, \quad P_{t-1} = P$$

Calcula novo segmento para FCF:

$$\alpha_t \geq w_t^P + \pi_t^P \cdot (x_{t-1} - x_{t-1}^P)$$

onde

$$x_{t-1}^P = x_{t-1}^k,$$

$$w_t^P = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_t(x_{t-1}^k, \xi_t^l),$$

$$\pi_t^P = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \pi_t^{k,l},$$

e

$$\pi_t^{k,l} = \left. \frac{\partial w_t(x_{t-1})}{\partial x_{t-1}} \right|_{x_{t-1}^k} = \pi h_t^{k,l} \cdot F_t'$$

$\pi h_t^{k,l}$  são variáveis duais associadas às restrições  $F_t x_{t-1}^k + G_t x_t = h_t(\xi_t^l)$ .

Fim

Fim

Calcula limite inferior:

$$\underline{w} = w_1(x_0).$$

### 3. Simulação

Para cada cenário sorteado  $h^k, k = 1, \dots, K$

Inicializa estados:

$$x_0^k = x_0$$

Para cada estágio  $t = 1, \dots, T$

Soluciona o problema de otimização de um estágio:

$$\begin{aligned} w_t(x_{t-1}^k) = \min \quad & c_t x_t + \alpha_{t+1} \\ \text{s/a} \quad & A_t x_t \geq b_t \\ & F_t x_{t-1}^k + G_t x_t = h_t^k \\ & \alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \pi_{t+1}^p \cdot (x_t - x_t^p), \quad p = 1, \dots, P_t \end{aligned}$$

Atualiza os estados associados ao cenário  $k$ :

$$x_t^k = x_t^*$$

onde  $x_t^*$  é solução ótima do problema

Fim

Calcula o custo total por cenário:

$$w^k = \sum_{t=1}^T c_t x_t^k$$

Fim

Calcula o valor esperado do limite superior:

$$\bar{w} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K w^k$$

Calcula o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (w^k - \bar{w})^2}$$

#### 4. Verificação da convergência

Para um determinado parâmetro  $\epsilon$ , se o limite inferior pertence ao intervalo de confiança do limite superior, ou seja:

$$\underline{w} \in \left[ \bar{w} - \epsilon \frac{\sigma}{\sqrt{K}}, \bar{w} + \epsilon \frac{\sigma}{\sqrt{K}} \right]$$

então o algoritmo pára, senão retorna ao passo **2**.

Observa-se que, em contraste com o algoritmo de PDE, onde  $K$  cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado, no algoritmo de PDDE estamos selecionado um estado do sistema associado a cada cenário sorteado, ou seja  $K$ . Portanto, o número de problemas resolvidos a cada recursão pode ser muito menor ao utilizarmos o procedimento de atualização dos estados a cada iteração do algoritmo. Na prática, esta metodologia tira vantagem deste processo de discretização dinâmica para construir aproximações que melhor representam as FCFs apenas no entorno do estados visitados, ao invés de se preocupar em refinar regiões das funções cujos estados associados são muito improváveis.

Desta forma, o algoritmo de PDDE é considerado um dos poucos e o principal método capaz de solucionar problemas de operação multi-estágio, multi-reservatório em um ambiente estocástico. No entanto, como foi mencionado, a aplicação desta metodologia está limitada a problemas convexos devido ao processo de extrapolação de pontos da FCF para todo o domínio do espaço de estados, através da construção de hiperplanos tangentes. Uma vez incorporadas não-convexidades no problema, os cortes obtidos por aproximações lineares da função não garantem limite inferior para todos os pontos da função e, portanto, não garantem a convergência do algoritmo. Problema ainda mais grave consiste no fato de que aproximações extremamente distorcidas podem ser obtidas devido à eliminação de grande parte da região viável do problema.

Como visto na seção 2.3, o problema abordado neste trabalho de tese, para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, é não-convexo. O assunto

discutido no próximo capítulo diz respeito às técnicas de convexificação das funções de custo futuro, que tornam possível a aplicação da metodologia de PDDE na solução de problemas com representação de não-convexidades.

# Capítulo 3

## Critérios de convexificação

### 3.1 Introdução

O conceito de convexidade é bastante útil no âmbito da otimização, e é definido a seguir:

- Um conjunto é dito convexo se qualquer ponto sobre um segmento de reta que une dois pontos deste conjunto também pertencer ao conjunto, conforme a figura 3.1. Sejam  $x_1 \in X$  e  $x_2 \in X$ , então  $X$  é um conjunto convexo se:

$$\mu x_1 + (1 - \mu) x_2 \in X \quad \forall \mu \in [0, 1] \quad (3.1)$$

- Uma função é dita convexa se o epigrafo, conjunto de pontos sobre e acima do gráfico da função, é um conjunto convexo. Em outras palavras, uma função é convexa se o segmento de reta que une dois pontos quaisquer da função está sobre ou acima da função, ou seja, superestima a função, como mostra a figura 3.2. Seja  $X$  um conjunto convexo, então  $f(x)$  é função convexa em  $x \in X$  se:

$$\mu f(x_1) + (1 - \mu) f(x_2) \geq f(\mu x_1 + (1 - \mu) x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \mu \in [0, 1] \quad (3.2)$$

Uma função  $f(x)$  é dita côncava em  $x \in X$  se  $-f(x)$  é convexa em  $x$ .

Algumas propriedades de funções convexas (côncavas):

- \* Se uma função convexa (côncava) possui um mínimo (máximo) local, ele também é um mínimo (máximo) global;
- \* O máximo (mínimo) de funções convexas (côncavas) também é uma função convexa (côncava);

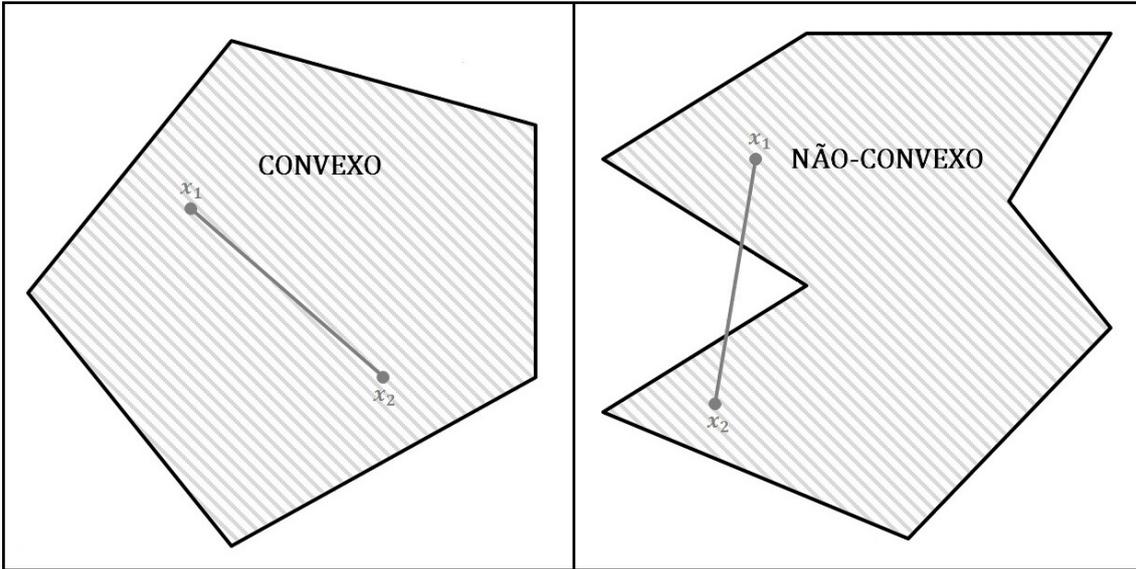


Figura 3.1: Conjunto convexo versus não-convexo

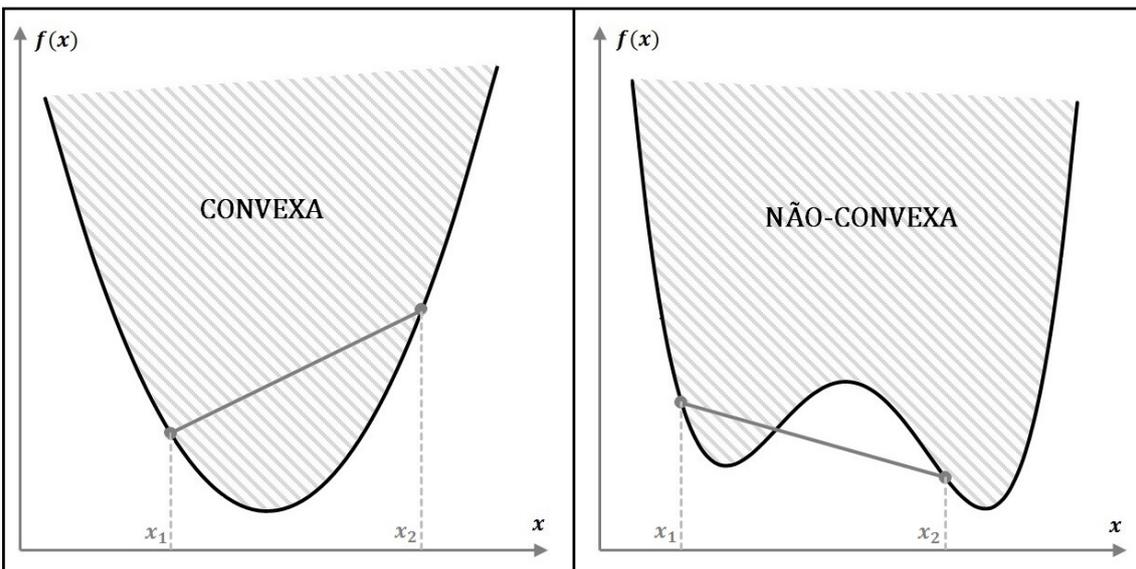


Figura 3.2: Função convexa versus não-convexa

### 3.1.1 Problema convexo

Seja o seguinte problema de otimização:

$$g(y) = \min_{x \in X} f(x, y)$$

Podemos dizer que se  $f(x, y)$  é uma função convexa em  $(x, y)$  então  $g(y)$  é uma função convexa em  $y$  se  $X$  for um conjunto convexo.

*Demonstração:* sejam  $y_1$  e  $y_2$  quaisquer, tais que:

$$g(y_1) = f(x_1, y_1), \quad x_1 \in X \tag{3.3a}$$

$$g(y_2) = f(x_2, y_2), \quad x_2 \in X \tag{3.3b}$$

Como  $X$  é um conjunto convexo:

$$\mu x_1 + (1 - \mu) x_2 \in X, \quad \mu \in \{0, 1\}$$

Além disso, como  $f(x, y)$  é função convexa em  $(x, y)$ :

$$\mu f(x_1, y_1) + (1 - \mu) f(x_2, y_2) \geq f(\mu x_1 + (1 - \mu) x_2, \mu y_1 + (1 - \mu) y_2)$$

E como, por definição do problema:

$$f(\mu x_1 + (1 - \mu) x_2, \mu y_1 + (1 - \mu) y_2) \geq g(\mu y_1 + (1 - \mu) y_2)$$

Então tem-se que:

$$\mu f(x_1, y_1) + (1 - \mu) f(x_2, y_2) \geq g(\mu y_1 + (1 - \mu) y_2)$$

Finalmente, da definição de  $g(y_1)$  e  $g(y_2)$ , obtém-se que:

$$\mu g(y_1) + (1 - \mu) g(y_2) \geq g(\mu y_1 + (1 - \mu) y_2)$$

Logo  $g(y)$  é função convexa em  $y$ .

Conforme visto no capítulo anterior, os algoritmos de programação dinâmica são baseados em estratégias de decomposição de um problema complexo em soluções recursivas de problemas menores, neste trabalho particularmente, um para cada estágio. O ponto-chave em relação a estes métodos consiste, no entanto, na incorporação, para cada problema, de uma função associada à solução ótima dos problemas dos estágios futuros em função dos estados do sistema. Isto significa que cada problema de um estágio  $t$  corresponde a um subproblema para a construção

da função de custo futuro a ser incorporada no problema do estágio  $t - 1$ , que por sua vez é um subproblema para o estágio  $t - 2$  e assim sucessivamente.

Seja o seguinte subproblema genérico para o estágio  $t$ :

$$w_t(x_{t-1}) = \min_{x_t \in X} c_t x_t$$

$$\text{s/a } G_t x_t = h_t - F_t x_{t-1}$$

Como a função objetivo e as restrições de acoplamento deste problema são lineares, então podemos afirmar que se o conjunto  $X$  é convexo então este subproblema é convexo em  $(x_t, x_{t-1})$  e, conseqüentemente a função  $w_t(x_{t-1})$  é convexa em  $x_{t-1}$ .

Esta propriedade de convexidade da função  $w_t(x_{t-1})$  permite a aplicação do algoritmo de PDDE em que as funções de custo futuro do estágio anterior são aproximadas pelos hiperplanos, ou cortes, gerados a partir da técnica de decomposição de Benders via extrapolações lineares dos valores da função  $w_t(x_{t-1})$  obtidos para determinados estados  $x_{t-1}$ .

Seja  $\hat{x}_{t-1}$  um determinado estado do sistema, então a solução ótima  $\hat{w}_t$  deste problema representa um ponto da função  $w_t(x_{t-1})$  correspondente a este estado. Pela teoria da decomposição de Benders, podemos criar uma aproximação desta função através da equação que define o hiperplano tangente à função neste ponto, e desta forma fazer uma extrapolação linear de pontos da função para todo o domínio do espaço de estados  $x_{t-1}$ :

$$\alpha_t = \hat{w}_t + \frac{\partial w_t(x_{t-1})}{\partial x_{t-1}} \Big|_{\hat{x}_{t-1}} (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})$$

onde:

$$\frac{\partial w_t(x_{t-1})}{\partial x_{t-1}} \Big|_{\hat{x}_{t-1}} = \frac{\partial w_t(x_{t-1})}{\partial (h_t - F_t x_{t-1})} \Big|_{\hat{x}_{t-1}} \cdot \frac{(h_t - F_t x_{t-1})}{\partial x_{t-1}} \Big|_{\hat{x}_{t-1}} = -\hat{\pi}_t \cdot F_t$$

onde  $\hat{\pi}_t$  são as variáveis duais associadas às restrições de acoplamento  $G_t x_t = h_t - F_t \hat{x}_{t-1}$  na solução ótima do problema.

A incorporação das equações dos hiperplanos no problema para o estágio  $t - 1$  representa a construção de uma função linear por partes que constitui uma aproximação externa da FCF original, conforme ilustrada na figura 3.3. Isto significa que quanto mais estados forem visitados no problema de cada estágio, mais hiperplanos serão gerados e mais bem aproximada será a FCF. Além disso, como os hiperplanos são tangentes à função nos pontos correspondentes aos estados para os

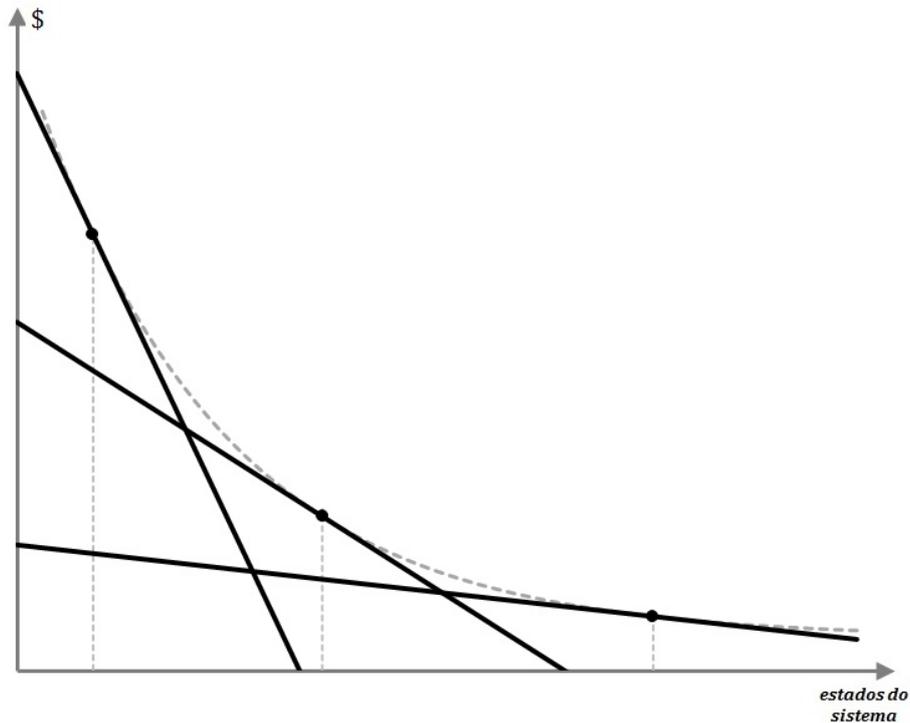


Figura 3.3: Extrapolação linear para FCF convexa

quais foram calculados, então pode-se dizer que a FCF é mais bem aproximada nas regiões ao redor destes pontos.

### 3.1.2 Problema de operação hidrotérmica

Os estados do sistema são determinados pela combinação das condições para as variáveis de estado. As variáveis de estado, por sua vez, são definidas pelo acoplamento gerado entre os estágios, como por exemplo, as variáveis de volumes armazenados no estágio anterior, presentes nas equações de balanço hídrico do modelo (2.18). Além disso, as afluências hidrológicas, variáveis que incorporam as incertezas do modelo, todavia não são totalmente aleatórias e tradicionalmente geradas a partir de um modelo autorregressivo de ordem  $p$ , para representar a dependência com os estágios anteriores. Com a finalidade de simplificar a notação da formulação, vamos desconsiderar esta dependência temporal das afluências e supor que os cenários hidrológicos são gerados por um modelo aleatório independente. Desta maneira, obtém-se, sem perda de generalidade para as metodologias apresentadas, que as variáveis de estado do modelo correspondem somente aos volumes iniciais armazenados.

Neste contexto, o processo de decomposição do modelo multi-estágio de operação de sistemas hidrotérmicos (2.18), como foi apresentado na seção 2.3.4, dá origem a problemas de operação de um estágio, cujo objetivo consiste em estabelecer o equilíbrio entre as decisões operativas do estágio corrente e os ganhos associados ao

nível de água armazenada no futuro. A formulação a seguir é considerada para o problema (PO), associado ao problema de operação do estágio  $t$ , solucionado pelo algoritmo de PDDE:

$$w_t^{PO}(v_{t-1}) = \min \sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j} + cdef \cdot r_t + \alpha_{t+1}$$

$$\text{s/a } v_{t,i} = v_{t-1,i} + a_{t,i} - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in \mathbb{M}_i} (u_{t,m} + s_{t,m}), \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.5a)$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t \quad (3.5b)$$

$$gh_{t,i} \leq gh_{t,i}^L(v_{t,i}, u_{t,i}), \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.5c)$$

$$gh_{t,i} \leq \bar{gh}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.5d)$$

$$gt_{t,j} \geq \underline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.5e)$$

$$gt_{t,j} \leq \bar{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.5f)$$

$$xt_{t,j} \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.5g)$$

$$\underline{v}_i \leq v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.5h)$$

$$\underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.5i)$$

$$\alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \sum_{i \in \mathbb{I}} \pi h_{t+1,i}^p \cdot (v_{t,i} - v_{t,i}^p), \quad p = 1, \dots, P_t \quad (3.5j)$$

onde  $P_t$  é o número de hiperplanos obtidos para a FCF durante o processo iterativo.

De acordo com a seção anterior, se este problema é convexo, a FCF é obtida através da construção dos cortes de Benders, cujas inclinações  $\pi h_{t+1,i}$  são dadas pelas variáveis duais associadas às restrições de balanço hídrico (3.5a) na solução ótima dos problemas para o estágio  $t + 1$  e para cada estado  $\hat{v}_{t,i}$ , ou seja:

$$\left. \frac{\partial w_{t+1}^{PO}(v_{t,i})}{\partial v_{t,i}} \right|_{\hat{v}_{t,i}} = \pi h_{t+1,i} \quad (3.6)$$

Entretanto, como visto anteriormente, a representação dos princípios físicos não-lineares relacionados aos componentes do sistema fazem com que este problema seja de natureza não-convexa. Em particular, a representação da função de produção hidrelétrica por uma função bi-linear  $gh_{t,i}^L$  e as decisões binárias de *unit commitment* das unidades termelétricas  $xt_{t,j}$ , dão origem a um modelo de programação linear inteira mista.

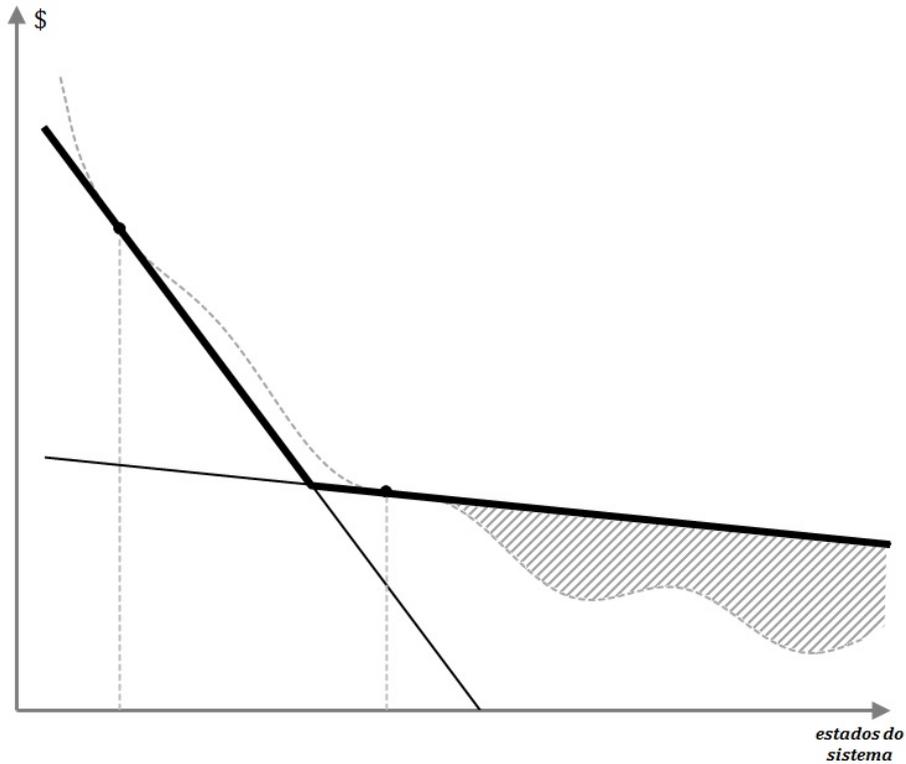


Figura 3.4: Extrapolação linear para FCF não-convexa

Seja o seguinte problema genérico para o estágio  $t$ :

$$w_t^{PO}(x_{t-1}) = \min_{x_t \in \tilde{X}} c_t x_t$$

$$\text{s/a } G_t x_t = h_t - F_t x_{t-1}$$

onde  $\tilde{X}$ , agora, é um conjunto não-convexo e, conseqüentemente, não se garante a convexidade da função  $w_t^{PO}$  em  $x_{t-1}$ .

Isto significa que a decomposição de Benders não pode ser diretamente aplicada porque nenhuma informação em relação às inclinações dos hiperplanos  $\frac{\partial w_t^{PO}(x_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$  pode ser extraída deste problema. As informações duais de problemas não-convexos, uma vez utilizadas para a extrapolação linear, podem resultar em hiperplanos cujas inclinações cortam grande parte da região viável do problema e, conseqüentemente, impossibilitam a obtenção de uma estratégia ótima através do algoritmo de PDDE, conforme observa-se na figura 3.4.

Nestes casos, torna-se necessário, portanto, o uso de técnicas para a construção de aproximações convexas das FCFs que permitam a aplicação do algoritmo de PDDE na solução do problema.

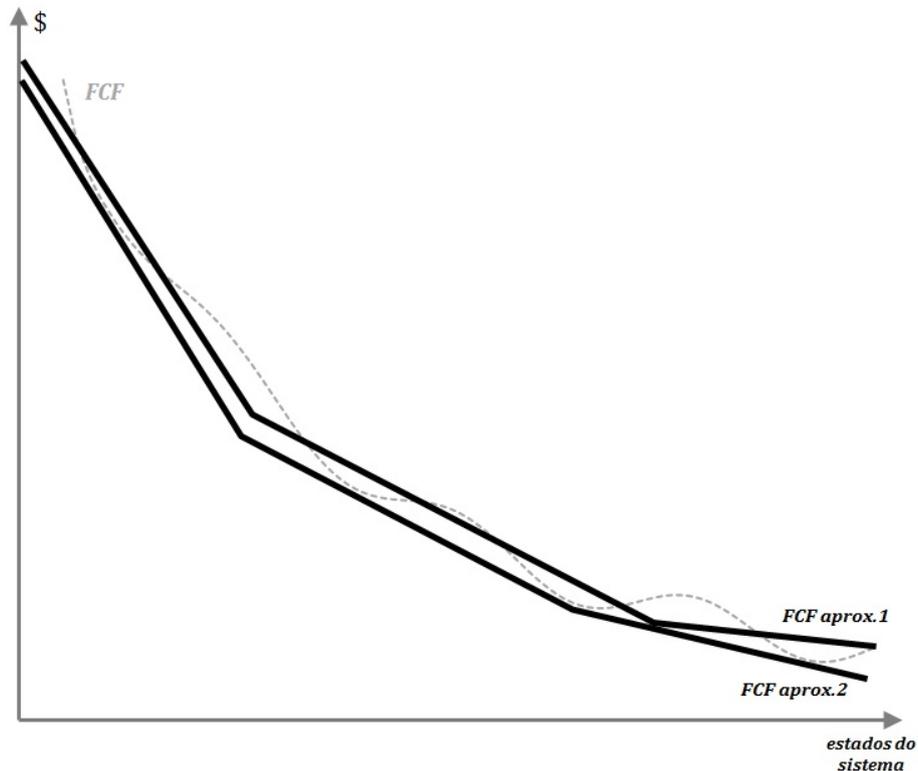


Figura 3.5: Aproximações para FCF não-convexa

### 3.1.3 Técnicas de convexificação

A figura 3.5 ilustra alguns exemplos de aproximações para uma FCF não-convexa e visa enfatizar a necessidade de busca pelas funções convexas mais bem ajustadas, uma vez que a convergência do algoritmo de PDDE depende diretamente da qualidade destas aproximações, isto é, da intensidade da distorção com relação às funções originais.

O objetivo deste capítulo é discutir os diferentes critérios de convexificação para solução do problema de operação hidrotérmica, classificados neste trabalho em duas categorias. Na seção 3.2, é descrita a técnica de **Convexificação da FCF**, onde a representação não-convexa dos componentes do sistema é matida na formulação do problema e métodos auxiliares são aplicados após a solução deste problema para gerar uma aproximação convexa da FCF. Na seção 3.3, descreve-se a técnica de **Convexificação do Componente**, onde a formulação original do problema é substituída a priori por uma aproximação convexa das funções que modelam os componentes não-convexos do sistema.

Sob o ponto de vista do melhor ajuste para estas funções, neste capítulo é levantada a questão da necessidade de obtenção de aproximações externas para as FCFs. Ainda que seja garantido o critério de otimalidade da solução, ao lidar com funções não-convexas, aproximações externas podem ser muito descoladas das funções originais em determinadas regiões e resultar em estratégias inadequadas

para a operação do sistema. Por esta razão, a escolha do critério de convexificação a ser adotado para solução de um problema pode ser uma tarefa não-trivial.

## 3.2 Convexificação da FCF

### 3.2.1 Descrição da metodologia

O critério de convexificação descrito nesta seção está baseado na manutenção da não-convexidade dos problemas e incorporação de um procedimento auxiliar após a solução dos problemas da fase de recursão para obtenção de hiperplanos válidos na construção de aproximações convexas externas das FCFs.

A equação do hiperplano associado à solução do problema de operação (3.5), para o estágio  $t$  e vetor de estados  $\hat{v}_{t-1}$  é:

$$\alpha_t = \hat{w}_t^{PO} + \sum_{i \in \mathbb{I}} \frac{\partial w_t^{PO}(v_{t-1,i})}{\partial v_{t-1,i}} \Big|_{\hat{v}_{t-1,i}} (v_{t-1,i} - \hat{v}_{t-1,i}) \quad (3.8)$$

onde as inclinações são definidas pela derivada da função objetivo em relação às variáveis de estado. Aplicando a regra da cadeia, tem-se que esta derivada corresponde ao produto da derivada da função objetivo em relação ao lado direito das restrições de acoplamento e derivada do lado direito em relação às variáveis de estado:

$$\frac{\partial w_t^{PO}(v_{t-1,i})}{\partial v_{t-1,i}} \Big|_{\hat{v}_{t-1,i}} = \frac{\partial w_t^{PO}(v_{t-1,i})}{\partial RHS_{t,i}} \Big|_{\hat{v}_{t-1,i}} \cdot \frac{\partial RHS_{t,i}}{\partial v_{t-1,i}} \Big|_{\hat{v}_{t-1,i}}, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.9)$$

onde o lado direito das restrições de acoplamento são:

$$RHS_{t,i} = v_{t-1,i} + a_{t,i}, \quad i \in \mathbb{I}.$$

Entretanto, como  $\frac{\partial w_t^{PO}(v_{t-1,i})}{\partial RHS_{t,i}} = \pi h_{t,i}$  e  $\frac{\partial RHS_{t,i}}{\partial v_{t-1,i}} = 1$ , então a derivada que define a inclinação do corte é dada pela variável dual associada às restrições de acoplamento do problema, no caso, as equações de balanço hídrico:

$$\frac{\partial w_t^{PO}(v_{t-1,i})}{\partial v_{t-1,i}} = \pi h_{t,i}, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.10)$$

Como foi visto, se a formulação do problema para um estágio é não-convexa, as variáveis duais associadas a quaisquer restrições não podem ser usadas para gerar um novo corte para a FCF, caso contrário, esta aproximação pode cortar grande parte da região viável do problema.

## Relaxação Lagrangeana

A metodologia de Convexificação da FCF discutida neste trabalho é baseada, portanto, na técnica de relaxação Lagrangeana das restrições de acoplamento do problema, isto é, as restrições que apresentam variáveis de estado do problema, cuja violação é penalizada na função objetivo por um vetor  $\lambda$  de multiplicadores de Lagrange.

De acordo com a metodologia, seja o seguinte problema não-convexo para um estágio  $t$ :

$$w_t^{PO}(x_{t-1}) = \min_{x_t \in \tilde{X}} c_t x_t$$

$$\text{s/a } G_t x_t = h_t - F_t x_{t-1}$$

Então o subproblema do Lagrangeano (SL) é formulado a seguir:

$$w_t^{SL}(\lambda_t, x_{t-1}) = \min_{x_t \in \tilde{X}} c_t x_t + \lambda_t (h_t - F_t x_{t-1} - G_t x_t)$$

Este problema pode ser equivalentemente expresso como:

$$w_t^{SL}(\lambda_t, x_{t-1}) = f(\lambda_t) - \lambda_t F_t x_{t-1}$$

$$\text{onde: } f(\lambda_t) = \min_{x_t \in \tilde{X}} c_t x_t + \lambda_t (h_t - G_t x_t)$$

Logo, tem-se que para qualquer valor de  $\lambda_t$  fixo, a função  $w_t^{SL}(\lambda_t, x_{t-1})$  é uma função linear, conseqüentemente convexa, em  $x_{t-1}$ .

Seja  $\hat{w}_t^{SL}$  a solução ótima do problema (SL) para um determinado vetor de multiplicadores de Lagrange  $\hat{\lambda}_t$  e vetor de estados  $\hat{x}_{t-1}$ , então o novo hiperplano obtido para a aproximação da FCF dos problemas do estágio  $t - 1$  é expresso por:

$$\alpha_t \geq \hat{w}_t^{SL} - \hat{\lambda}_t F_t (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}) \quad (3.12)$$

$$\text{onde: } \left. \frac{\partial w_t^{SL}(x_{t-1})}{\partial x_{t-1}} \right|_{\hat{x}_{t-1}} = -\hat{\lambda}_t F_t$$

Podemos mostrar que estes hiperplanos garantem limites inferiores para os valores da função original, isto é  $\alpha_t(x_{t-1}) \leq w_t^{PO}(x_{t-1})$ .

*Demonstração:* Seja  $\hat{\lambda}_t$  um vetor de multiplicadores de Lagrange, como, por definição o problema (SL) é uma relaxação do problema (PO), então para qualquer vetor de estados  $x_{t-1}$  tem-se que:

$$w_t^{PO}(x_{t-1}) \geq w_t^{SL}(\hat{\lambda}_t, x_{t-1}) = c_t \hat{x}_t + \hat{\lambda}_t (h_t - F_t x_{t-1} - G_t \hat{x}_t)$$

onde o símbolo  $\hat{\cdot}$  sobre as variáveis indica valor associado à solução ótima.

Adicionando nesta expressão, o seguinte termo:

$$\hat{\lambda}_t (-F_t \hat{x}_{t-1} + F_t \hat{x}_{t-1})$$

obtem-se, através de simples manipulação algébrica, que:

$$w_t^{PO}(x_{t-1}) \geq c_t \hat{x}_t + \hat{\lambda}_t (h_t - F_t \hat{x}_{t-1} - G_t \hat{x}_t) - \hat{\lambda}_t F_t (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})$$

Portanto:

$$w_t^{PO}(x_{t-1}) \geq \hat{w}_t^{SL} - \hat{\lambda}_t F_t (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})$$

Da expressão do hiperplano definido em (3.12), obtém-se que:

$$w_t^{PO}(x_{t-1}) \geq \alpha_t(x_{t-1})$$

Isto significa que a solução do problema (SL) pode ser usada na construção de um corte válido para a obtenção de uma aproximação convexa e externa da FCF, garantindo limite inferior para a solução do problema (PO).

A figura 3.6 mostra o exemplo de cortes válidos para a função  $w_t^{PO}$  obtido para determinados estados do sistema. Observa-se que, para estes pontos, a informação dual associada à solução do problema original não-convexo resultaria em inclinações muito distorcidas para a construção de uma aproximação desta função.

É importante ressaltar que, ainda que qualquer valor para  $\hat{\lambda}_t$  possa ser usado para a construção de uma aproximação externa da FCF e conseqüentemente garantir um limite inferior para a solução do problema, a convergência do algoritmo de PDDE só ocorre se este limite estiver dentro do intervalo de confiança do limite superior. Portanto, uma aproximação fraca é obtida por um hiperplano muito distante da função original, ou um corte fraco. Por esta razão, a aproximação externa mais bem ajustada é obtida pelos cortes que garantem os melhores limites inferiores dos valores da função original, ou seja, aqueles cujos multiplicadores de Lagrange maximizam o Lagrangeano:

$$w_t^{RL} = \max_{\lambda_t} w_t^{SL}(\lambda_t, \hat{x}_{t-1}) \quad (3.13)$$

É possível mostrar [25] que a solução do problema (3.13) para cada estado do sistema representa a envoltória convexa da função original, isto é:

$$\text{conv}(w_t^{PO}(x_{t-1})) = w_t^{RL} \quad (3.14)$$

onde  $\text{conv}()$  representa o operador de convexificação.

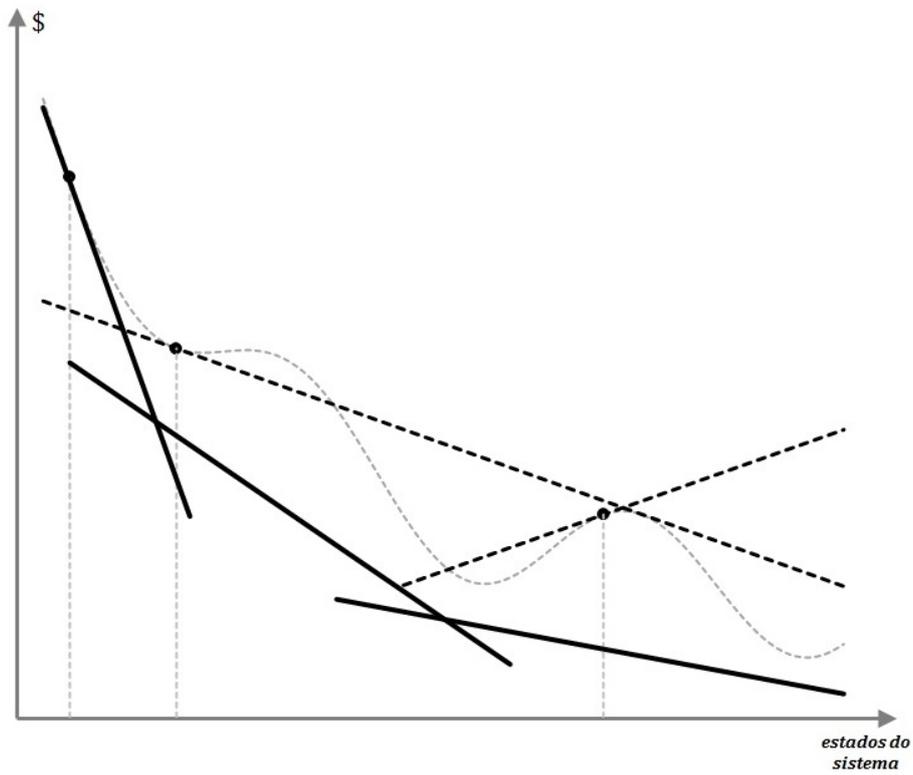


Figura 3.6: Aproximação via Convexificação da FCF

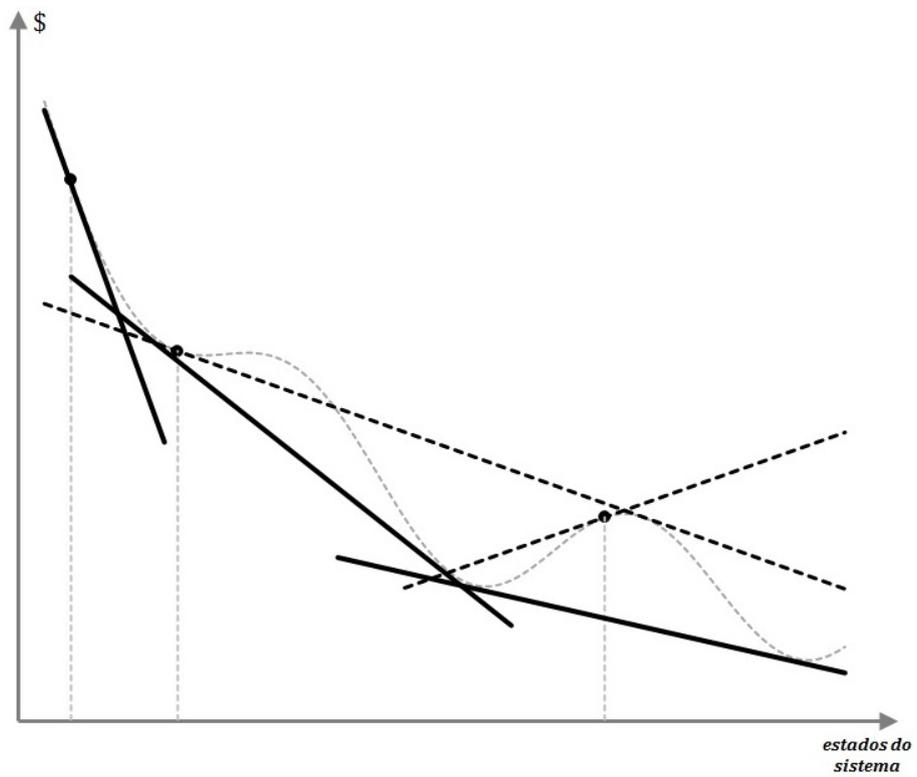


Figura 3.7: Envoltória convexa via Convexificação da FCF

Esta aproximação por envoltória convexa está ilustrada na figura 3.7.

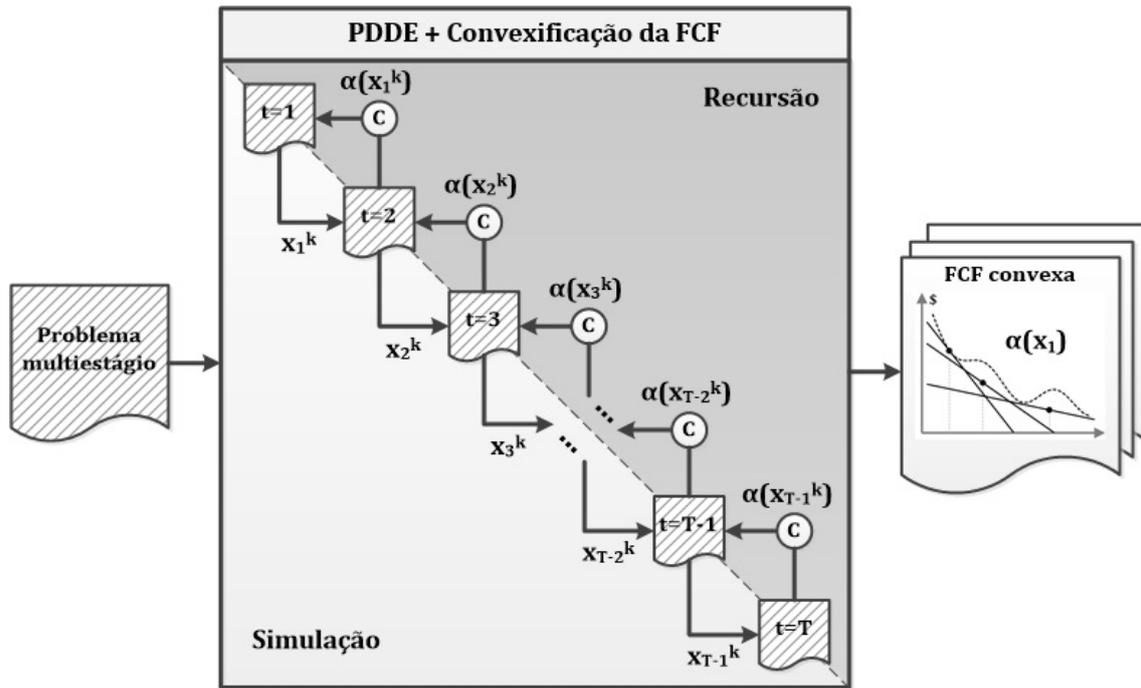


Figura 3.8: Esquema de solução via Convexificação da FCF

Este problema de maximização do Lagrangeano, entretanto, pode conduzir a um esforço computacional muito grande quando resolvido pelos procedimentos iterativos tradicionais. Levando em conta que esta aplicação da técnica de relaxação Lagrangeana não tem por objetivo solucionar o problema em si, mas de permitir a construção de cortes válidos para as FCFs, então podemos considerar diversas estratégias para a obtenção destes multiplicadores a fim de reduzir o custo computacional envolvido.

No entanto, são os multiplicadores quem determinam a "qualidade" das aproximações uma vez que estão diretamente associados à definição dos coeficientes dos hiperplanos. Isto significa que, ainda que não precisam ser necessariamente ótimos, é natural que valores próximos ao ótimo resultem em melhores aproximações, isto é, funções cujos valores são limites inferiores maiores.

Uma das principais contribuições desta tese consiste exatamente na incorporação de um novo algoritmo eficiente para a otimização da função dual. O procedimento proposto neste trabalho, e descrito na seção a seguir, destaca-se essencialmente pela estratégia que inclui o uso da solução ótima do problema original não-convexo para buscar melhores valores para os multiplicadores de Lagrange.

### 3.2.2 Algoritmo de convexificação

A figura 3.8 apresenta o esquema de solução de uma problema não-convexo utilizando uma extensão do algoritmo de PDDE que incorpora um procedimento para a convexificação da FCF.

O problema original (PO) a ser resolvido, como vamos ver, apesar de não-convexo devido à incorporação de variáveis binárias, é de pequeno porte, e portanto considera-se que pode ser resolvido com custo computacional reduzido, se comparado com o problema completo original. A solução deste problema, apesar de não produzir as informações necessárias para a construção de cortes válidos para a FCF, fornece condições para a aplicação do algoritmo de solução proposto neste trabalho.

Este algoritmo consiste em um procedimento iterativo que busca um equilíbrio entre o esforço necessário para encontrar multiplicadores de Lagrange suficientemente próximos ao ótimo e a qualidade das aproximações das FCFs construídas a partir destes valores. A cada problema da fase de recursão do algoritmo de PDDE, descrito na seção 2.4.2, para um estágio  $t$ , estado  $k$  e realização  $l$  das incertezas, o procedimento a seguir é adotado para a obtenção de um corte associado à aproximação convexa da FCF do estágio  $t - 1$ .

#### Procedimento de Convexificação da FCF

##### 1. Solução do problema original (PO)

Resolve o modelo de programação linear inteira mista correspondente ao problema original de operação de um estágio (PO):

$$\begin{aligned}
w_t^{PO}(v_{t-1}^k, a_t^l) = \min \quad & \sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j} + cdef \cdot r_t + \alpha_{t+1} \\
\text{s/a} \quad & v_{t,i} = v_{t-1,i}^k + a_{t,i}^l - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in \mathbb{M}_i} (u_{t,m} + s_{t,m}), \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t \\
& gh_{t,i} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M gh_{i,n,m} \cdot \gamma_{i,n,m}, \quad i \in \mathbb{I} \\
& v_{t,i} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{i,n} \cdot \gamma_{i,n,m}, \quad i \in \mathbb{I} \\
& u_{t,i} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{i,m} \cdot \gamma_{i,n,m}, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \gamma_{i,n,m} = 1, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{n=1}^{N-1} x_{i,n} = 1, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{m=1}^{M-1} y_{i,m} = 1, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \gamma_{i,n,m} \leq x_{i,n} + x_{i,n+1}, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M, i \in \mathbb{I} \\
& \gamma_{i,n,m} \leq y_{i,m} + y_{i,m+1}, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M, i \in \mathbb{I} \\
& \gamma_{i,n,m} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M, i \in \mathbb{I} \\
& x_{i,n} \in \{0, 1\}, \quad n = 1, \dots, N-1, i \in \mathbb{I} \\
& y_{i,m} \in \{0, 1\}, \quad m = 1, \dots, M-1, i \in \mathbb{I} \\
& gh_{t,i} \leq \bar{gh}_i, \quad i \in \mathbb{I} \\
& gt_{t,j} \geq \underline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad j \in \mathbb{J} \\
& gt_{t,j} \leq \bar{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad j \in \mathbb{J} \\
& xt_j \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathbb{J} \\
& \underline{v}_i \leq v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \sum_{i \in \mathbb{I}} \pi_{t+1,i}^p \cdot (v_{t,i} - v_{t,i}^p), \quad p = 1, \dots, P_t
\end{aligned}$$

Da solução ótima de (PO) obtém-se os valores para a função objetivo  $w_t^{PO}$  e variáveis binárias  $x_{i,n}^{PO}$ ,  $y_{i,m}^{PO}$  e  $xt_j^{PO}$ .

## 2. Solução do problema localmente convexificado (PF)

Resolve o problema localmente convexificado (PF), que corresponde ao problema (PO) mantendo fixas as variáveis binárias, ou seja, fazendo:

$$\begin{aligned}x_{i,n} &= x_{i,n}^{PO}, & n = 1, \dots, N - 1, i \in \mathbb{I} \\y_{i,m} &= y_{i,m}^{PO}, & m = 1, \dots, M - 1, i \in \mathbb{I} \\xt_j &= xt_j^{PO}, & j \in \mathbb{J}\end{aligned}$$

Da solução ótima de (PF) obtém-se as variáveis duais  $\hat{\pi}^{PF}_i$  associadas às restrições de balanço hídrico.

## 3. Inicialização dos multiplicadores

Utiliza variáveis duais do problema localmente convexificado como valor inicial para os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_{t,i}^{k,l} = \hat{\pi}_i^{PF}, \quad i \in \mathbb{I}$$

## 4. Solução do subproblema Lagrangeano (SL)

Usa vetor de multiplicadores de Lagrange para resolver o subproblema Langrangiano (SL) obtido a partir da relaxação Lagrangeana das restrições de balanço hídrico do problema original (PO):

$$\begin{aligned}
w_t^{SL}(v_{t-1}^k, a_t^l) = & \min \sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j} + cdef \cdot r_t + \alpha_{t+1} + \\
& + \sum_{i \in I} \lambda_{t,i}^{k,l} \left( v_{t-1,i}^k + a_{t,i}^l - v_{t,i} - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in \mathbb{M}_i} (u_{t,m} + s_{t,m}) \right) \\
\text{s/a } & \sum_{i \in I} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t \\
& gh_{t,i} \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M gh_{i,n,m} \cdot \gamma_{i,n,m}, \quad i \in \mathbb{I} \\
& v_{t,i} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{i,n} \cdot \gamma_{i,n,m}, \quad i \in \mathbb{I} \\
& u_{t,i} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{i,m} \cdot \gamma_{i,n,m}, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \gamma_{i,n,m} = 1, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{n=1}^{N-1} x_{i,n} = 1, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \sum_{m=1}^{M-1} y_{i,m} = 1, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \gamma_{i,n,m} \leq x_{i,n} + x_{i,n+1}, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M, i \in \mathbb{I} \\
& \gamma_{i,n,m} \leq y_{i,m} + y_{i,m+1}, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M, i \in \mathbb{I} \\
& \gamma_{i,n,m} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N; m = 1, \dots, M, i \in \mathbb{I} \\
& x_{i,n} \in \{0, 1\}, \quad n = 1, \dots, N-1, i \in \mathbb{I} \\
& y_{i,m} \in \{0, 1\}, \quad m = 1, \dots, M-1, i \in \mathbb{I} \\
& gh_{t,i} \leq \bar{gh}_i, \quad i \in \mathbb{I} \\
& gt_{t,j} \geq \underline{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad j \in \mathbb{J} \\
& gt_{t,j} \leq \bar{gt}_j \cdot xt_{t,j}, \quad j \in \mathbb{J} \\
& xt_j \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathbb{J} \\
& \underline{v}_i \leq v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad i \in \mathbb{I} \\
& \alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \sum_{i \in \mathbb{I}} \pi_{t+1,i}^p \cdot (v_{t,i} - v_{t,i}^p), \quad p = 1, \dots, P_t
\end{aligned}$$

Da solução ótima do problema (SL) obtém-se o valor para a função objetivo  $w_t^{SL}$  e para as variáveis  $v_{t,i}^{SL}$ ,  $u_{t,i}^{SL}$  e  $s_{t,i}^{SL}$ .

## 5. Verificação do critério de parada

A verificação de convergência deste procedimento iterativo atende à seguinte lógica:

- \* Se a solução do Lagrangeano atende a um critério de tolerância em relação à solução do problema original, isto é:

$$w_t^{PO} - w_t^{SL} \leq \epsilon_1$$

então o algoritmo pára e a informação  $w_t^{SL} (v_{t-1,i}^k, a_t^l)$  e  $\lambda_{t,i}^{k,l}$  é armazenada para construção dos hiperplanos conforme a equação:

$$\alpha_{t-1} \geq w_t^k + \sum_{i \in I} \lambda_{t,i}^k (v_{t-1,i} - v_{t-1,i}^k)$$

onde

$$w_t^k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_t^{SL} (v_{t-1,i}^k, a_t^l) \quad \text{e} \quad \lambda_{t,i}^k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \lambda_{t,i}^{k,l}, \quad i \in \mathbb{I}$$

- \* Caso contrário, se a solução do Lagrangeano não atende ao critério de tolerância em relação à solução do problema original, então verifica-se duas outras condições:

- \* Se não houve progresso em relação à solução da iteração anterior, ou seja:

$$|\tilde{w}^{SL} - w_t^{SL}| \leq \epsilon_2$$

isto significa que o problema original é possivelmente de natureza altamente não-convexa e portanto nenhum esforço computacional adicional deve ser feito para a busca de melhores multiplicadores uma vez que existe uma grande distorção entre a aproximação externa e a função definida pelo problema original. Neste caso, o algoritmo é interrompido e usa a informação disponível para construção do hiperplano, ainda que considerado um corte fraco.

- \* Caso contrário, se houve progresso, então armazena-se o valor da solução  $\tilde{w}^{SL} = w_t^{SL}$  e atualiza-se o vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{t,i}^{k,l}$  na direção de maximização do Lagrangeano de forma a se aproximar da solução ótima do problema original.

## 6. Atualização dos multiplicadores

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita através do cálculo de passos obtidos pelo método de otimização do subgradiente [54], embora, para diversas aplicações, este método apresente lenta convergência e deixe de ser, portanto, de interesse prático. Entretanto, ao contrário destas aplicações onde limites inferiores da solução do subproblema do Lagrangeano são desconhecidos, neste caso específico, a solução ótima do problema original (PO) é o melhor limite inferior para o cálculo dos passos de atualização:

$$\lambda_{t,i}^{k,l} = \lambda_{t,i}^{k,l} - \mu \cdot \phi_i, \quad i \in \mathbb{I}$$

onde o tamanho do passo  $\mu$  e o subgradiente  $\phi_i$  são calculados como:

$$\mu = \frac{w^{SL} - w^{PO}}{\sum_{i \in \mathbb{I}} (\phi_i)^2}$$

e

$$\phi_i = v_{t,i}^{SL} - v_{t-1,i} - a_{t,i} + u_{t,i}^{SL} + s_{t,i}^{SL} - \sum_{m \in M_i} (u_{t,m}^{SL} + s_{t,m}^{SL}), \quad i \in \mathbb{I}$$

O algoritmo retorna então ao passo 4. para solução de novo subproblema do Lagrangeano com multiplicadores atualizados.

### 3.2.3 Considerações importantes

Em resumo, esta metodologia tem uma abordagem interessante em relação a diversos aspectos. Primeiramente por se tratar de uma aplicação não convencional da técnica de relaxação Lagrangeana, uma vez que não está sendo utilizada para solucionar o problema, mas para a obtenção de aproximação convexa das FCFs.

Através da relaxação das restrições de acoplamento do modelo e penalização na função objetivo utilizando um vetor de multiplicadores de Lagrange, é possível obter um corte válido para a FCF a partir da solução deste problema. Isto significa que ainda que não seja necessária a obtenção de multiplicadores ótimos, é importante considerar uma estratégia para garantir cortes fortes na construção da FCF.

Na prática, os problemas de operação para cada estágio, ainda que não-convexos, podem ser facilmente solucionados por algoritmos de programação inteira, como *branch-and-bound*. O algoritmo proposto, portanto, visa tirar vantagem da disponibilidade da solução ótima dos problemas originais (PO), possibilitando tornar mais eficiente a busca por melhores valores para os multiplicadores de Lagrange através de duas estratégias:

- Fornecendo condições para construção de um problema localmente convexificado, cuja solução serve de valor inicial para os multiplicadores de Lagrange;
- Fornecendo um valor eficiente de limite inferior da solução do Lagrangeano para o método de otimização do subgradiente durante a busca pelos multiplicadores ótimos.

Adicionalmente, foi visto que esta solução permite ainda uma estimação do nível da não-convexidade do problema:

Se um problema de operação originalmente não apresenta grande nível de não-convexidade, então a solução do problema Lagrangeano usando as variáveis duais de um problema localmente convexificado deve ser próxima à solução ótima do problema, o que torna esta estratégia adequada para a obtenção de multiplicadores de Lagrange para construção de cortes inferiores mais fortes.

Entretanto, se o problema original for muito não-convexo, a diferença entre as soluções do subproblema do Lagrangeano e a solução ótima vai ser grande e mesmo utilizando todo esforço computacional disponível para obter o multiplicador de Lagrange que maximize esta função, ainda assim a melhor aproximação da FCF obtida com os cortes inferiores pode não resultar em uma boa política operativa.

Portanto, este tipo de análise pode ser muito interessante sob o ponto de vista do planejador, porque dá origem ao questionamento em relação à eficácia da construção de FCFs externas a partir do critério de Convexificação da FCF, para quaisquer tipos de problemas.

### 3.3 Convexificação do Componente

#### 3.3.1 Descrição da metodologia

A abordagem de Convexificação do Componente consiste no critério mais aplicado na literatura e está baseada na substituição das restrições que introduzem as não-convexidades no problema por uma formulação que resulta em um conjunto convexo de soluções viáveis para o problema. Diferentemente da metodologia de Convexificação das FCFs, em que o procedimento de convexificação é aplicado a cada problema durante a fase de recursão do algoritmo de PDDE, no caso da Convexificação do Componente, o procedimento é aplicado uma única vez, antes do início do processo iterativo de solução.

Isto significa que, após realizado o trabalho de convexificação do problema, o algoritmo de PDDE é aplicado na sua forma tradicional, como descrito na seção

2.4.2. Portanto, nesta seção discute-se apenas a reformulação dos componentes do problema de operação originalmente não-convexos.

Para o problema que estamos abordando nesta tese, as fontes de não-convexidades consideradas são: a função bi-linear de produção hidrelétrica e as decisões binárias de *unit commitment*. Dentre as técnicas tradicionalmente empregadas na literatura para a convexificação deste problema estão, por exemplo, a construção de envoltória convexa através de função linear-por-partes e o modelo de envelope de McCormick [39].

Seja qual for a técnica utilizada para substituição do problema, ao torná-lo convexo, garantimos a convexidade das FCFs e permitimos a aplicação da técnica de decomposição de Benders para geração de cortes que aproximam estas funções. Entretanto, por definição, esta aproximação só vai garantir limites inferiores para os valores da FCF original se o problema resultante, além de convexo é ainda uma aproximação externa do problema original. Isto significa que a substituição das funções não-convexas do problema deveriam ser feitas através de aproximações externas.

Todavia, como foi comentado na seção anterior, a melhor aproximação externa da FCF é obtida através dos multiplicadores que correspondem à solução ótima do problema de máximo Lagrangeano, considerando a relaxação das restrições de acoplamento do problema. O que queremos dizer é que independente da obtenção da melhor aproximação externa para os componentes, a solução deste problema convexificado não vai garantir limites inferiores melhores para os valores da FCF original do que a aproximação obtida a partir da solução do máximo Lagrangeano.

### Comparação dos limites inferiores entre critérios de convexificação

Suponha o seguinte problema não-convexo:

$$w_t(\hat{x}_{t-1}) = \min_{x_t \in \tilde{X}} c_t x_t \quad (3.18)$$

$$\text{s/a } G_t x_t = h_t - F_t \hat{x}_{t-1}$$

onde  $\tilde{X}$  é um conjunto não-convexo.

De acordo com o critério de Convexificação do Componente, o problema é substituído por uma formulação como:

$$w_t^{PC} = \min_{x_t \in \tilde{X}'} c_t x_t \quad (3.19)$$

$$\text{s/a } G_t x_t = h_t - F_t \hat{x}_{t-1}$$

onde  $\tilde{X}'$  representa uma aproximação externa convexa do conjunto  $\tilde{X}$ , isto é,  $\tilde{X} \subset \tilde{X}'$ .

Seja  $\pi_t^{PC}$  o vetor de variáveis duais associado às restrições de acoplamento na solução ótima do problema (3.19). Então o corte de Benders da FCF é expresso por:

$$\alpha_t^{PC} \geq w_t^{PC} - \pi_t^{PC} F_t(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}) \quad (3.20)$$

De acordo com o critério de Convexificação da FCF, se consideramos o vetor de multiplicadores de Lagrange igual a  $\pi_t^{PC}$ , então o problema do Lagrangeano é formulado como:

$$w_t^{SL} = \min_{x_t \in \tilde{X}} c_t x_t + \pi_t^{PC} (h_t - F_t \hat{x}_{t-1} - G_t x_t) \quad (3.21)$$

O corte de Benders gerado pela solução deste problema é expresso por:

$$\alpha_t^{SL} \geq w_t^{SL} - \pi_t^{PC} F_t(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}) \quad (3.22)$$

Considerando agora o problema do Lagrangeano representando as restrições convexas da mesma maneira que o problema (3.19), isto é:

$$w_t^{SL'} = \min_{x_t \in \tilde{X}'} c_t x_t + \pi_t^{PC} (h_t - F_t \hat{x}_{t-1} - G_t x_t) \quad (3.23)$$

Por definição, temos que:

$$w_t^{PC} = w_t^{SL'} \leq w_t^{SL}$$

porque o problema convexificado (SL') é uma relaxação do problema não-convexo (SL).

Nota-se que ambos os cortes (3.20) e (3.22) possuem mesma inclinação  $\pi_t^{PC}$ , entretanto, como  $w_t^{SL} \geq w_t^{PC}$  então  $\alpha_t^{SL} \geq \alpha_t^{PC}$  e portanto concluímos que os limites inferiores obtidos pela Convexificação da FCF são maiores ou iguais aos limites inferiores obtidos pela Convexificação do Componente, que aproxima externamente uma função não-convexa. A figura 3.9 mostra um exemplo em que os cortes possuem mesma inclinação, mas a diferença do valor do termo independente desloca verticalmente os hiperplanos, tornando clara a dominância de um corte sobre o outro.

Esta análise serve para demonstrar que não há sentido em adotar um critério de Convexificação do Componente se existe necessidade de garantir limites inferiores para os valores da FCF, uma vez que a solução de um problema aproximado externamente resulta em cortes mais fracos que o problema do Lagrangeano, considerando como multiplicadores as variáveis duais do primeiro. Em última

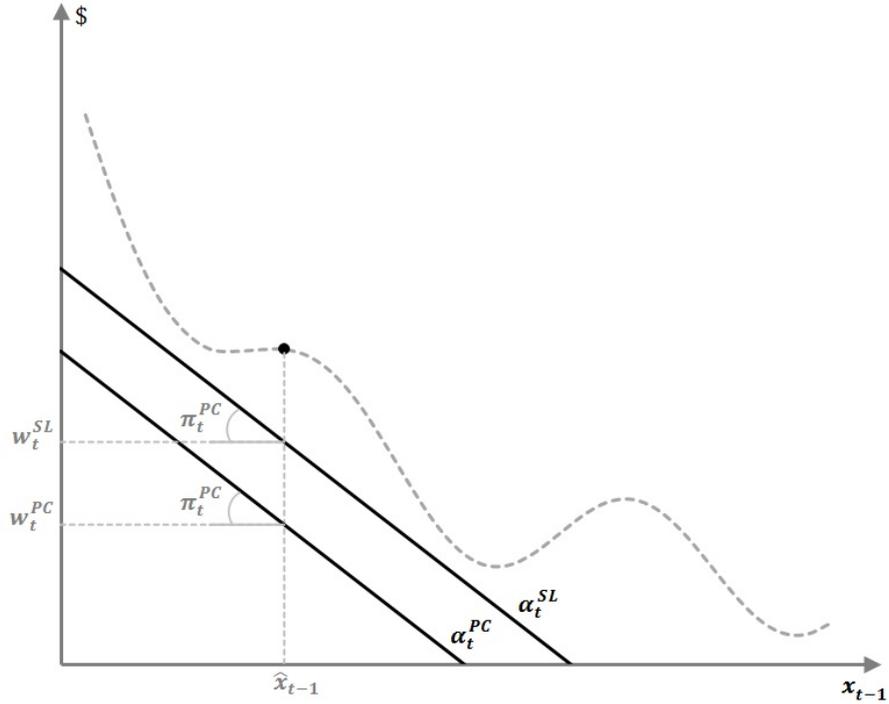


Figura 3.9: Limites inferiores para cada critério de convexificação

análise, a solução do problema aproximado externamente poderia servir como condição inicial para busca de multiplicadores mais próximos ao ótimo dentro do esquema de Convexificação da FCF.

Além disso, como foi mencionado anteriormente, aproximações externas, apesar de garantirem que não sejam cortadas soluções viáveis do problema, podem resultar em políticas operativas muito distorcidas, se o nível de não-convexidade é elevado. Por estas razões, a metodologia descrita para o critério de Convexificação do Componente consiste na construção de funções que visam obter melhores estratégias de operação, sem necessariamente subestimar os valores das FCFs originais.

A seguir é apresentada a metodologia de Convexificação do Componente, considerada neste trabalho, que consiste na substituição de um conjunto de funções não-convexas por aproximações lineares-por-partes que visam atender a dois objetivos:

- Tornar convexo o conjunto de soluções viáveis para o problema; e
- Minimizar o erro médio de aproximação em relação à função original.

### 3.3.2 Formulação matemática

Seja  $g(x)$  uma função genérica não-convexa definida por um conjunto de restrições do problema. Considera-se, inicialmente, a discretização de  $N$  pontos para a variável  $x$ :

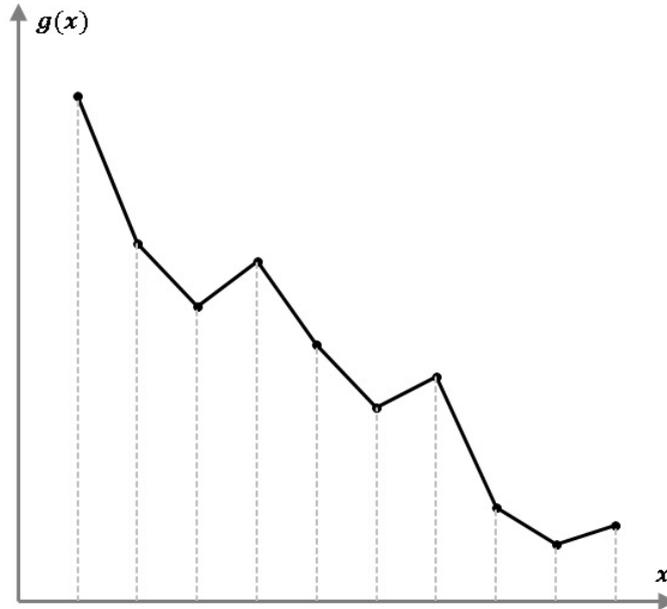


Figura 3.10: Discretização da função não-convexa

$(x_n, n = 1, \dots, N)$ , considerando o espaço viável dos valores para a variável, conforme ilustrada na figura 3.10. Obtém-se então uma aproximação de primeira ordem da função através da construção de segmentos lineares que passam pelos pontos  $g(x_n)$ , de acordo com o modelo a seguir.

Seja  $K$  o número total de pares de pontos discretizados da função, então, para cada par  $k$ , dado pelas discretizações  $(x_{k1}, x_{k2})$ , é construído um hiperplano  $g_k^A(x)$  que passa pelos pontos  $g(x_{k1})$  e  $g(x_{k2})$  da função original, conforme a equação a seguir:

$$g_k^A(x) = a_k \cdot x + b_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.24)$$

onde os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são a solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} g_k^A(x_{k1}) &= a_k \cdot x_{k1} + b_k \\ g_k^A(x_{k2}) &= a_k \cdot x_{k2} + b_k \end{aligned}$$

Como uma função linear é, por definição uma função convexa, e como o máximo de funções convexas também é uma função convexa, então a aproximação convexa da função  $g(x)$  é dada pelo máximo dos hiperplanos construídos, ou seja:

$$g^A(x) = \max_{k=1, \dots, K} \{g_k^A(x)\} \quad (3.25)$$

Todavia, como a função  $g^A(x)$  em um ponto qualquer corresponde sempre ao hiperplano que maximiza o valor da função, este procedimento de linearização

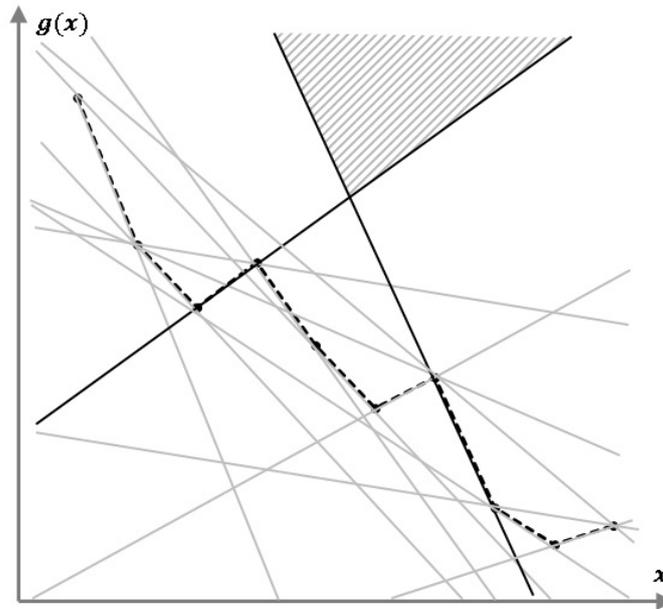


Figura 3.11: Aproximação convexa por maximização dos hiperplanos

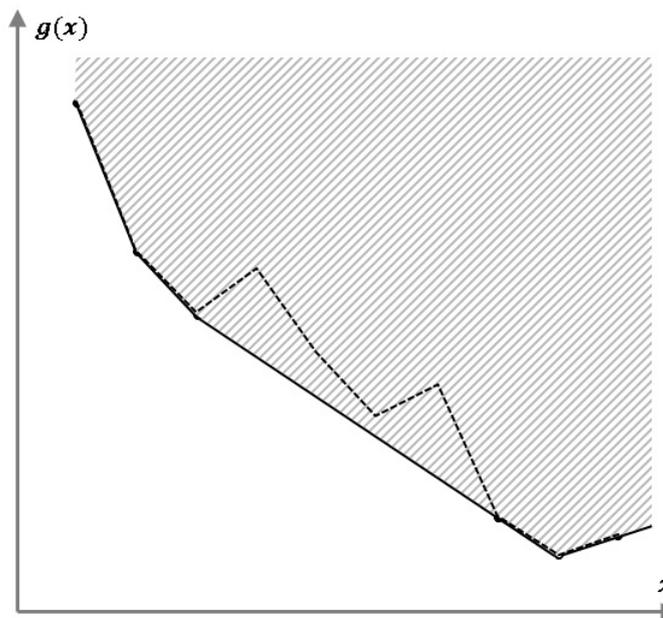


Figura 3.12: Envoltória convexa da função

sozinho pode não ser suficiente para resultar em uma boa aproximação de uma função não-convexa  $g(x)$ , conforme ilustrado na figura 3.11.

Por esta razão, constrói-se então uma envoltória convexa a  $g(x)$ , a qual é definida como o menor conjunto convexo que contém a área sobre a função, como mostra a figura 3.12.

O algoritmo de cálculo da envoltória convexa pode ser resumido da seguinte forma: para cada hiperplano  $g_k^A(x)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , é verificado se  $g(x_n) \geq g_k^A(x_n)$  para todos os pontos discretizados  $x_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Se isto for verdadeiro, então

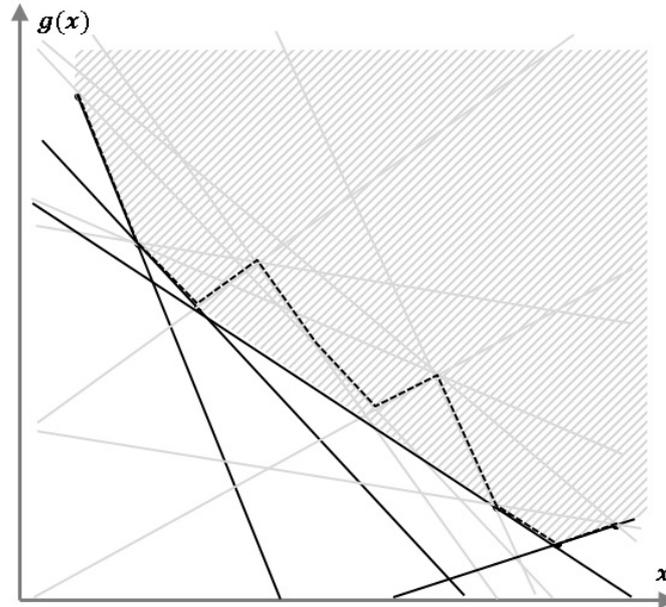


Figura 3.13: Eliminação de hiperplanos que não pertencem à envoltória convexa

o hiperplano  $k$  pertence à envoltória convexa  $K_C$  da função  $g(x)$ . A equação que define a aproximação convexa é dada, portanto, por:

$$g^A(x) = \max_{k=1, \dots, K_C} \{g_k^A(x)\} \quad (3.26)$$

A figura 3.13 ilustra este procedimento de seleção dos hiperplanos para a envoltória convexa.

Cabe ressaltar que, quanto maior for o número de discretizações utilizadas na construção da função  $g^A(x)$ , menores serão os erros cometidos nessa aproximação. Por outro lado, cada novo hiperplano obtido corresponde a uma nova restrição adicionada ao problema e contribui para um maior tempo de processamento na resolução do problema. Portanto, deve-se buscar um equilíbrio entre a qualidade das aproximações e o tempo de processamento.

A desvantagem associada ao tratamento de funções por envoltória convexa consiste no fato de que estes hiperplanos, calculados segundo este procedimento, são sempre aproximações otimistas da função original, ou seja, os valores dados pelos segmentos selecionados serão sempre inferiores aos da função  $g(x)$ . Para eliminar este efeito e reduzir o erro médio de aproximação, ajusta-se um fator de correção  $\delta$ , calculado de modo a minimizar os desvios quadráticos entre  $g^A(x)$  e  $g(x)$ . Com a aplicação deste fator, têm-se então a função linear-por-partes aproximada corrigida,  $g^C(x)$ , dada pela expressão a seguir e ilustrada pela figura 3.14.

$$g^C(x) = \delta \cdot g^A(x) \quad (3.27)$$

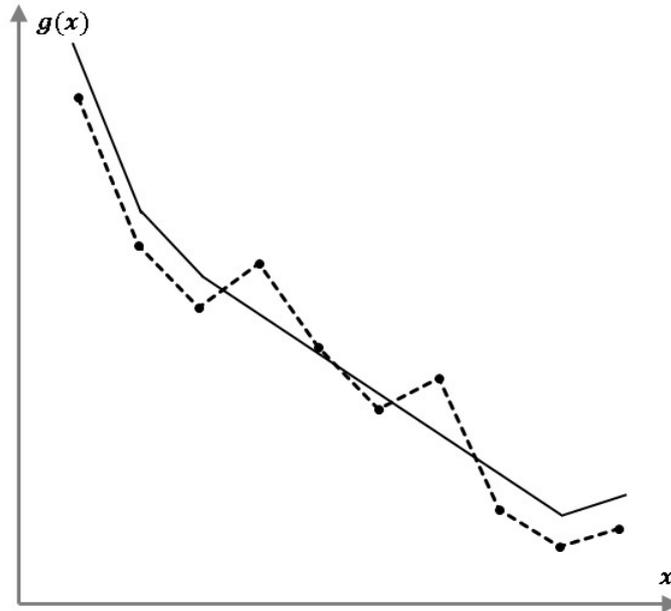


Figura 3.14: Aproximação linear-por-partes convexa

Todavia, para funções com regiões fortemente não-convexas, o desvio médio não pode ser reduzido a um valor tão pequeno quanto se queira, a partir de um maior refinamento da grade de discretização. Nestas situações, sempre haverá um desvio médio mínimo que não pode ser evitado em uma aproximação linear-por-partes convexa.

### Função custo térmico

No caso da não-convexidade associada às decisões de *unit commitment* das usinas térmicas, o seguinte procedimento é adotado:

#### 1. Construção da função custo imediato

Seja a variável  $gH_t$  a soma da geração para todas as hidrelétricas do sistema em um determinado estágio  $t$ , isto é:

$$gH_t = \sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} \quad (3.28)$$

Então uma função custo imediato  $ci_t$  pode ser obtida através da discretização de  $N$  valores para a variável  $gH_t$  e solução de um problema de otimização de programação linear inteira mista para cada valor de  $gH_{t,n}$ ,  $n = 1, \dots, N$  em cada estágio  $t = 1, \dots, T$ :

$$\begin{aligned}
c_t(gH_{t,n}) = \min & \sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j,n} + cdef \cdot r_{t,n} \\
\text{s/a} & \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j,n} + r_{t,n} = d_t - gH_{t,n} \quad (3.29a)
\end{aligned}$$

$$gt_{t,j,n} \geq \underline{gt}_j \cdot xt_{t,j,n}, \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.29b)$$

$$gt_{t,j,n} \leq \overline{gt}_j \cdot xt_{t,j,n}, \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.29c)$$

$$xt_{t,j,n} \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.29d)$$

## 2. Construção da função custo térmico

Para cada solução do problema do custo imediato, são obtidos os pontos discretizados  $(gH_{t,n}, ct_t(gH_{t,n}))$ , onde  $ct_t(gH_t)$  representa o custo térmico em função da geração hidrelétrica total:

$$ct_t(gH_{t,n}) = \sum_{j \in \mathbb{J}} (co_{t,j} \cdot gt_{t,j,n})$$

## 3. Convexificação da função custo térmico

Utilizando a discretização dos  $N$  valores para a variável  $gH_t$ , é aplicado o procedimento descrito anteriormente para a construção da função  $ct_t^C(gH_t)$  que corresponde à aproximação linear-por-partes convexa da função, conforme ilustrada na figura 3.15.

## Função de produção hidrelétrica

Como foi visto na seção 2.3.2, a função de produção é formulada como uma função bi-linear representada por um modelo de programação linear inteira mista. Isto quer dizer que, apesar de já definida como uma função linear por partes, a incorporação de variáveis binárias no modelo da função  $gh^L(v, u)$  torna o problema não-convexo.

Se observarmos a formulação original do problema (2.18), vê-se que a função de produção  $gh^L(v, u)$  tem sinal negativo na restrição expressa na forma padrão para um problema de minimização, isto é:

$$gh - gh^L(v, u) \leq 0$$

De acordo com a definição de convexidade descrita no início deste capítulo, se uma função  $f(x)$  é convexa em  $x$  então a função  $-f(x)$  é côncava em  $x$ , e vice-versa. Isto significa que para a convexificação da restrição, é necessária a convexificação da

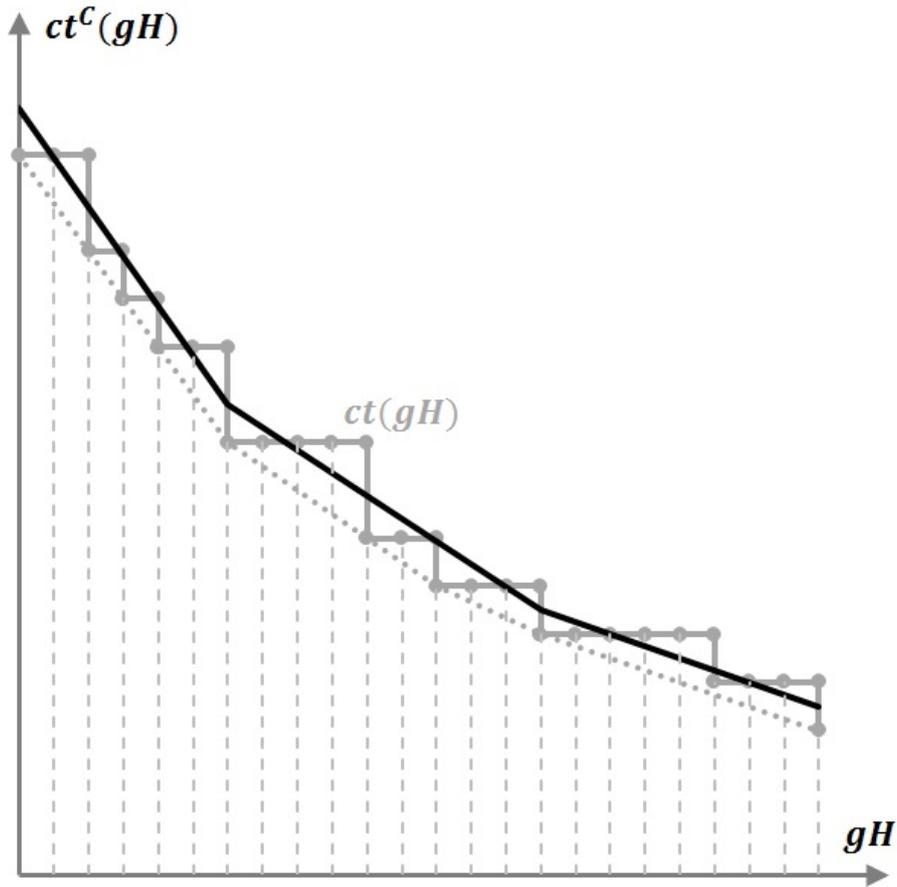


Figura 3.15: Aproximação convexa da função custo térmico

função  $-gh^L(v, u)$  que, por sua vez, é obtida a partir de aproximação côncava da função  $gh^L(v, u)$ .

A aproximação desta função é obtida então a partir dos mesmos conjuntos de  $N$  pontos discretizados para as variáveis de volume armazenado ( $v_n, n = 1, \dots, N$ ) e  $M$  pontos para volume turbinado ( $u_m, m = 1, \dots, M$ ), conforme o modelo (2.12) apresentado.

O primeiro passo consiste então na construção dos hiperplanos definidos para cada conjunto de 3 pontos discretizados da função. Isto é, dados 3 pontos quaisquer da função discretizada,  $gh^L(v_{k1}, u_{k1})$ ,  $gh^L(v_{k2}, u_{k2})$  e  $gh^L(v_{k3}, u_{k3})$ , contrói-se um hiperplano expresso pela seguinte equação:

$$gh_k^A(v, u) = a_k \cdot v + b_k \cdot u + c_k \quad (3.30)$$

onde os coeficientes  $a_k$ ,  $b_k$  e  $c_k$  são a solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} gh_k^A(v_{k1}, u_{k1}) &= a_k \cdot v_{k1} + b_k \cdot u_{k1} + c_k \\ gh_k^A(v_{k2}, u_{k2}) &= a_k \cdot v_{k2} + b_k \cdot u_{k2} + c_k \\ gh_k^A(v_{k3}, u_{k3}) &= a_k \cdot v_{k3} + b_k \cdot u_{k3} + c_k \end{aligned}$$

A envoltória convexa a  $gh^L(v, u)$  é definida, por sua vez, como o menor conjunto convexo que contém a área sob a função e portanto o procedimento de cálculo pode ser resumido da seguinte forma: para cada hiperplano  $gh_k^A(v, u)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , é verificado se  $gh^L(v_n, u_m) \leq gh_k^A(v_n, u_m)$  para todos os pontos discretizados  $v_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  e  $u_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Se isto for verdadeiro, então o hiperplano  $k$  pertence à envoltória convexa  $K_C$  da função  $gh^L(v, u)$ . A equação que define a aproximação côncava é dada, portanto, por:

$$gh^A(v, u) = \min_{k=1, \dots, K_C} \{gh_k^A(v, u)\} \quad (3.31)$$

Por fim, a aproximação linear-por-partes é ajustada de forma a minimizar o erro médio de aproximação através de um fator de correção, resultando na função  $gh^C(v, u)$  que substitui a função  $gh^L(v, u)$  do problema original.

### Formulação do problema

Substituindo as funções não convexas do problema original (PO) pelas funções aproximadas por esta metodologia, resulta em uma nova formulação do problema (PC) que define um conjunto convexo de soluções viáveis. Desta forma, possibilita-se a construção de aproximação convexa para as FCFs a partir da aplicação do algoritmo de PDDE sobre o problema formulado a seguir:

$$w_t^{PC} = \min \quad ct_t^C(gH_t) + cdef \cdot r_t + \alpha_{t+1} \\ \text{s/a} \quad gH_t = \sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} \quad (3.32a)$$

$$v_{t,i} = v_{t-1,i} + a_{t,i} - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in \mathbb{M}_i} (u_{t,m} + s_{t,m}), \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.32b)$$

$$gH_t + r_t = d_t \quad (3.32c)$$

$$gh_{t,i} \leq gh_{t,i}^C(v_{t,i}, u_{t,i}), \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.32d)$$

$$gh_{t,i} \leq \overline{gh}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.32e)$$

$$\underline{v}_i \leq v_{t,i} \leq \overline{v}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.32f)$$

$$\underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \overline{u}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (3.32g)$$

$$\alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \sum_{i \in \mathbb{I}} \pi_{t+1,i}^p \cdot (v_{t,i} - v_{t,i}^p), \quad p = 1, \dots, P_t \quad (3.32h)$$

A figura 3.16 apresenta o esquema de solução de uma problema não-convexo utilizando o procedimento de convexificação do problema antes da aplicação do algoritmo de PDDE.

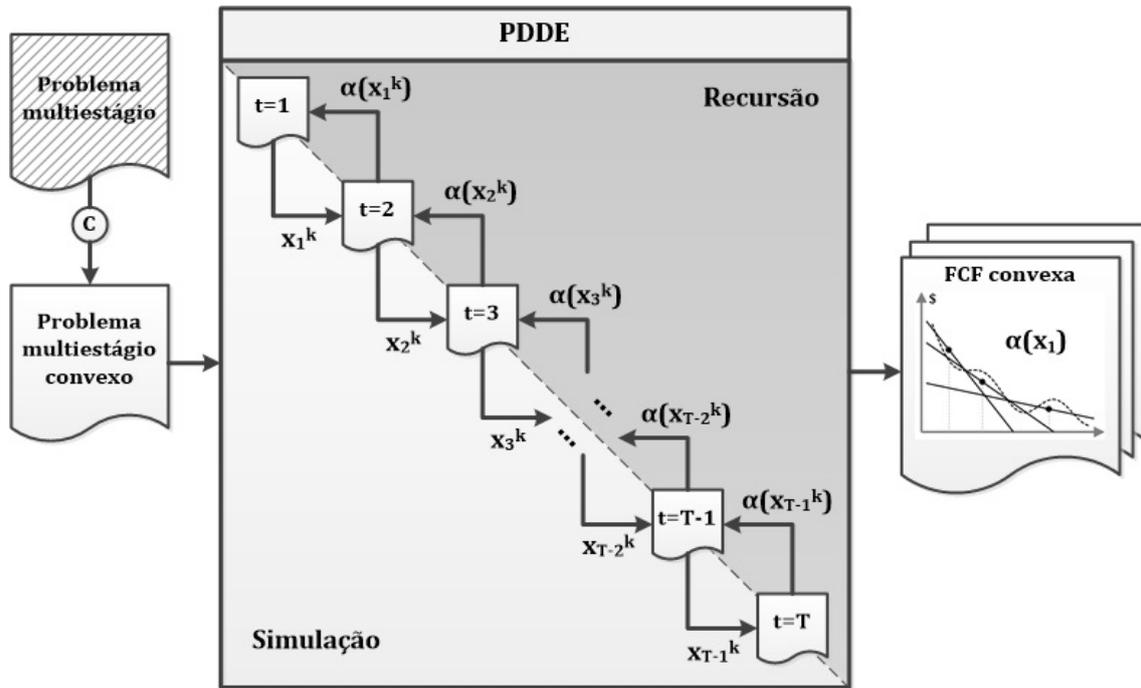


Figura 3.16: Esquema de solução via Convexificação do Componente

### 3.3.3 Considerações importantes

O critério de Convexificação do Componente é baseado na solução de uma aproximação convexa do problema original permitindo a construção de uma aproximação convexa da FCF que não é necessariamente externa à função original.

De fato, não faz sentido considerar para este critério uma metodologia de convexificação do problema por aproximação externa, afim de garantir limites inferiores para os valores das FCFs. Como foi visto nesta seção, a princípio poderíamos usar as variáveis duais deste problema para a relaxação Lagrangeana segundo o critério de Convexificação da FCF e assim obter cortes iguais ou mais fortes para as funções.

Se por um lado, a técnica de Convexificação da FCF permite a obtenção da melhor aproximação externa, ainda sim pode estar limitada a grandes defasamentos em relação à função real, devido à existência de fortes não-convexidades. Por outro lado, a técnica de Convexificação do Componente permite a construção de funções bem ajustadas que minimizam o erro das aproximações, e por isso não necessariamente subestimam as funções originais. Nestes caso, entretanto, é possível que a metodologia esteja cortando parte da região viável do problema original.

A qualidade das aproximações das FCFs obtidas com um ou outro critério de convexificação é relativa, isto é, não existe uma medida exata para julgar aquela que traz maior benefício ao objetivo do problema, que é obter uma estratégia ótima de operação do sistema. Portanto, esta "medida" é estimada a posteriori do cálculo da

política operativa, ou construção das FCFs, através de análises das simulações sobre estas estratégias considerando um modelo detalhado dos componentes do sistema.

# Capítulo 4

## Metodologia de convexificação da FPH

### 4.1 Introdução

As técnicas apresentadas no capítulo anterior, seja através de Convexificação da FCF ou Convexificação do Componente, foram aplicadas especificamente para a formulação do problema de operação descrito no capítulo 2. Entretanto, como pôde ser observado, as metodologias são genéricas o bastante para permitirem a representação mais detalhada do problema através de formulações ainda mais complexas, como por exemplo, considerando restrições de rampa e de mínimo e máximo tempo de partida e parada de usinas térmicas, entre outras fontes de não-convexidades.

Todavia, em estudos de planejamento para horizontes de médio a longo prazo, especialmente para casos de sistemas predominantemente hidrelétricos, como é o caso do sistema Brasileiro, a representação da variabilidade da produção de usinas hidrelétricas deve receber atenção especial, devido aos efeitos resultantes no gerenciamento do nível de armazenamento dos reservatórios. Além disso, como foi visto no capítulo anterior, até mesmo as funções lineares-por-partes convexas que são ajustadas para minimização do erro de aproximação podem não garantir o melhor resultado para funções não-convexas, por esta razão, uma outra abordagem de acordo com o critério de Convexificação do Componente é proposta neste trabalho, especificamente desenvolvida para a convexificação destas funções.

A metodologia descrita neste capítulo é baseada no trabalho de Suanno [59] que utiliza a transformação das variáveis de volume de água armazenada em variáveis de energia armazenada e desta maneira elimina do problema a representação explícita das funções de produção hidrelétrica, tornando convexo o problema a ser resolvido. O trabalho de Suano estaria completo se não fosse a existência do acoplamento

espacial entre as usinas que pertencem a uma mesma bacia hidrográfica, verificado nas equações de balanço hídrico com a incorporação dos termos associados aos volumes defluentes de usinas a montante.

Como o volume de água que sai de um usina, seja através da turbina ou do vertedouro, é o mesmo volume que entra no reservatório da usina que está a jusante, a transformação deste volume em quantidade de energia não pode ser realizada diretamente porque os fatores de produção de cada usina podem ser (e muito provavelmente são) diferentes. Por esta razão, a metodologia proposta em [59] está limitada à representação da variabilidade de produção hidrelétrica apenas para os reservatórios da cabeceira dos rios.

Uma contribuição bastante importante desta tese consiste portanto na extensão do trabalho de Suanno para permitir a representação das funções variáveis de produção hidrelétrica para usinas em cascata. Para esta proposta, no entanto, assim como para a técnica de convexificação por construção de envoltória convexa ajustada, que consiste na técnica tradicionalmente utilizada para o sistema brasileiro, também não se garante a obtenção de uma aproximação externa à FCF, entretanto, é conceitualmente intuitiva para a construção de uma política que pode trazer resultados interessantes em relação às metodologias existentes.

A seção 4.2 apresenta a descrição detalhada da metodologia desenvolvida sobre um procedimento heurístico para gerar aproximações para as relações de conversão de volume em energia para as hidrelétricas em cascata. Este procedimento consiste basicamente de três etapas, a primeira para o desacoplamento espacial das usinas através de uma manipulação algébrica das restrições do problema para obtenção de uma representação "paralela" da cascata. A segunda etapa consiste na solução de um problema de otimização não-linear para obtenção dos perfis de esvaziamento dos reservatórios e finalmente, na terceira etapa, esta informação é utilizada para construção das relações de conversão das variáveis de volume em energia.

Por fim, a seção 4.3 apresenta o resultado da reformulação convexa das funções de produção hidrelétrica no problema de operação de um estágio, a qual deve ser considerada para solução segundo o algoritmo de PDDE.

## **4.2 Descrição da metodologia**

### **4.2.1 Transformação de variáveis**

De acordo com Suanno, a transformação de variáveis de volume de água em energia tem uma interpretação física associada à conservação de energia do sistema, isto é, a energia cinética do volume de água que aciona as turbinas é igual à energia potencial que esse mesmo volume representa quando armazenado no reservatório.

Isto significa que o valor energético da afluência pode ser obtido não quando este volume é turbinado, mas quando ele chega ao reservatório, através da avaliação da sua energia potencial.

Da equação (2.13) correspondente à energia gerada  $gh_{t,i}$  a partir de um determinado volume turbinado, podemos escrever, de forma análoga, a expressão para a energia afluente  $ea_{t,i}$  para cada usina segundo a equação a seguir:

$$ea_{t,i} = \rho_i(v_{t,i}) \cdot a_{t,i}, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (4.1)$$

A energia armazenada no reservatório  $ev_{t,i}$ , no entanto, pode ser calculada considerando o deplecionamento de uma usina desde uma condição inicial de volume de água armazenada até o seu volume mínimo operativo, conforme a seguinte equação:

$$ev_{t,i} = \int_{\underline{v}_i}^{v_{t,i}} \rho_i(x) dx, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \quad (4.2)$$

Quando a condição inicial do reservatório é igual ao volume máximo de armazenamento, isto é,  $v_{t,i} = \bar{v}_i$ , então obtém-se, a partir desta expressão, o valor da energia armazenável máxima do reservatório:

$$\bar{e}v_i = \int_{\underline{v}_i}^{\bar{v}_i} \rho_i(x) dx, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.3)$$

Conforme mencionado no capítulo 2, o fator de produção de uma usina é função não-linear do nível de armazenamento, conforme ilustrado na figura 4.1. Então a energia armazenada de um reservatório corresponde exatamente à área abaixo desta curva para o volume de água especificado.

A expressão (4.2) permite, portanto, relacionar a variável de volume armazenado no reservatório e o montante energético associado a este volume. Desta relação obtém-se que a função para o fator de produção de um usina pode ser representada em termos de energia armazenada, de acordo com a figura 4.2, ou seja:

$$\rho_i(v_{t,i}) \rightarrow \rho_i^e(ev_{t,i}) \quad (4.4)$$

### Sem representação da cascata

Consideramos a equação de balanço hídrico da usina hidrelétrica (1) no estágio  $t$ :

$$v_{t,1} = v_{t-1,1} + a_{t,1} - u_{t,1} - s_{t,1} \quad (4.5)$$

Ao aplicar a transformação de variáveis de volume em energia, esta equação é expressa como:

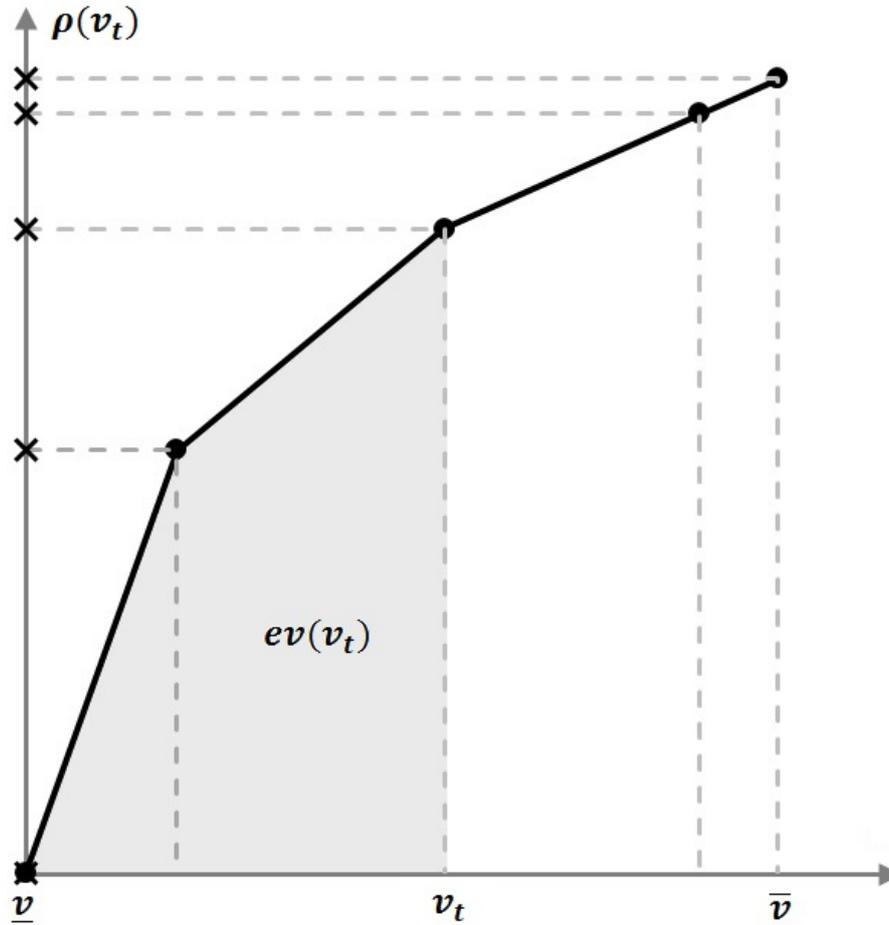


Figura 4.1: Fator de produção em função do volume armazenado

$$ev_{t,1} = ev_{t-1,1} + ea_{t,1} - gh_{t,1} - es_{t,1} \quad (4.6)$$

onde  $es_{t,1}$  é a energia vertida pela usina e  $ea_{t,1}$  é a energia afluyente, função convexa da energia armazenada, isto é:

$$ea_{t,1} = \rho_1^e(ev_{t,1}) \cdot a_{t,1} \quad (4.7)$$

As restrições associadas ao problema de operação após a transformação de variáveis são expressas como:

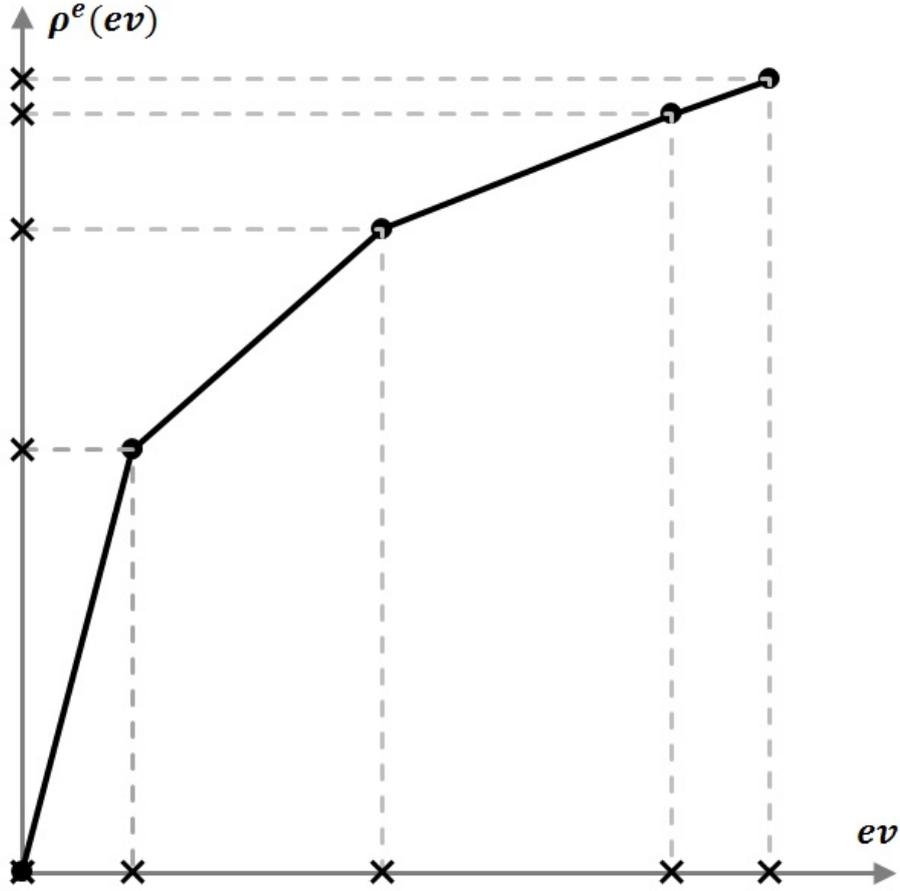


Figura 4.2: Fator de produção em função da energia armazenada

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t \quad (4.8a)$$

$$ev_{t,i} = ev_{t-1,i} + ea_{t,i} - gh_{t,i} - es_{t,i}, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.8b)$$

$$ea_{t,i} = \rho_i^e(ev_{t,i}) \cdot a_{t,i}, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.8c)$$

$$ev_{t,i} \leq \bar{ev}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.8d)$$

$$gh_{t,i} \leq \bar{gh}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.8e)$$

$$\underline{gt}_j \leq gt_{t,j} \leq \bar{gt}_j, \quad j \in \mathbb{J} \quad (4.8f)$$

Observa-se portanto que, para este modelo, a não-convexidade associada à função bi-linear de produção de energia é eliminada da formulação, resultando em um problema convexo para a operação. O mais interessante ainda consiste no fato que para o caso particular de usinas descoladas espacialmente, esta transformação de variáveis é exata, isto significa que a solução ótima do problema convexificado é idêntica à solução ótima do problema original não-convexo. De fato, dada a relação biunívoca entre as variáveis de volume e energia, então cada ponto da FCF obtida

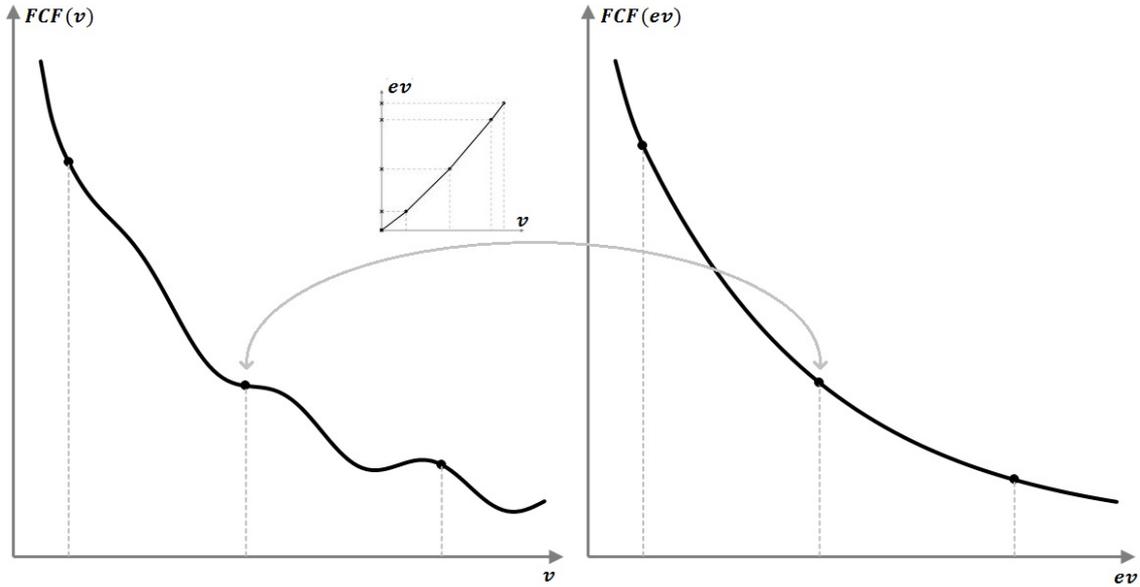


Figura 4.3: Aproximação exata para FCF sem cascata

em função da energia armazenada pode ser exatamente convertido em um ponto da FCF original em função do volume armazenado, como mostra a figura 4.3. Portanto, através desta metodologia de transformação de variáveis é construída a aproximação exata da FCF original para o caso de sistema sem representação de usinas em cascata.

Todavia, como este problema não representa o acoplamento espacial das usinas em cascata, determinado pelo efeito da regularização de usinas a montante sobre a geração das usinas rio abaixo, então o trabalho de Suanno, apesar de bastante conveniente, foi limitado à aplicação em sistemas equivalentes, onde conjuntos de reservatórios do parque gerador são transformados em um reservatório com energia potencial e afluências equivalentes. À continuação é apresentada a metodologia proposta desta tese para a extensão do trabalho de Suanno para a representação da variabilidade de produção de usinas a jusante em uma cascata.

### Com representação da cascata

Agora consideramos a equação de balanço hídrico para a usina hidrelétrica (2) que está a jusante da hidrelétrica (1):

$$v_{t,2} = v_{t-1,2} + a_{t,2} - u_{t,2} - s_{t,2} + u_{t,1} + s_{t,1} \quad (4.9)$$

A dificuldade associada à transformação de variáveis para esta equação está no termo correspondente ao volume afluente que chega da usina a montante, via turbinamento e vertimento, isto é  $u_{t,1} + s_{t,1}$ . O problema ocorre porque, devido ao acoplamento espacial, o volume de água defluente da usina a montante é o mesmo volume considerado na afluência da usina a jusante, entretanto, como as usinas

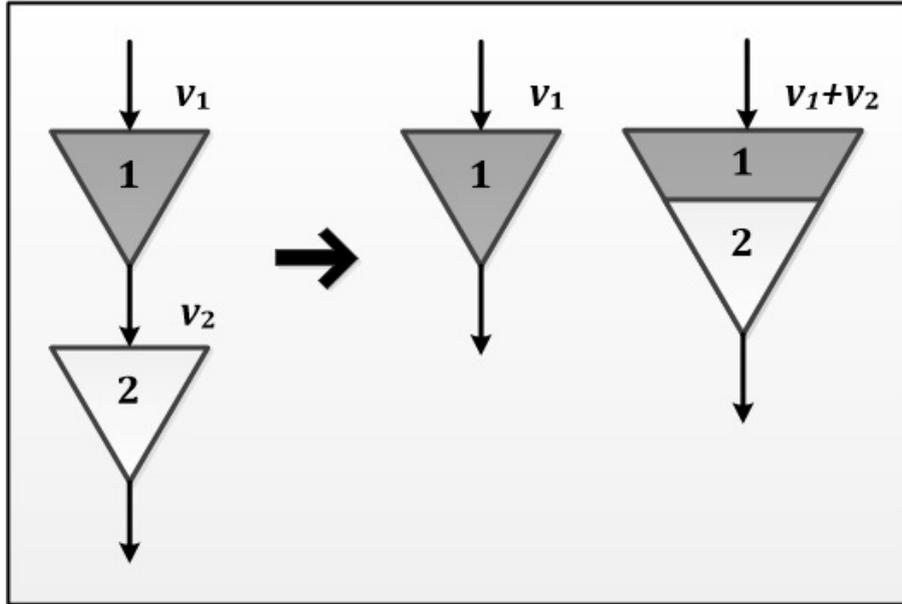


Figura 4.4: Representação paralela de usinas em cascata

possuem fatores de produção diferentes, este volume é convertido em montantes de energia diferentes para cada usina. Em termos matemáticos:

$$eq_1 = \rho_1 \cdot (u_{t,1} + s_{t,1}) \neq \rho_2 \cdot (u_{t,1} + s_{t,1}) = eq_2 \quad (4.10)$$

onde os montantes de energia  $eq_1$  e  $eq_2$  refletem a transformação do mesmo volume de água de acordo com o fator de produção de cada usina.

Isso significa que, ao contrário do caso sem representação da cascata, não há relação biunívoca entre volume e energia e portanto a transformação de variáveis não pode ser feita de forma analítica a fim de tornar o problema convexo. A metodologia descrita a seguir foi desenvolvida para permitir a obtenção de relações aproximadas para estas transformações.

#### 4.2.2 Paralelização da cascata

O primeiro passo para a eliminação do efeito provocado pelo acoplamento espacial das usinas em cascata, ou em "série", é utilizar uma representação equivalente do sistema considerando usinas em "paralelo", onde basicamente cada usina a justante é representada pela agregação de todas as usinas a montante, conforme ilustrado pela figura 4.4 para os reservatórios (1) e (2).

Considerando a substituição do reservatório (2) pela "soma" dos reservatórios  $v_{t,1} + v_{t,2} = v_{t,12}$ , obtemos o seguinte modelo para a operação das usinas (1) e (12) equivalente :

$$v_{t,1} = v_{t-1,1} + a_{t,1} - u_{t,1} - s_{t,1} \quad (4.11a)$$

$$gh_{t,1} = \rho_1(v_{t,1}) \cdot u_{t,1} \quad (4.11b)$$

$$v_{t,1} \leq \bar{v}_1 \quad (4.11c)$$

$$v_{t,12} = v_{t-1,12} + a_{t,1} + a_{t,2} - u_{t,2} - s_{t,2} \quad (4.11d)$$

$$gh_{t,2} = \rho_2(v_{t,12} - v_{t,1}) \cdot u_{t,2} \quad (4.11e)$$

$$v_{t,12} - v_{t,1} \leq \bar{v}_2 \quad (4.11f)$$

Ainda que a não-convexidade permaneça representada pela função bi-linear de geração hidrelétrica, observa-se que, para esta formulação, o acoplamento espacial entre as duas usinas deixou de ser associado às variáveis de defluência e passou para as variáveis de volume armazenado.

Aplicando agora a relação de transformação de variáveis, a formulação resultante para esta usina é:

$$ev_{t,1} = ev_{t-1,1} + ea_{t,1} - gh_{t,1} - es_{t,1} \quad (4.12a)$$

$$ea_{t,1} = \rho_1^e(ev_{t,1}) \cdot a_{t,1} \quad (4.12b)$$

$$ev_{t,1} \leq \bar{ev}_1 \quad (4.12c)$$

$$ev_{t,12} = ev_{t-1,12} + ea_{t,12} - gh_{t,2} - es_{t,2} \quad (4.12d)$$

$$ea_{t,12} = \rho_2^e(ev_{t,12} - \tilde{ev}_{t,1}) \cdot (a_{t,1} + a_{t,2}) \quad (4.12e)$$

$$ev_{t,12} - \tilde{ev}_{t,1} \leq \bar{ev}_2 \quad (4.12f)$$

onde, ao contrário da formulação (4.11), em que o volume armazenado agregado é a soma dos volumes armazenados das duas usinas, nesta formulação, temos que  $ev_{t,12} = \tilde{ev}_{t,1} + ev_{t,2}$ , onde  $\tilde{ev}_{t,1} \neq ev_{t,1}$ , porque o volume armazenado no reservatório (1) representa montantes de energia diferentes, como mostra a figura 4.5, de acordo com a produtividade de cada usina:

$$ev_{t,1} = \int_{\underline{v}_1}^{v_{t,1}} \rho_1(x) dx \quad (4.13a)$$

$$\tilde{ev}_{t,1} = \int_{\underline{v}_1}^{v_{t,1}} \rho_2(x) dx \quad (4.13b)$$

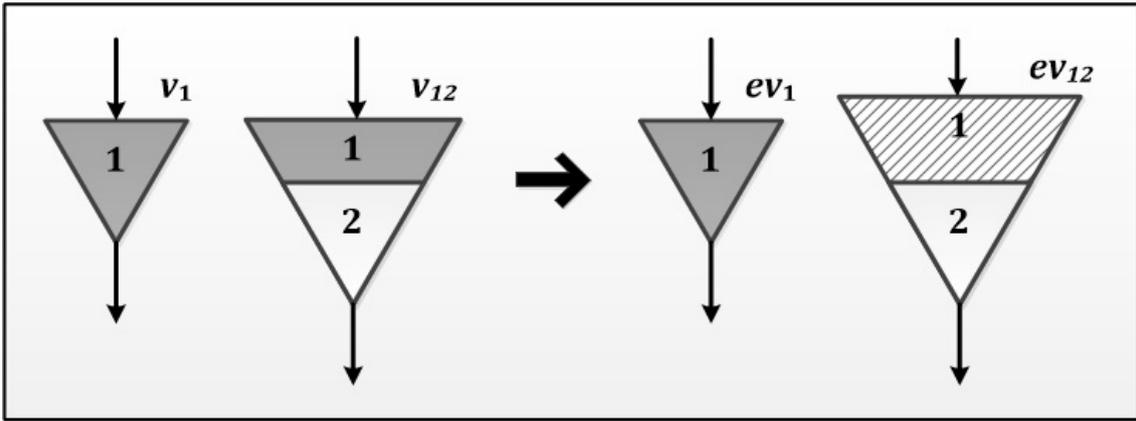


Figura 4.5: Transformação de variáveis de armazenamento

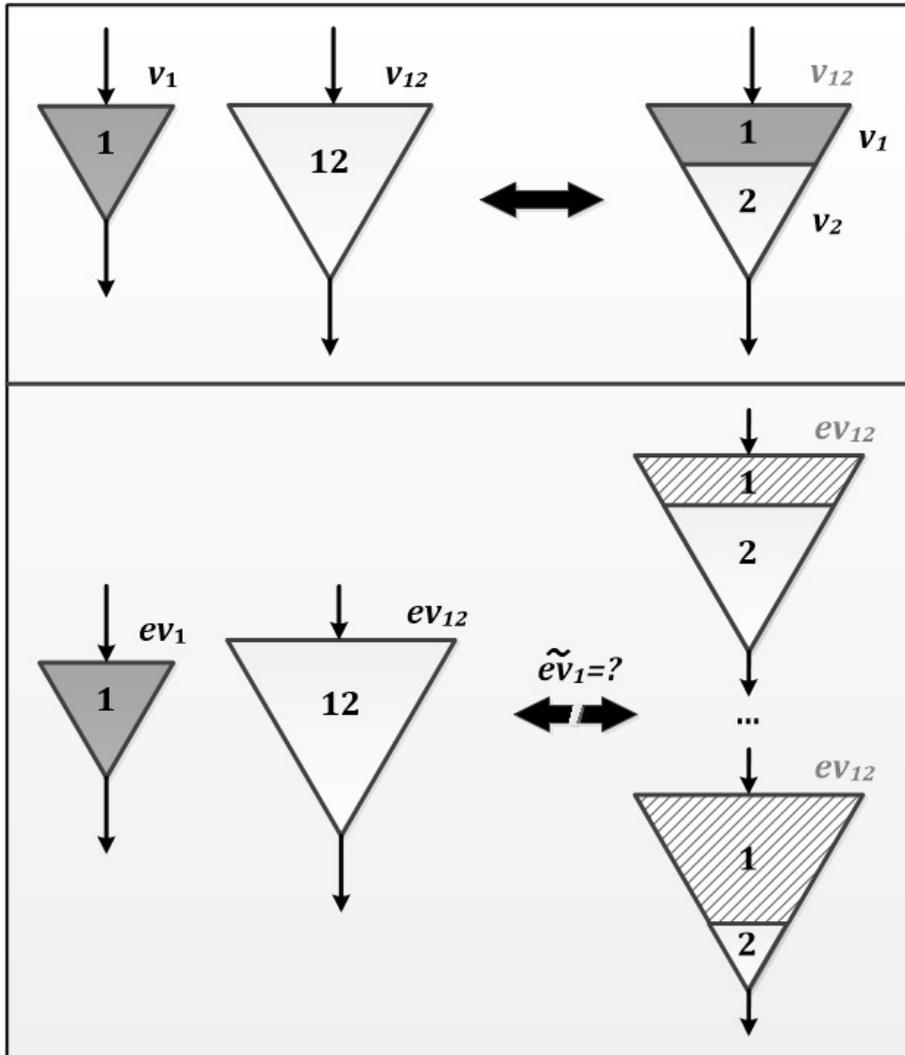


Figura 4.6: Relação biunívoca de transformação

Em outras palavras, a relação biunívoca existente entre as grandezas  $(v_{t,12} - v_{t,1})$  e  $v_{t,2}$  não pode ser encontrada entre  $(ev_{t,12} - ev_{t,1})$  e  $ev_{t,2}$ , conforme ilustrado na figura 4.6. Observa-se que para uma condição  $(ev_{t,12}, ev_{t,1})$ , existe uma infinidade de possíveis valores de  $ev_{t,2}$  e, conseqüentemente, para  $\tilde{ev}_{t,1}$ .

Por esta razão, não existe forma analítica de expressar  $\tilde{ev}_{t,1}$  em função das variáveis  $ev_{t,12}$  e  $ev_{t,1}$ .

O próximo passo, apresentado na seção seguinte, consiste em um procedimento de cálculo de um perfil de esvaziamento das hidrelétricas do sistema visando estimar a relação entre o nível de armazenamento no reservatório (1) e a energia armazenada correspondente da usina a jusante na cascata.

### 4.2.3 Perfil de esvaziamento

O procedimento heurístico descrito a seguir foi desenvolvido para a construção de uma aproximação da função desconhecida  $\tilde{ev}_{t,1}(ev_{t,12}, ev_{t,1})$  do problema transformado (4.12). São considerados dois passos básicos: o primeiro para a estimação de um perfil de esvaziamento para a cascata em análise, e o segundo para a extração de informações deste perfil que permitem a construção da função aproximada.

#### 1. Obtenção do perfil da dinâmica de esvaziamento

Este passo consiste na execução de uma simulação operativa do sistema, onde o objetivo é capturar a dinâmica de esvaziamento da água dos reservatórios. Basicamente, deseja-se determinar as variações dos níveis de armazenamento das usinas, ao longo de um período de tempo, levando em consideração o acoplamento devido à topologia do sistema hidrográfico.

A simulação é obtida através da solução de um problema de otimização para a maximização da energia produzida pelo sistema, considerando todos os reservatórios com condição inicial igual aos seus volumes máximos de armazenamento. Além disso, são consideradas nulas as afluências hidrológicas do sistema.

Para este trabalho, as simulações foram realizadas através do *software* Monalisa [1], desenvolvido pela empresa PSR, para o cálculo de energia firme de sistemas hidrelétricos. Este programa usa modelagem não-linear para a representação da função de produção hidrelétrica e o modelo é resolvido pelo pacote de otimização comercial KNITRO, desenvolvido por Ziena Optimization, LLC<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup><http://www.ziena.com/knitro.htm>

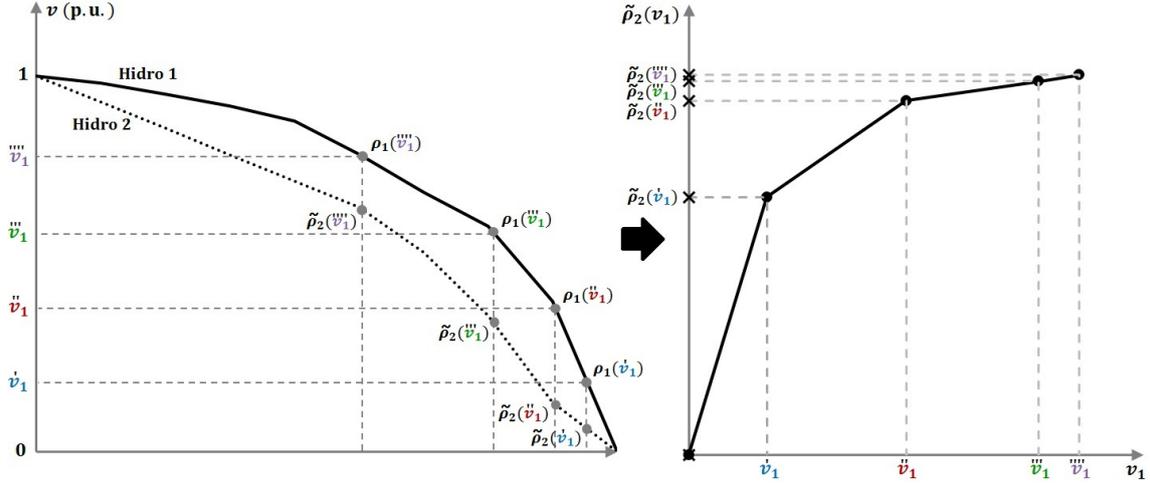


Figura 4.7: Perfil de esvaziamento dos reservatórios

O modelo matemático deste problema é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad F \\
 & \text{s/a} \quad v_{t,i} = v_{t-1,i} - u_{t,i} - s_{t,i} + \sum_{m \in \mathbb{M}_i} (u_{t,m} + s_{t,m}), \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\
 & \quad gh_{t,i} \leq \rho_i(v_{t,i}, u_{t,i}) \cdot u_{t,i}, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\
 & \quad gh_{t,i} \leq \bar{gh}_i, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\
 & \quad \underline{v}_i \leq v_{t,i} \leq \bar{v}_i, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\
 & \quad \underline{u}_i \leq u_{t,i} \leq \bar{u}_i, \quad t \in \mathbb{T}, i \in \mathbb{I} \\
 & \quad F \leq \sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i}, \quad t \in \mathbb{T}
 \end{aligned}$$

O perfil de esvaziamento do sistema é determinado pela solução obtida para os volumes armazenados nos reservatórios ao longo do tempo e representa uma estimativa do melhor gerenciamento possível dos recursos hidráulicos de um sistema de usinas em cascata. Por esta razão, esta informação pode ser uma boa indicação da condição ótima de armazenamento de cada reservatório para um estado específico do sistema.

Conforme ilustrado na figura 4.7, o perfil de esvaziamento para os reservatórios (1) e (2) estabelece uma relação entre o nível de armazenamento de uma usina a montante e o fator de produção da usina a jusante.

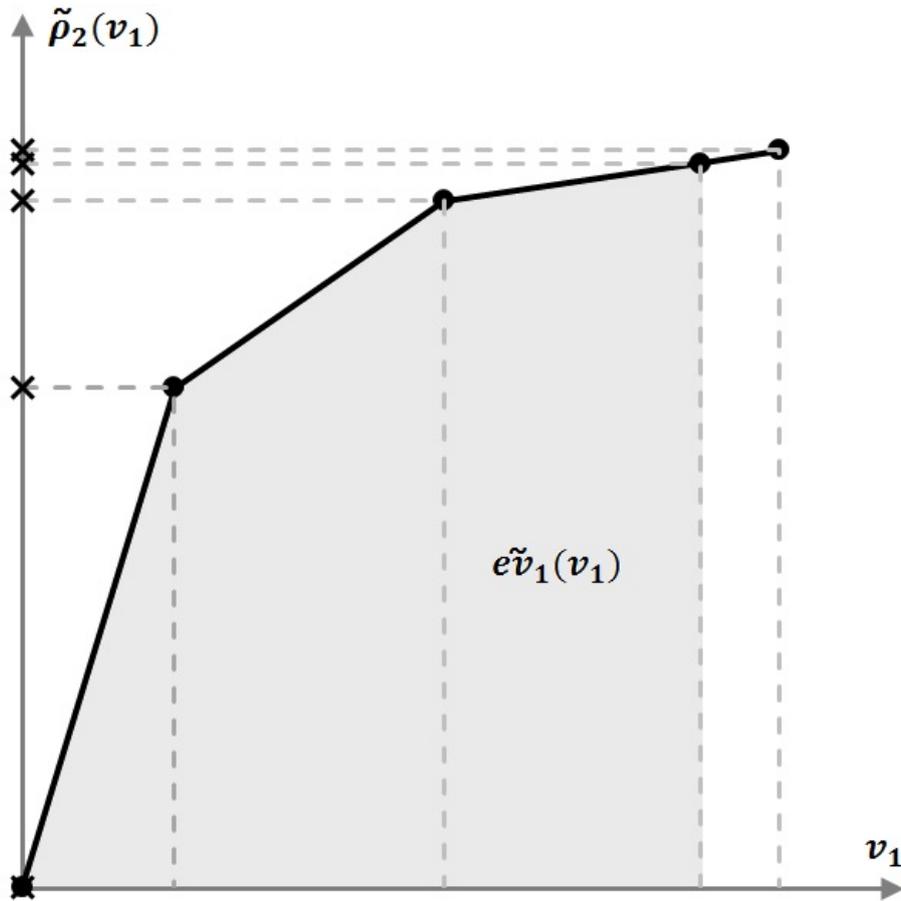


Figura 4.8: Aproximação da função do fator de produção

## 2. Estimação da relação entre energias armazenadas

As observações das relações obtidas do perfil de esvaziamento dão origem a uma função aproximada  $\tilde{\rho}_2(v_1)$ , conforme a figura 4.8.

Usando essa relação  $\tilde{\rho}_2(v_1)$  em conjunto com a função conhecida  $ev_1(v_1)$ , é possível estimar uma função aproximada para  $e\tilde{v}_1(ev_1)$ , como mostrado na figura 4.9.

Ao utilizar o perfil de esvaziamento para representar um boa estimacão dos níveis de armazenamento dos reservatórios para cada estado do sistema, estamos assumindo que  $e\tilde{v}_1(ev_{12}, ev_1) = e\tilde{v}_1(ev_1)$

Cabe ressaltar que este procedimento apresentado para duas usinas em cascata pode ser estendido facilmente para o caso com várias usinas representadas em uma mesma cascata, como pode ser visto na formulação apresentada na seção a seguir.

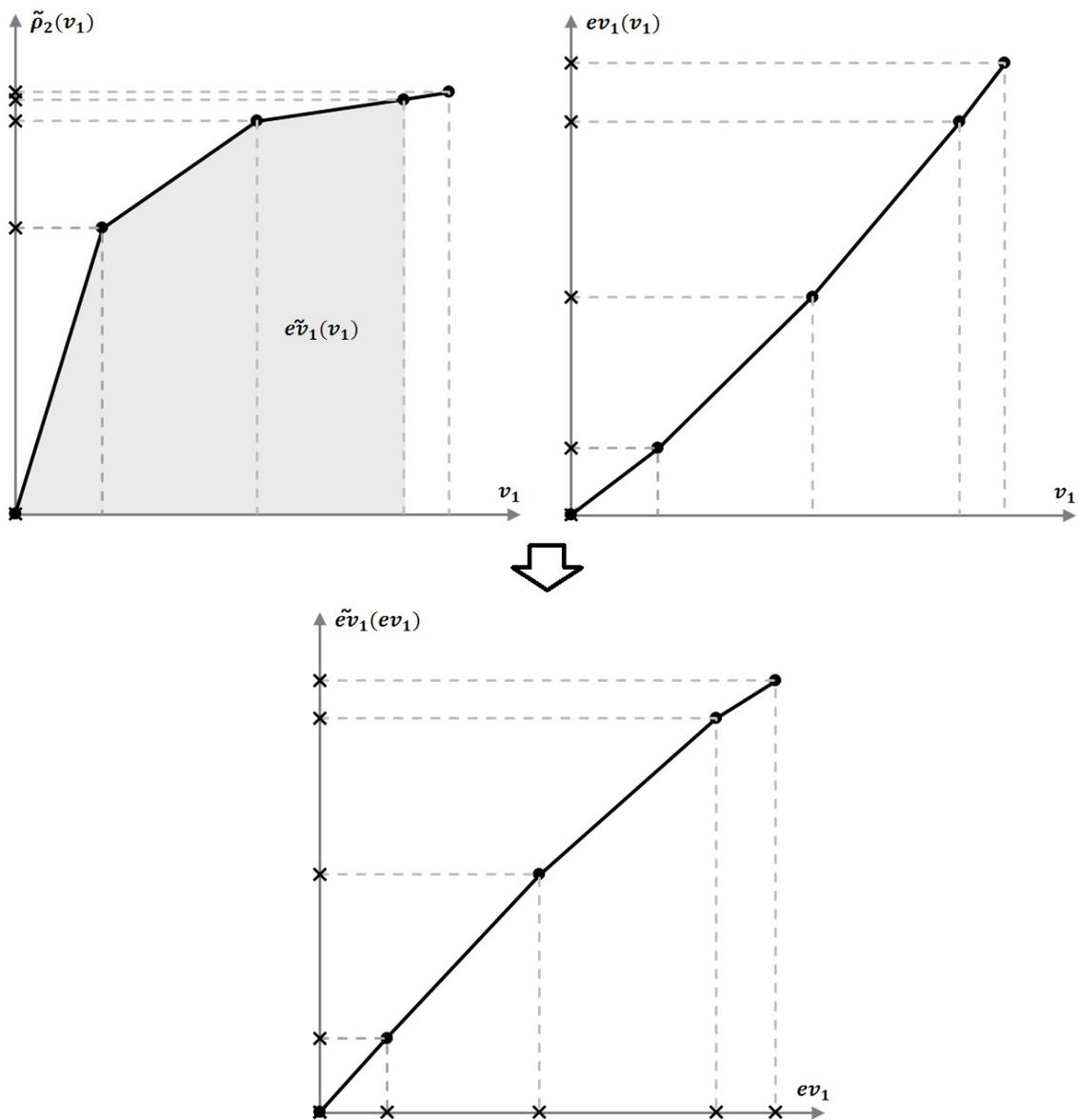


Figura 4.9: Aproximação da relação de transformação

### 4.3 Formulação matemática

Finalmente, através do procedimento proposto neste capítulo, obtém-se uma formulação matemática convexa do problema de operação hidrotérmica para um estágio  $t \in \mathbb{T}$ , considerando a variabilidade da produção hidrelétrica conforme o modelo a seguir:

$$w_t^{EA} = \min \sum_{j \in \mathbb{J}} co_{t,j} \cdot gt_{t,j} + cdef \cdot r_t + \alpha_{t+1}$$

$$\text{s/a } \sum_{i \in \mathbb{I}} gh_{t,i} + \sum_{j \in \mathbb{J}} gt_{t,j} + r_t = d_t \quad (4.15a)$$

$$ev_{t,ki} = ev_{t-1,ki} + ea_{t,ki} - gh_{t,i} - es_{t,i}, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.15b)$$

$$ea_{t,ki} = \rho_i^e (ev_{t,ki} - \tilde{e}v_{t,k}(ev_{t,k})), \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.15c)$$

$$ev_{t,ki} - \tilde{e}v_{t,k}(ev_{t,k}) \leq \bar{v}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.15d)$$

$$gh_{t,i} \leq \bar{gh}_i, \quad i \in \mathbb{I} \quad (4.15e)$$

$$\underline{gt}_j \leq gt_{t,j} \leq \bar{gt}_j, \quad j \in \mathbb{J} \quad (4.15f)$$

$$\alpha_{t+1} \geq w_{t+1}^p + \sum_{i \in \mathbb{I}} \pi_{t+1,i}^p \cdot (ev_{t,ki} - ev_{t,ki}^p), \quad p = 1, \dots, P_t \quad (4.15g)$$

onde o índice  $k$  identifica o reservatório a montante do sistema agregado, isto é:

- Se  $i$  é reservatório de cabeceira, então  $k$  é inexistente;
- Se  $i$  é o primeiro reservatório a jusante, então  $k$  identifica o reservatório de cabeceira;
- Se  $i$  é o segundo reservatório a jusante, então  $k$  identifica o reservatório agregado da cabeceira mais o primeiro a jusante;
- ... e assim por diante.

# Capítulo 5

## Estudos de casos

### 5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é utilizar uma representação não-convexa do problema de operação estocástica de dois sistemas hidrotérmicos diferentes visando avaliar e discutir as metodologias de convexificação apresentadas ao longo desta tese que tornam possível o cálculo de políticas operativas ótimas a partir de algoritmo de PDDE.

#### 5.1.1 Procedimento de avaliação

A avaliação dessas metodologias é feita em duas etapas: primeiro calcula-se uma política operativa, ou melhor, as aproximações convexas das funções de custo futuro, para cada uma das metodologias analisadas, em seguida, estas funções são utilizadas em simulações operativas considerando um modelo comum para a representação do sistema, no caso, o problema não-convexo que melhor representa a operação real deste sistema. A figura 5.1 ilustra este processo de análise.

Dentre as metodologias de convexificação comparadas estão, seguindo o critério de Convexificação da FCF:

- RL1** Relaxação Lagrangeana utilizando solução do problema de relaxação linear para obter multiplicadores de Lagrange;
- RL2** Relaxação Lagrangeana utilizando solução do problema localmente convexificado para obter multiplicadores de Lagrange;
- RL3** Relaxação Lagrangeana utilizando solução do problema localmente convexificado e procedimento de atualização dos multiplicadores de Lagrange;

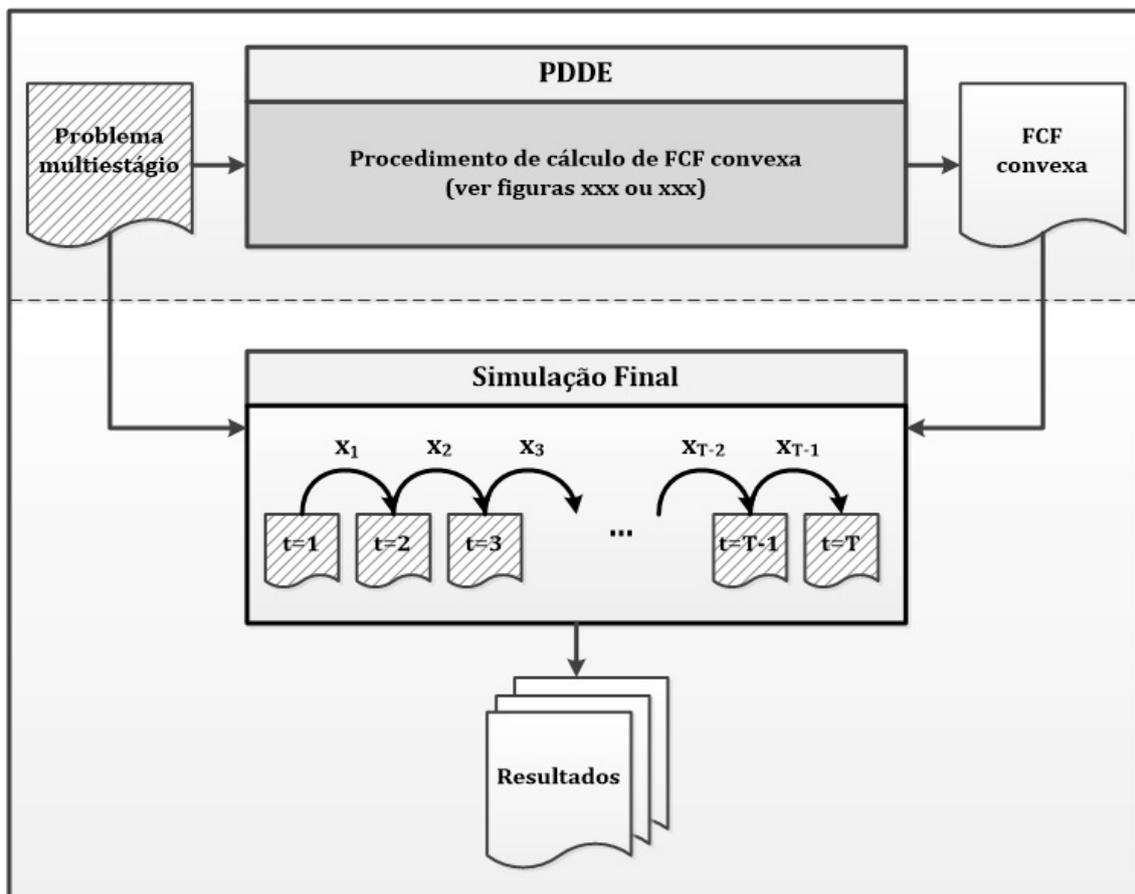


Figura 5.1: Avaliação dos critérios de convexificação

Segundo o critério de Convexificação dos Componentes:

- CTE** Substituição da função original por um fator de produção constante, onde são ignoradas todas as funções de produção hidrelétrica variáveis e considerados valores médios constantes de produtividade das usinas;
- LPC** Substituição da função original por função linear por partes convexa, obtida a partir de hiperplanos tangentes à função original e ajustados para minimização do erro médio de aproximação;
- ENR** Substituição do problema original através de transformação de variáveis de volume de água em energia armazenada;

Como não existe uma forma exata de comparação entre as metodologias, este trabalho buscou avaliar os seguintes aspectos considerados importantes para um problema da operação:

- Esforço computacional, dado pelo tempo de execução para o cálculo da política operativa;

- Valor esperado dos custos operativos totais para cada cenário da simulação final;
- Valor esperado dos custos marginais de operação (CMO) para cada cenário da simulação final.

Existem metodologias, como as que foram apresentadas no capítulo 3, que podem ser aplicadas a problemas que incorporam diversas fontes de não-convexidade, sem a necessidade de alteração do procedimento de convexificação proposto. No problema apresentado no capítulo 2 estão modeladas duas destas fontes de não-convexidade: função de produção hidrelétrica variável e decisões de unit commitment térmica. Como comentado anteriormente, o foco deste trabalho não está diretamente voltado para o detalhamento da representação do sistema, mas para a análise dos critérios de convexificação, por esta razão, iremos considerar para fins de comparações, uma formulação onde as funções de produção hidrelétrica são as únicas fontes de não-convexidade do problema. Na prática, sistemas que apresentam forte participação hidráulica no atendimento à demanda e, especialmente, topologia e equipamentos que tornam expressiva a variabilidade da capacidade de determinadas usinas, fazem com que a correta representação da função de produção seja extremamente importante para coerência da geração das usinas e, conseqüentemente, gerenciamento ótimo do nível dos reservatórios.

### 5.1.2 Aproximação da função de produção

A função de produção hidrelétrica do problema original, modelada a partir de uma função linear por partes não convexa conforme a seção 2.3.2, requer a discretização de  $N$  valores de volume e  $M$  valores de turbinamento para cada reservatório. Para os casos mostrados nas seções seguintes, foi arbitrado o número de 10 discretizações para  $N$  e  $M$ , distribuídas de forma não-uniforme, visando obter uma melhor aproximação com um número reduzido de pontos discretizados. Como visto na modelagem do problema, o número de variáveis inteiras do modelo está diretamente relacionado com o número de discretizações da função e, conseqüentemente, com a dificuldade em solucioná-lo.

O procedimento para escolha dos pontos discretizados é descrito a seguir. A figura 5.2 mostra a diferença entre uma discretização uniforme e a discretização adotada neste trabalho.

Discretização de volume:

- Define-se como quarto valor de volume aquele, que para condição de máximo turbinamento, resulta em máxima potência da usina. Chamamos este volume de volume eficiente.

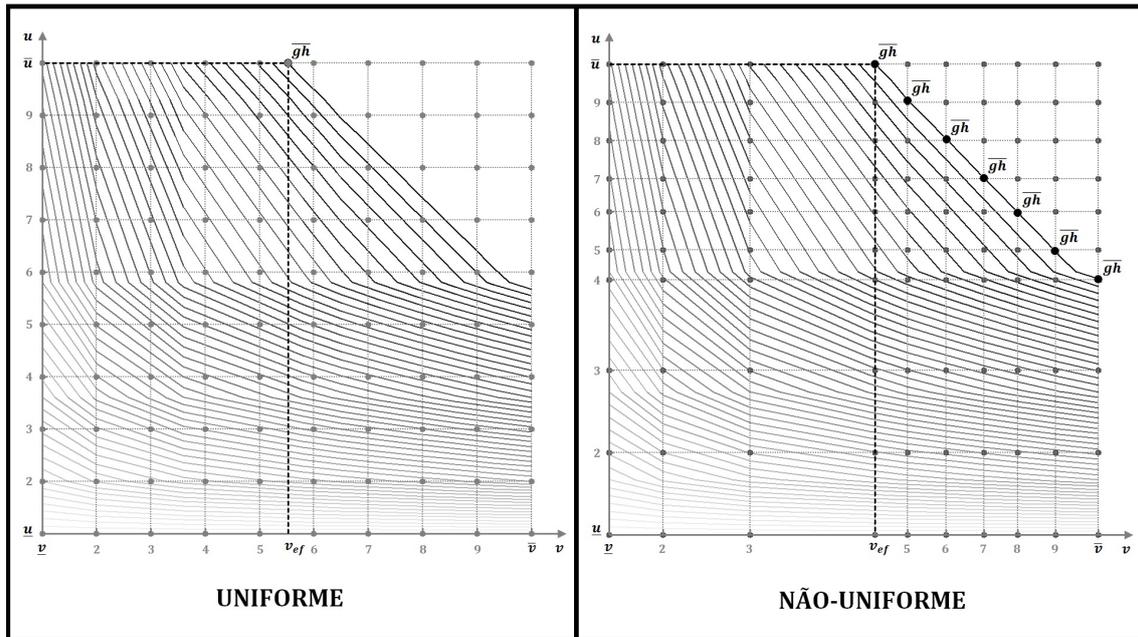


Figura 5.2: Discretização uniforme x não-uniforme das variáveis

- Discretiza-se uniformemente 3 valores de volume entre volume mínimo e volume eficiente, e 6 valores entre volume eficiente e volume máximo.

Discretização de turbinamento:

- O primeiro valor corresponde ao turbinamento mínimo
- O último valor corresponde ao turbinamento máximo. Isto significa que o ponto (4,10) corresponde a um ponto de máxima potência.
- Os demais valores de turbinamento são definidos tais que os pontos (5,9), (6,8), (7,7), (8,6), (9,5) e (10,4) também correspondam a pontos de máxima potência.
- O segundo e terceiro valores de turbinamento são definidos então por discretização uniforme entre o primeiro e o quarto valores.

A escolha desta metodologia para a discretização da função de produção hidrelétrica leva em conta o fato de que as usinas, ao otimizarem a sua produção de energia, estão sempre buscando um ponto de operação de máxima potência. O que ocorre na prática, é a obtenção de uma aproximação com maior refinamento na região de maior probabilidade de operação. Além disso, durante a otimização do problema, a função aproximada é definida pela combinação linear convexa dos pontos da função linear por partes, o que significa que se os pontos de máxima capacidade não forem estabelecidos para a discretização, então a geração máxima das usinas hidrelétricas nunca poderá ser atingida porque a função estará sempre subestimada. A figura 5.3

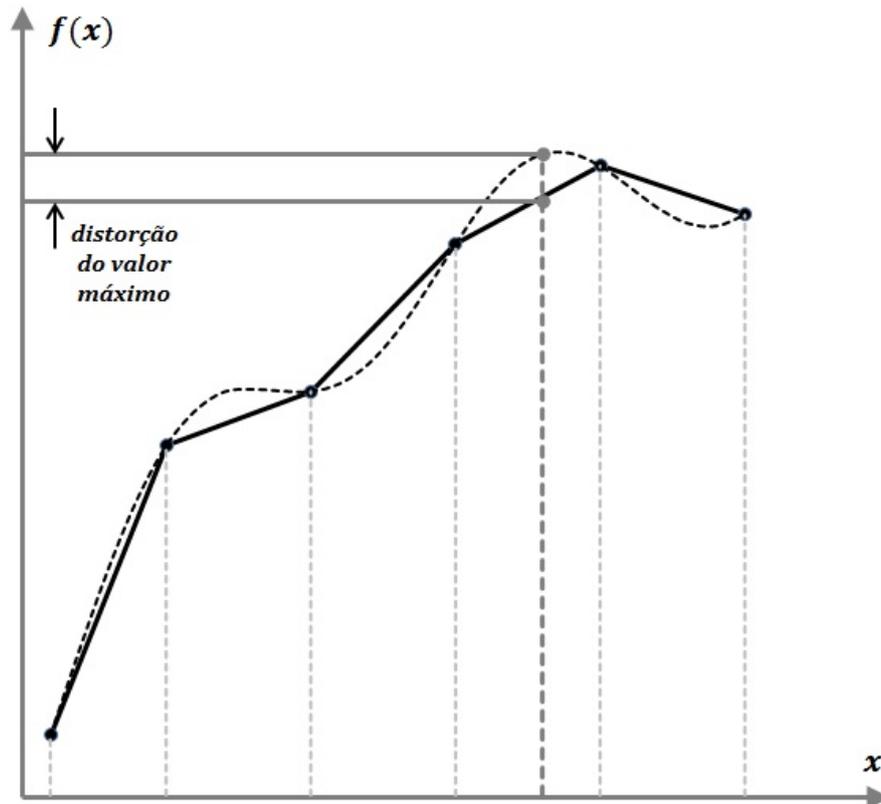


Figura 5.3: Distorções devido às discretizações

mostra o exemplo de uma função univariada, cuja discretização uniforme pode levar a graves distorções de aproximação.

Vale lembrar que a construção desta discretização é realizada uma única vez para cada sistema, antes do processo de otimização do problema. Note que esta estratégia adotada para a discretização da função não garante a minimização do erro de aproximação, entretanto, são encontrados trabalhos na literatura que buscam exatamente otimizar o esquema de discretização para a representação de funções lineares por parte. Um destes trabalhos é citado na seção de trabalhos futuros desta tese.



Figura 5.4: Usina hidrelétrica El Cajón - Honduras

## 5.2 Sistema de Honduras - Usina El Cajon

### 5.2.1 Características do sistema

O primeiro caso escolhido para análise é uma versão reduzida do sistema elétrico de Honduras que contém a usina hidrelétrica de El Cajón, localizada a 180km da capital Tegucigalpa. Esta usina tem características particularmente interessantes para o propósito desta tese. Atualmente ocupa a décima-nona colocação no *ranking* de reservatórios com maior altura de queda do mundo e a sexta colocação no *ranking* das Américas com 285 metros, sendo destes seis, o segundo maior em capacidade de armazenamento com  $5,700 \text{ hm}^3$ , perdendo apenas para a represa Mica no Canadá<sup>1</sup>. El Cajón possui quatro turbinas de  $75 \text{ MW}$ , totalizando uma capacidade instalada de  $300 \text{ MW}$  com limite de turbinamento máximo de  $214.4 \text{ m}^3/\text{s}$ .

O que torna este problema ainda mais interessante é o fato da capacidade de produção desta usina ser caracterizada por uma grande variabilidade com relação ao nível de armazenamento do reservatório, isto é, existe uma diferença bastante significativa entre o fatores de produção associados às condições cheia e vazia do reservatório, chegando a mais de 143%. A gráfico da figura 5.5 mostra esta variação

<sup>1</sup>fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_tallest\\_dams\\_in\\_the\\_world/](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_tallest_dams_in_the_world/)

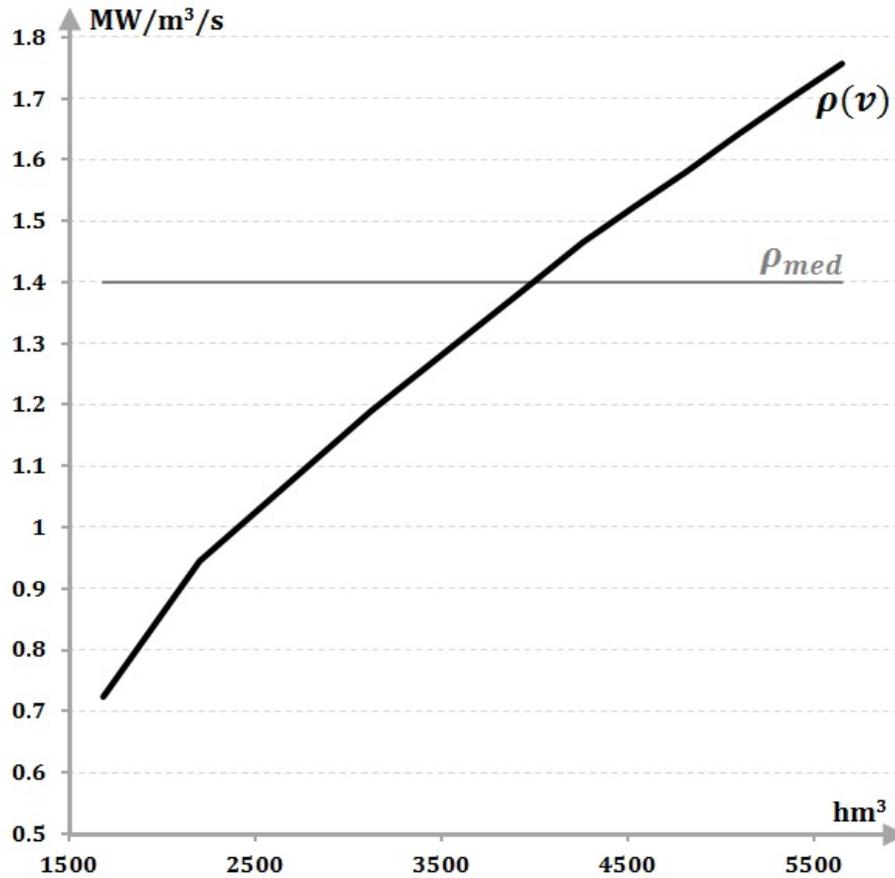


Figura 5.5: Fator de produção da usina El Cajón

do fator de produção para a usina de EL Cajón.

A variabilidade de produção da usina foi considerada no problema de operação utilizando uma função linear por partes dada pela combinação linear convexa dos pontos obtidos a partir da discretização de valores para turbinamento e volume, conforme ilustrado na figura 5.6.

Além da hidrelétrica de El Cajon, cujas dados operativos estão descritos na tabela 5.1, este caso contém outras três usinas térmicas fictícias, cujas características estão disponíveis na tabela 5.2.

## 5.2.2 Resultados

O horizonte considerado para este estudo é de 36 estágios mensais. Os parâmetros associados ao algoritmo de PDDE consistem em 50 cenários para simulação e 5 discretizações de afluições para recursão. As afluições hidrológicas consideradas no problema são geradas a partir de um modelo independente, sem levar em conta as correlações temporais.

Neste primeiro estudo, foi utilizado 1 processador de 2.4 GHz e 8 Gb de memória RAM. Para as metodologias segundo o critério de Convexificação da FCF, nenhum

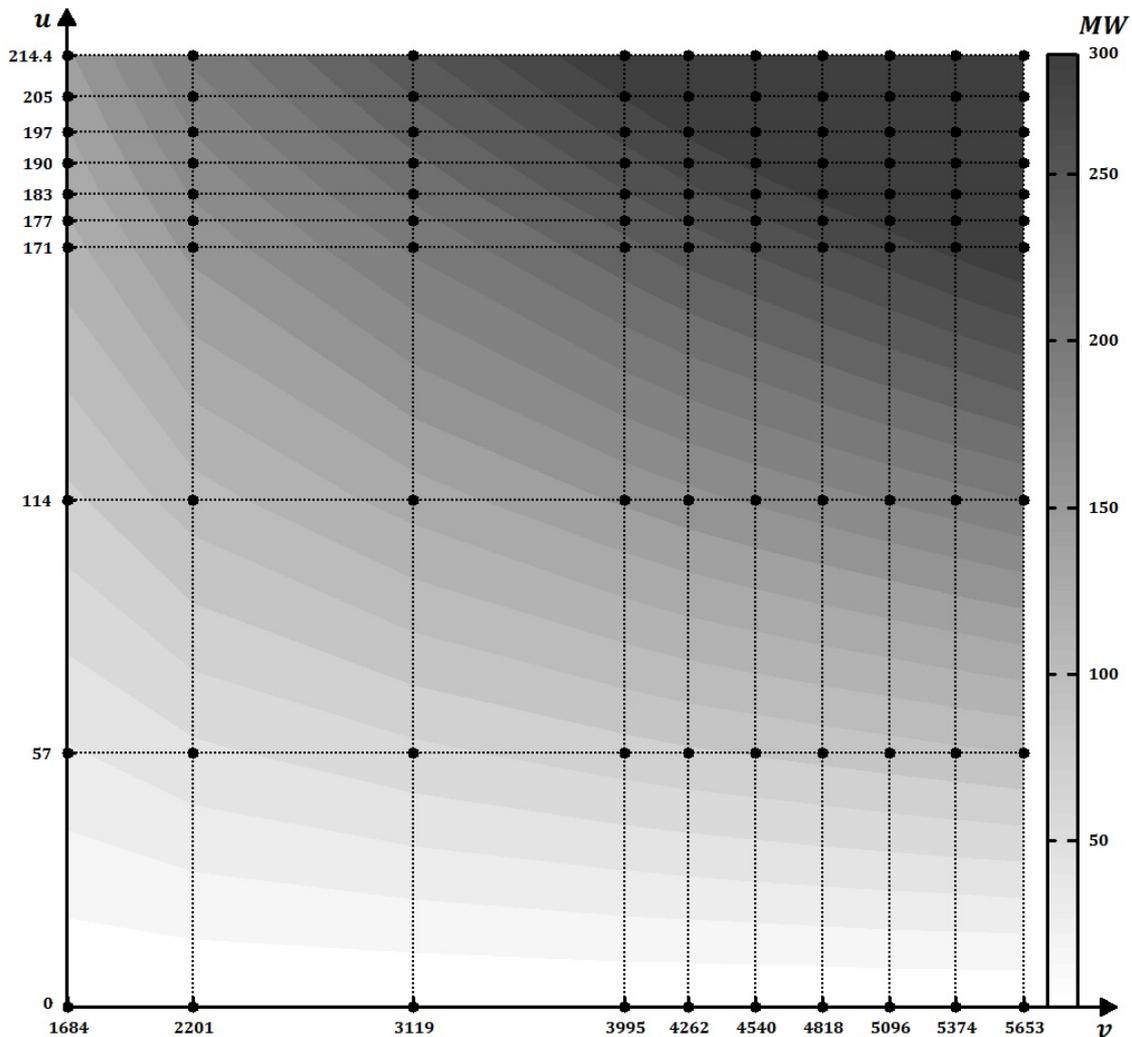


Figura 5.6: Discretização da função de produção da usina El Cajón

dos modelos [RL1], [RL2] e [RL3] atingiu a convergência segundo o critério de intervalo de confiança do limite superior, conforme discutido na seção 2.4.2. Foi verificado que a partir da terceira iteração do algoritmo de PDDE já não havia melhoria no valor do limite inferior e este foi o critério de parada adotado para estes casos. A interpretação para este comportamento consiste no fato de que como as FCFs são aproximadas externamente, as não-convexidades do problema não permitem que as aproximações sejam suficientemente próximas da função original tornando, portanto, inútil a inclusão de novos cortes ao problema após um determinado número de iterações e impedindo a convergência do algoritmo.

A seguir são discutidos os resultados obtidos para cada uma das metodologias analisadas para a convexificação das FCFs. A tabela 5.3 apresenta informações relevantes a respeito da convergência para o cálculo da política operativa, ou melhor, construção das aproximações das FCFs, resultado da primeira etapa da execução, conforme mostrado na figura 5.1. A tabela 5.4 contém os resultados associados à

Tabela 5.1: Dados operativos da usina El Cajón - Honduras

<b>Especificação técnica</b>	<b>Valor</b>	<b>Unid.</b>
Área Inundada	94	$km^2$
Altura da Barragem	301	$m$
Altura Máxima de Operação	285	$m$
Altura Mínima de Operação	220	$m$
Capacidade Instalada	$4 \times 75$	$MW$
Turbinamento Mínimo	0	$m^3/s$
Turbinamento Máximo	214,4	$m^3/s$
Volume Mínimo	1.684,1	$hm^3$
Volume Máximo	5.652,7	$hm^3$

Tabela 5.2: Dados operativos das térmicas fictícias - Honduras

<b>Térmica</b>	<b>Capacidade</b>	<b>Custo Operativo</b>
Térmica 1	200 $MW$	8 \$ / $MWh$
Térmica 2	100 $MW$	12 \$ / $MWh$
Térmica 3	400 $MW$	15 \$ / $MWh$

segunda etapa da execução, correspondente à fase de simulação operativa do sistema, considerando as FCFs obtidas na primeira etapa.

Na tabela 5.3, as colunas *Num.Iterações* e *CPU* correspondem ao número total de iterações e tempo total de CPU associados à convergência do algoritmo de PDDE para o cálculo da política operativa. As colunas *LInf.* e *LSup.* dizem respeito aos limites inferior e superior do valor esperado do custo operativo obtido na última iteração do algoritmo de PDDE, e as colunas *LSup.Min* e *LSup.Max.* determinam o intervalo de confiança do limite superior. Em termos gerais, conforme discutido na seção 2.4.2, o limite inferior está associado à soma do custo operativo do primeiro estágio e o valor aproximado do custo futuro, dado pela FCF calculada. O limite superior, por sua vez, corresponde ao valor esperado da soma dos custos imediatos de cada estágio. A convergência do algoritmo é atingida quando o limite inferior está dentro do intervalo de confiança do limite superior. Isto significa que uma FCF é dita bem aproximada quando o limite inferior está o mais próximo possível do limite superior.

Na tabela 5.4, a coluna *Custo Oper.* diz respeito ao valor esperado do custo operativo total obtido na simulação final, considerando o modelo não-convexo para representação do sistema, e comum para todas as metodologias analisadas.

Dentre as metodologias que seguem o critério de Convexificação da FCF e garantem aproximação externa das FCFs, [RL1], [RL2] e [RL3], foi observado que:

- Comparando-se os resultados de [RL1] e [RL2] notamos que a incorporação da solução de um problema localmente convexificado para obtenção do vetor de

Tabela 5.3: Resultados do cálculo da política operativa - Honduras

Método	Num. Iterações	LInf. (k\$)	LSup. (k\$)	LSup.Min (k\$)	LSup.Max (k\$)	CPU (s)
<b>RL1</b>	3	16.840	20.403	19.348	21.458	429
<b>RL2</b>	3	16.930	20.393	19.351	21.435	824
<b>RL3</b>	3	16.959	20.392	19.355	21.429	1.246
<b>CTE</b>	2	17.649	17.713	17.047	18.379	12
<b>LPC</b>	2	20.322	20.549	19.532	21.566	148
<b>ENR</b>	2	20.330	20.685	19.826	21.544	17

Tabela 5.4: Resultados da simulação operativa - Honduras

Método	Custo Oper. (k\$)	CPU (s)
<b>RL1</b>	20.403	43
<b>RL2</b>	20.393	46
<b>RL3</b>	20.392	44
<b>CTE</b>	21.629	37
<b>LPC</b>	20.134	45
<b>ENR</b>	20.046	42

multiplicadores de Lagrange garantiu, não somente uma melhor aproximação das FCFs, porque resultou em um limite inferior mais alto, como também uma melhor solução da simulação final, dado o objetivo de minimização do custo operativo total.

- Comparando-se os resultados de **[RL2]** e **[RL3]** verificou-se que a incorporação do procedimento iterativo de busca dos multiplicadores, para maximização do Lagrangeano, apesar de não ter levado a um ganho significativo do custo operativo total, conduziu a um aumento do limite inferior. Este resultado mostra que houve um maior refinamento da aproximação das FCFs, o que significa que, para outras condições de simulação, é possível que a diferença de custo operativo obtido para as duas metodologias seja mais expressiva.
- O preço que se paga por este refinamento da aproximação das FCFs é notado pelo crescimento do tempo computacional associado a cada metodologia. A medida que incorporamos técnicas mais sofisticadas para tornar mais fortes os cortes das FCFs, necessitamos maior esforço computacional para resolver um maior número de problemas de programação linear inteira mista.

Para as metodologias que seguem o critério de Convexificação do Componente e, por sua vez, não garantem aproximação externa das FCFs, **[CTE]**, **[LPC]** e **[ENR]**, foi observado que:

- Para a metodologia **[CTE]**, que simplesmente desconsidera a variabilidade da

função de produção hidrelétrica, o uso de valor médio para o fator de produção de El Cajón tornou muito otimista a estratégia de planejamento da operação do sistema. Isto pode ser notado basicamente pela diferença entre o limite superior obtido na convergência da política operativa e o custo total resultante da simulação final, esta sim considerando a variabilidade da função.

- O resultados das metodologias [LPC] e [ENR] mostraram que, de fato, o critério adotado de Convexificação dos Componentes, ao utilizarem formulações diferentes para os problemas do cálculo da política e da simulação, não garantiu uma aproximação externa para as FCFs. Entretanto, a estratégia obtida resultou em um melhor desempenho da operação do sistema, sob o ponto de vista do menor custo operativo total.
- Resultados interessantes com relação ao desempenho computacional também podem ser destacados para estas metodologias. Chama atenção o fato do modelo [ENR] não apenas ter resultado na melhor solução da operação, como ter sido quase tão rápido quanto a metodologia [CTE].

Das soluções obtidas para este primeiro estudo, pode-se concluir que, dadas as características do sistema, principalmente a natureza da função de produção da hidrelétrica de El Cajón, a representação da variabilidade do fator de produção com respeito ao nível de armazenamento é fundamental para obtenção de uma estratégia coerente de operação do sistema. Em particular, para o caso analisado, o algoritmo de Convexificação do Componentes que utilizou a substituição de variáveis de volume em energia [ENR] resultou na melhor política, com menor custo operativo e baixo esforço computacional.

A metodologia de Convexificação da FCF utilizando relaxação Lagrangeana [RL3], apesar de construir aproximações das FCFs que não cortam parte da região viável do problema, todavia não resultou em uma política melhor que aos outros métodos de Convexificação dos Componentes [LPC] e [ENR]. Isto se deve ao fato das aproximações obtidas serem externas às funções. Como foi discutido no capítulo 3, ao lidar com problemas muito não-convexos, as aproximações externas, mesmo as mais refinadas possíveis, não garantem que, para determinadas regiões do domínio das funções, o valor aproximado chegue próximo do valor real da função.

As figuras 5.7 e 5.8 apresentam alguns gráficos comparativos dos resultados obtidos.

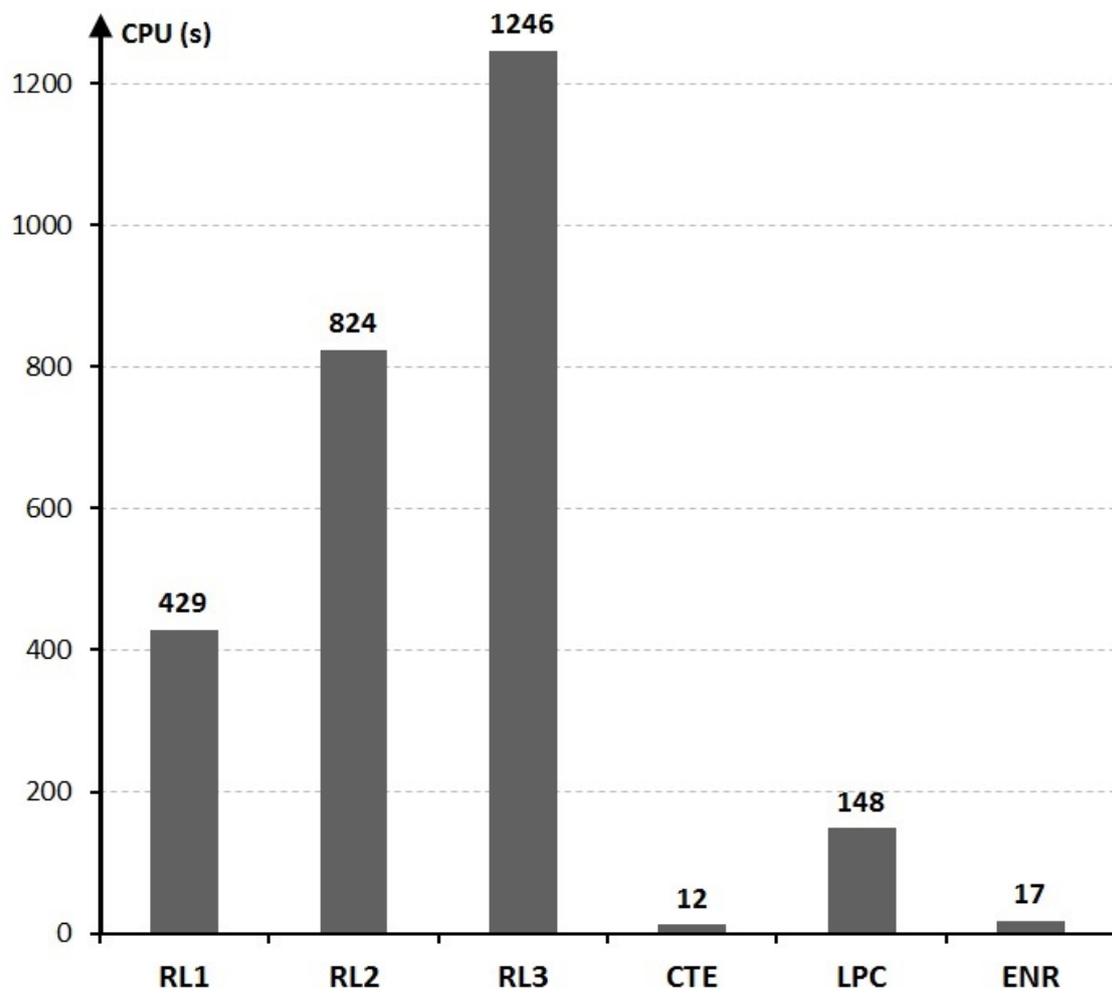


Figura 5.7: Tempo de execução total - Honduras

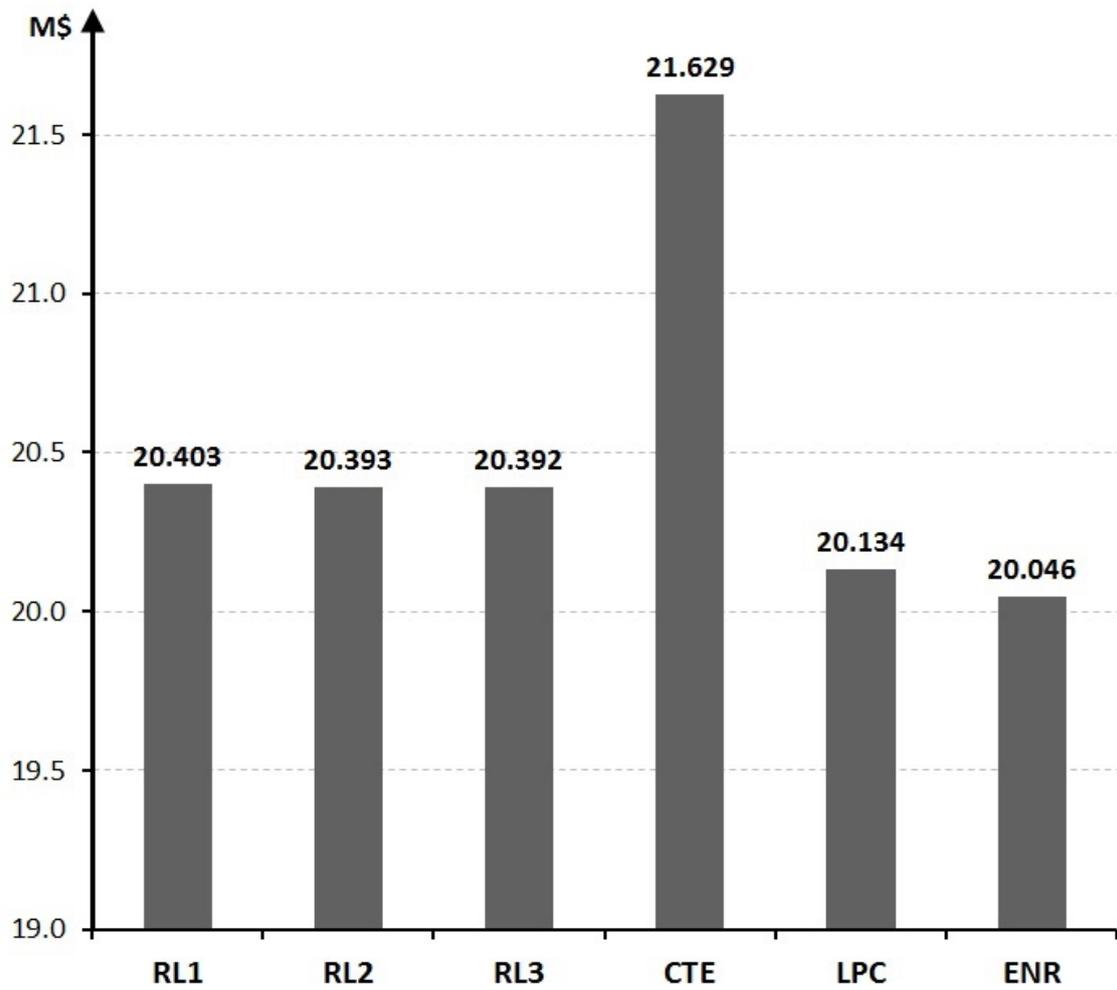


Figura 5.8: Valor esperado do custo operativo - Honduras



Figura 5.9: Região SE/CO do Sistema Elétrico Brasileiro

## 5.3 Sistema Brasileiro - Região Sudeste

### 5.3.1 Características do sistema

O sistema elétrico Brasileiro é predominantemente hidráulico e caracterizado por reservatórios de grande capacidade de regularização arrumados em complexas cascatas sobre as diversas bacias hidrográficas. Consiste em um sistema de grande porte composto por mais de 200 unidades geradoras. O caso considerado neste segundo estudo corresponde a um caso isolado da região sudeste (e parte da região centro-oeste) do sistema Brasileiro, como mostra a figura 5.9. Esta parcela do sistema, apesar de ser a segunda menor em área ocupada, é a mais importante região industrial, comercial e financeira e responde pela maior densidade populacional, sendo responsável por aproximadamente 70% de toda a produção e consumo de

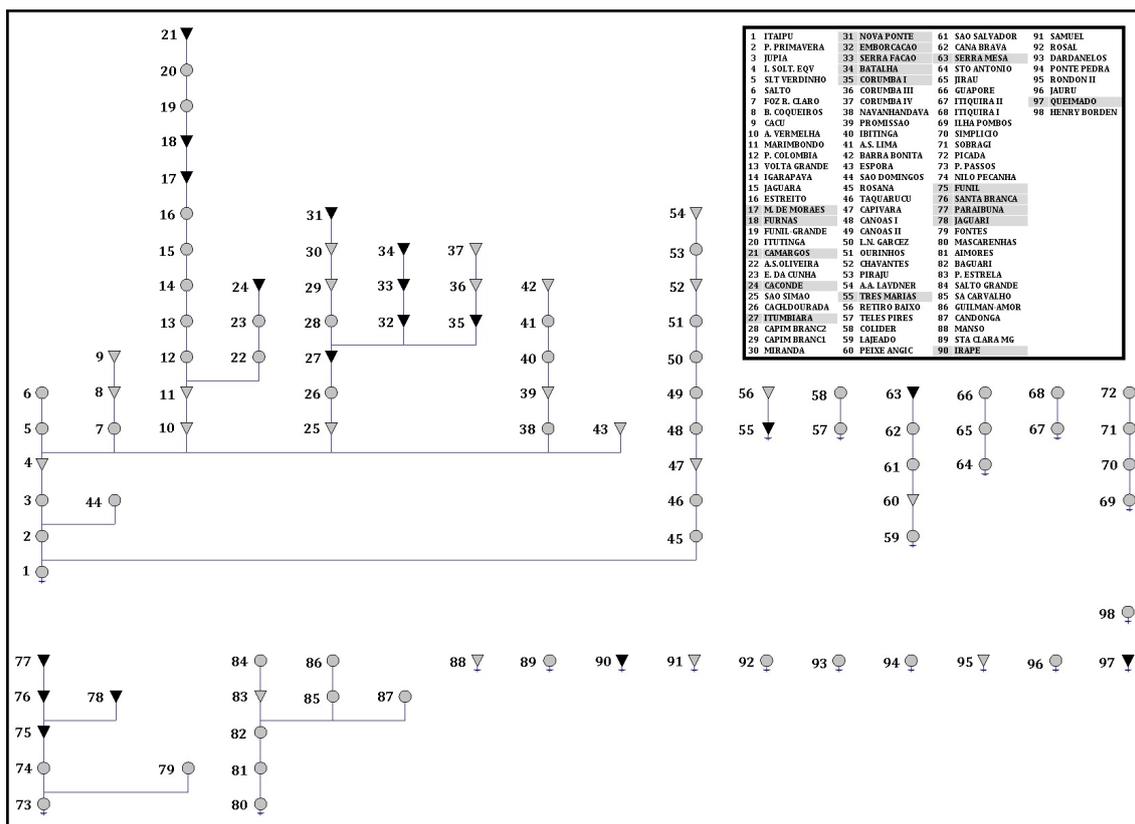


Figura 5.10: Topologia hidráulica do Sudeste Brasileiro

energia do país<sup>2</sup>.

Uma característica interessante associada a este sistema se refere à concentração de um grande e diversificado parque de geração de energia, consituído por usinas hidrelétricas de pequeno, médio e grande porte, além de usinas térmicas nucleares e movidas a óleo, gás natural e biomassa. Algumas informações relevantes sobre este sistema estão listadas na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Dados do Sistema Sudeste Brasileiro

Especificação técnica	Valor	Unid.
Num. de Hidrelétricas	98	
Num. de Termelétricas	38	
Capacidade Total Hidro	65.049	MW
Capacidade Total Térmica	12.209	MW
<b>Capacidade Instalada Total</b>	<b>77.258</b>	<b>MW</b>

A figura 5.10 apresenta a representação esquemática da cascata de usinas hidrelétricas deste sistema. Em destaque estão indicadas as 18 usinas para as quais está sendo representada a variação das funções de produção de energia.

As figuras 5.11 e 5.12 mostram a representação adotada para as funções de produção da usina hidrelétrica de FURNAS e MMORAES (Mascarenhas de Moraes)

<sup>2</sup>fonte: <http://www.ons.org.br/>

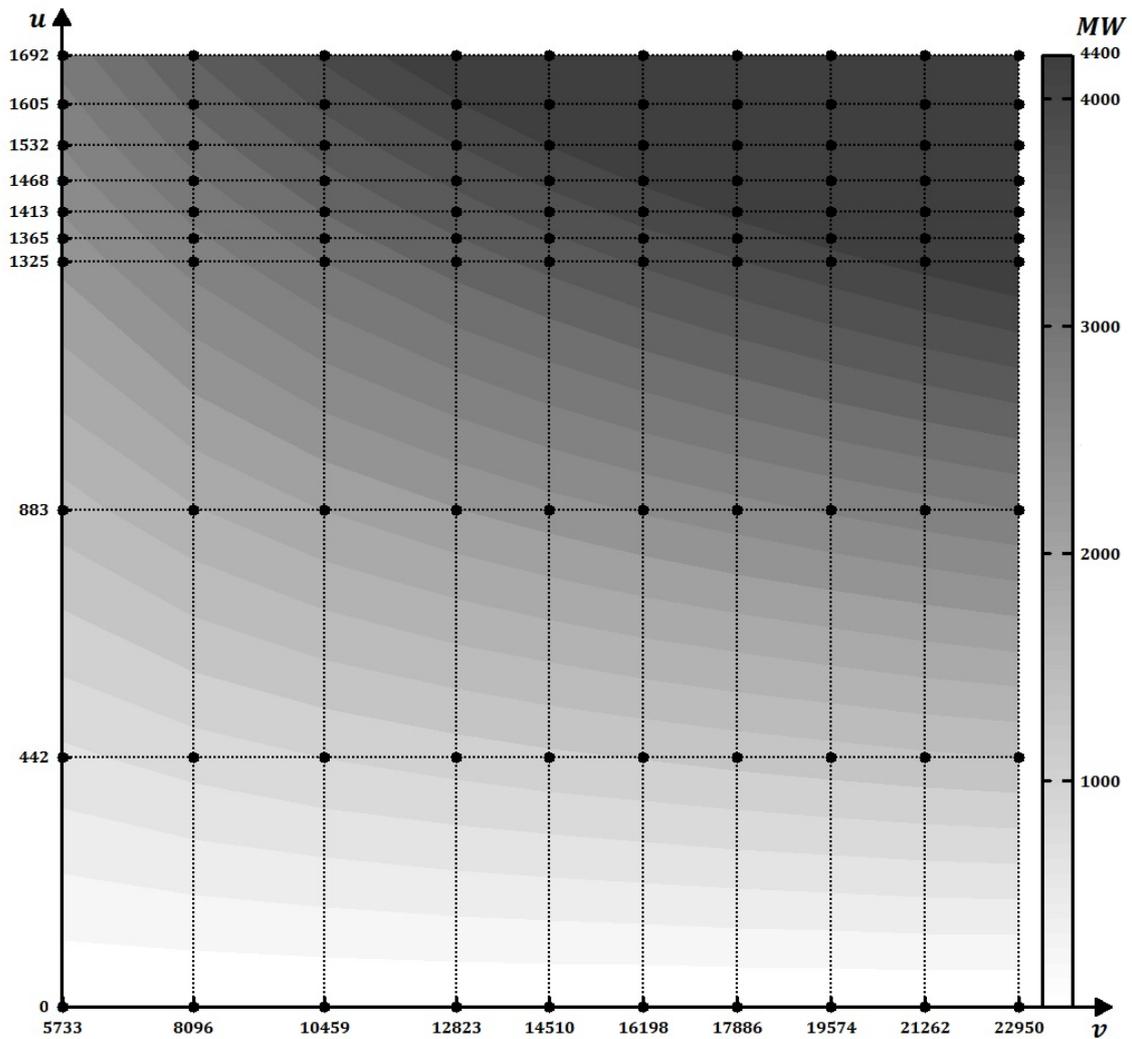


Figura 5.11: Discretização da função de produção da usina de Furnas

a partir do critério de discretização estabelecido neste trabalho.

Como foi visto no capítulo 4, a existência de usinas hidrelétricas em cascata que contém função de produção variável impossibilitam a aplicação direta da metodologia de convexificação através da transformação de variáveis de volume em energia [ENR]. Isto deve-se ao fato de que o mesmo volume de água associado à defluência de uma usina a montante e à afluência das usinas a jusante faz com que a relação de transformação em energia deixe de ser biunívoca uma vez que as usinas têm funções de produção diferentes. Para contornar este problema, foi sugerido um procedimento heurístico para gerar aproximações dessas relações de transformação.

O primeiro passo consiste na obtenção do chamado perfil de esvaziamento das usinas através da execução de um modelo de otimização não-linear de maximização da energia produzida no sistema, considerando a condição inicial dos reservatórios igual aos volumes máximos de armazenamento, e afluências naturais nulas. Utilizando o software Monalisa, conforme mencionado na seção

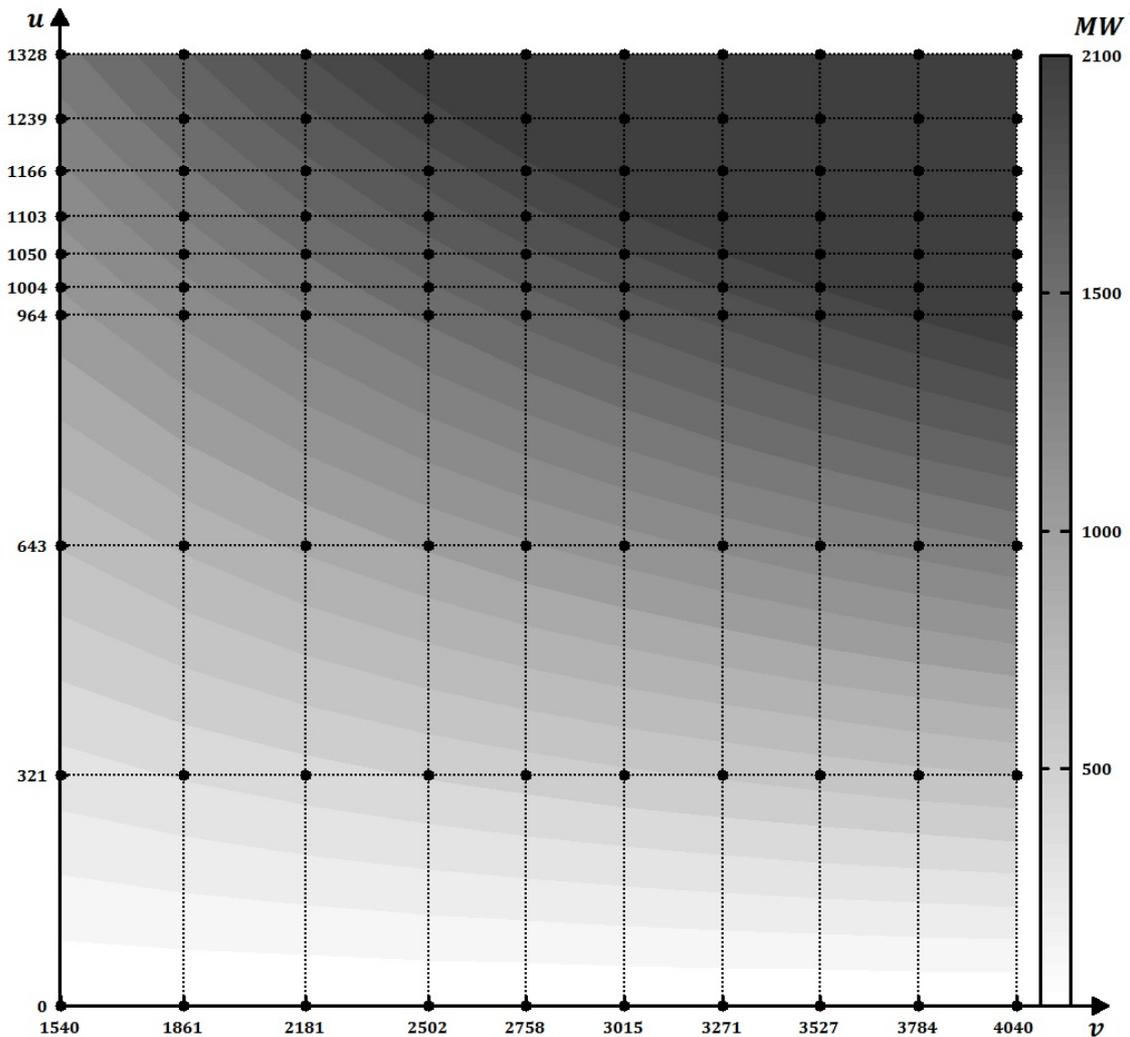


Figura 5.12: Discretização da função de produção da usina de M.Moraes

4.2.3, foi obtida a dinâmica de utilização dos estoques de água dos reservatórios considerando um período de 12 estágios. Este resultado deu origem ao perfil de esvaziamento, mostrado para algumas usinas na figura 5.13, que foi adotado neste estudo para a região sudeste. Os valores extraídos deste resultado foram utilizados na construção das funções aproximadas necessárias para a aplicação do método [ENR] de convexificação via transformação de variáveis.

### 5.3.2 Resultados

O horizonte considerado para este estudo é de 12 estágios mensais. Os parâmetros associados ao algoritmo de PDDE consistem em 30 cenários para simulação e 10 discretizações de afluições para recursão. As afluições hidrológicas consideradas no problema são geradas a partir de um modelo independente, sem levar em conta as correlações temporais.

O critério de convergência, conforme discutido na seção 2.4.2, foi atendido para

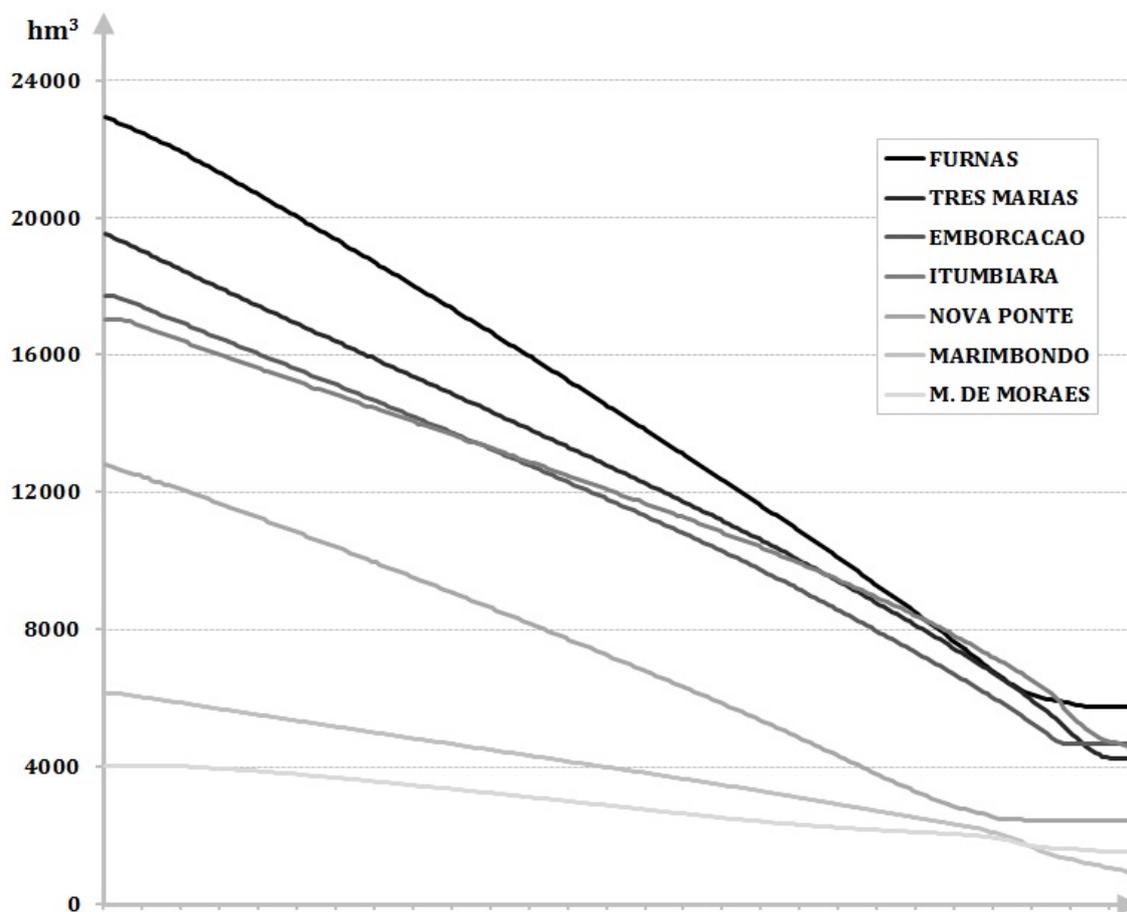


Figura 5.13: Perfil de esvaziamento das usinas do Sudeste Brasileiro

todos os casos executados neste trabalho. A seguir são discutidos os resultados obtidos para cada uma das metodologias analisadas para a convexificação das FCFs. A tabela 5.6 apresenta informações relevantes a respeito da convergência para o cálculo da política operativa e a tabela 5.7 contém os resultados associados à fase de simulação operativa do sistema, considerando as FCFs obtidas na primeira etapa.

Tabela 5.6: Resultados do cálculo da política operativa - Sudeste Brasileiro

Método	Num. Iterações	LInf. (k\$)	LSup. (k\$)	LSup.Min (k\$)	LSup.Max (k\$)	CPU (s)
<b>RL1</b>	6	843.040	995.510	918.475	1.072.545	1.925
<b>RL2</b>	6	853.080	982.930	907.223	1.058.637	2.712
<b>RL3</b>	6	879.930	977.033	904.483	1.049.583	3.691
<b>CTE</b>	3	1.213.600	1.214.700	1.142.524	1.286.876	110
<b>LPC</b>	3	983.570	993.120	914.921	1.071.319	336
<b>ENR</b>	3	1.059.000	1.083.100	1.003.422	1.162.778	120

Dentre as metodologias que seguem o critério de Convexificação da FCF foi observado que:

Tabela 5.7: Resultados da simulação operativa - Sudeste Brasileiro

<b>Método</b>	<b>Custo Oper.</b> <b>(k\$)</b>	<b>CPU</b> <b>(s)</b>
<b>RL1</b>	995.510	47
<b>RL2</b>	982.930	51
<b>RL3</b>	977.033	55
<b>CTE</b>	1.047.667	35
<b>LPC</b>	999.471	40
<b>ENR</b>	1.006.967	43

- Da mesma forma como foi verificado no caso anterior para a hidrelétrica de El Cajón, os resultados obtidos para os modelos [RL1], [RL2] e [RL3] mostram que a incorporação das técnicas de convexificação local e procedimento de busca dos multiplicadores garantiu um maior refinamento das aproximações das FCFs ao tornar mais próximos os limites inferior e superior da solução do problema.

Para as metodologias que seguem o critério de Convexificação do Componente foi observado que:

- Novamente a metodologia [CTE], ao ignorar a variabilidade da função de produção hidrelétrica, apresentou o pior resultado com relação à estratégia para o planejamento da operação.
- Diferentemente do que foi observado no primeiro caso, para este estudo a utilização da função linear por partes convexa [LPC] garantiu um pequeno ganho em relação ao custo operativo associado à solução do modelo com substituição de variáveis [ENR], entretanto apresentou o pior desempenho computacional entre estas três metodologias.

Das soluções obtidas para este segundo estudo, pode-se concluir que, ainda que a convergência do algoritmo utilizando o critério de Convexificação da FCF seja claramente mais lenta que qualquer uma das metodologias de Convexificação do Componente, as soluções obtidas para estes modelos foram melhores em termos de custo operativo total.

As metodologias de Convexificação do Componente, [LPC] e [ENR] se mostraram bastante eficientes em termos de obtenção estratégias que resultaram em custos operativos não muito superiores aos da metodologia [RL3], com a vantagem de expressiva redução do esforço computacional, especialmente para o caso da formulação alternativa com substituição de variáveis [ENR].

As figuras 5.14, 5.15 e 5.16 apresentam alguns gráficos comparativos dos resultados obtidos.

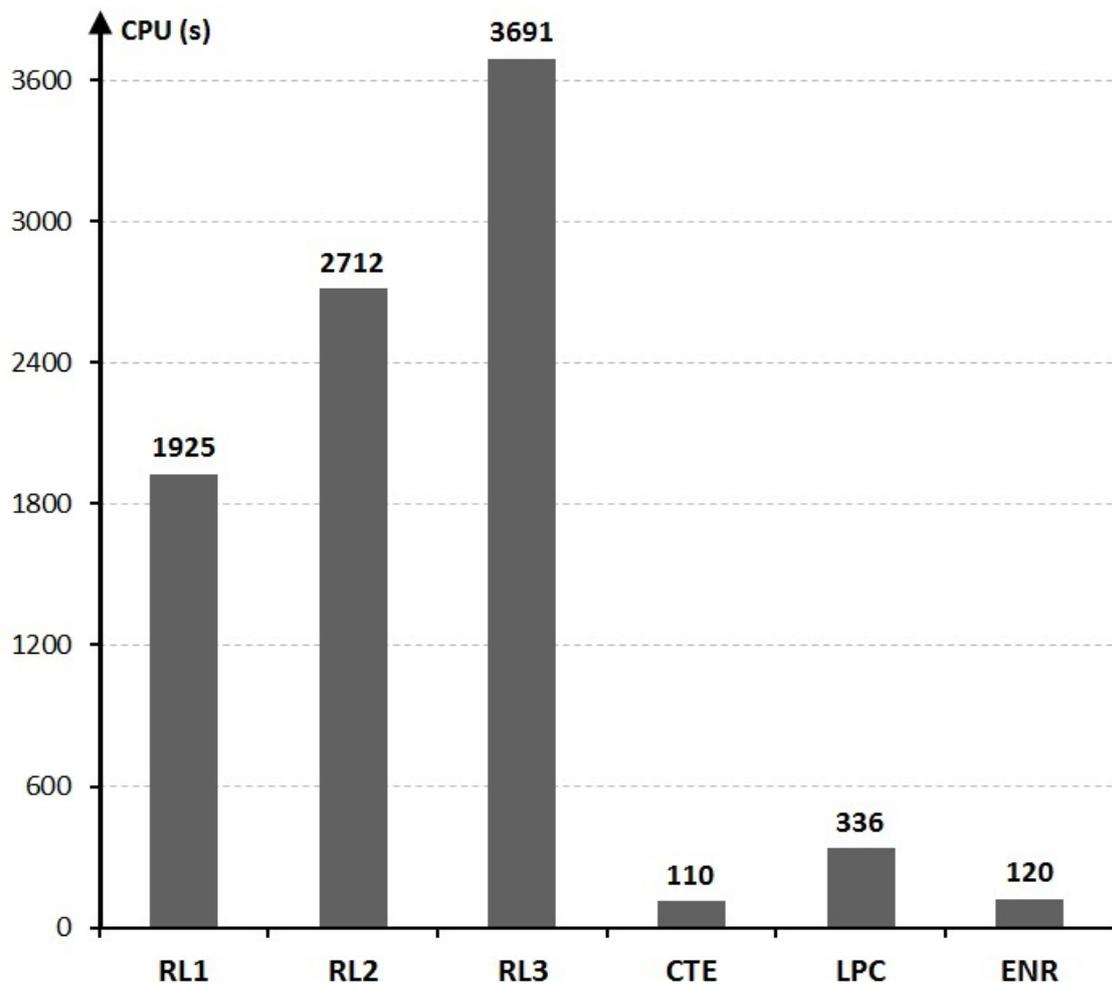


Figura 5.14: Tempo de execução total - Sudeste Brasileiro

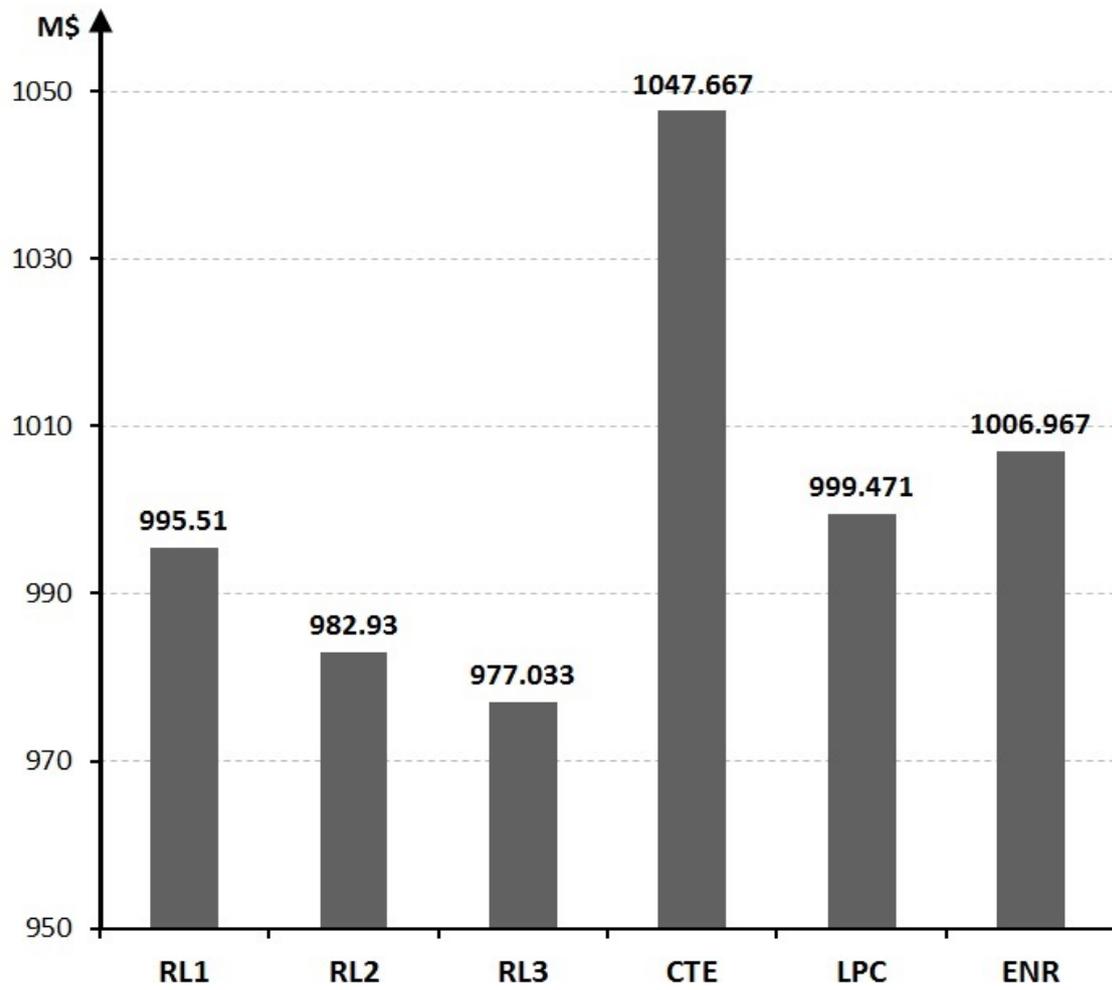


Figura 5.15: Valor esperado do custo operativo - Sudeste Brasileiro

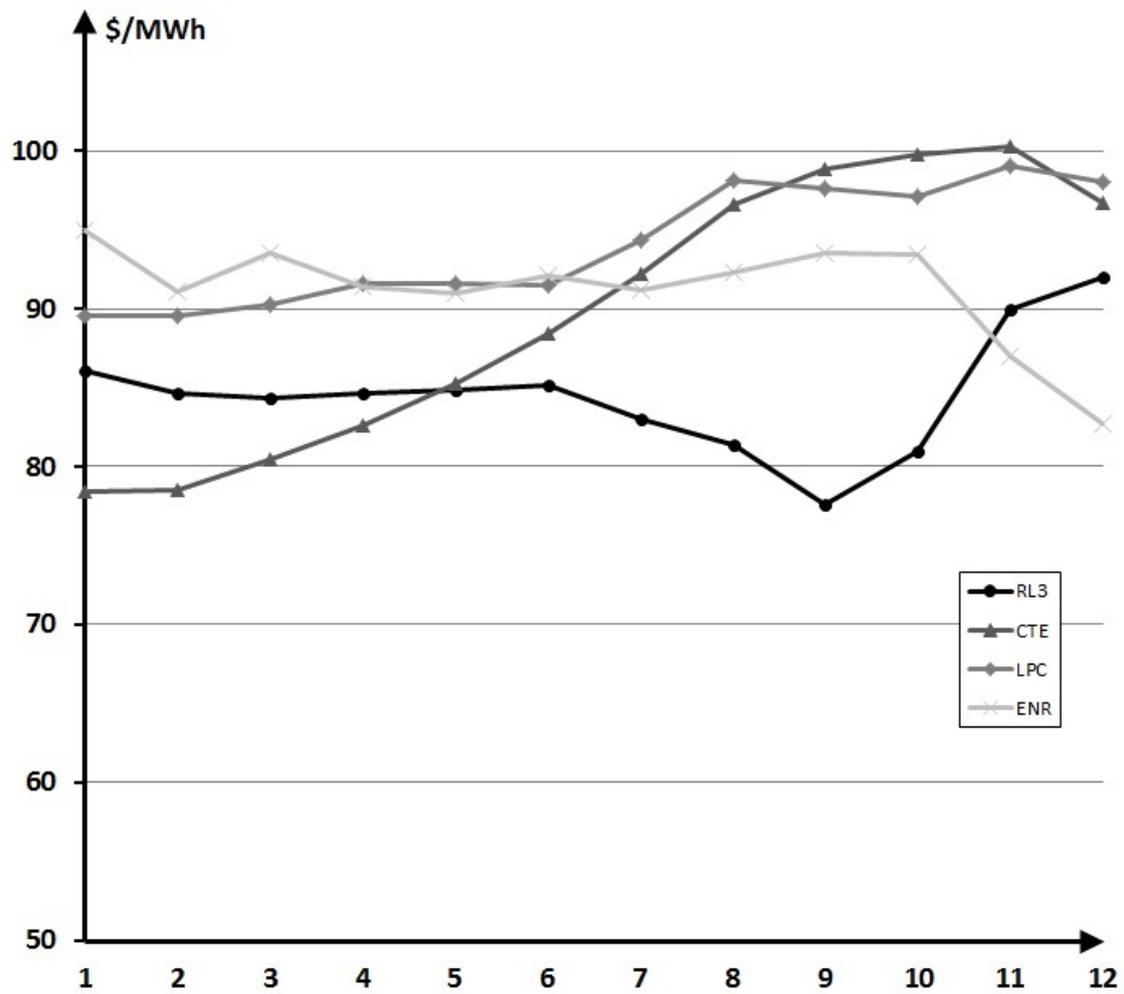


Figura 5.16: Valor esperado do custo marginal de operação - Sudeste Brasileiro

# Capítulo 6

## Considerações finais e trabalhos futuros

### 6.1 Conclusões

A importância da representação de não-convexidades no problema de operação de sistemas hidrotérmicos está relacionada com a necessidade de determinação de uma política operativa ótima para um período de planejamento, considerando os efeitos associados às características reais dos componentes do sistema. A política para gerenciamento dos recursos energéticos consiste em uma estratégia de tomada de decisões sob incerteza, essencialmente hidrológicas, e é obtida tradicionalmente a partir de um algoritmo de programação dinâmica dual estocástica.

O algoritmo de PDDE é baseado na construção iterativa de aproximações lineares das funções de custo futuro (FCF) obtidas a partir das informações duais associadas à solução dos problemas para cada estágio. Dessa forma, a fim de garantir o critério de convergência do algoritmo, exige-se convexidade para as FCFs. Por esta razão é que a incorporação de função não-convexa e decisões discretas na formulação do problema de operação, como é o caso do modelo apresentado no capítulo 2, torna necessária a utilização de técnicas para a convexificação das FCFs.

Neste trabalho foram avaliadas diferentes metodologias para a solução deste problema, divididas segundo o critério de convexificação adotado: Convexificação da FCF ou Convexificação do Componente. O primeiro critério é definido para os métodos que mantêm a formulação original não-convexa do problema e utilizam um procedimento auxiliar para convexificação dos cortes que compõem as FCFs; o segundo critério é definido para a substituição a priori da formulação original do problema por outra que utiliza representação convexa dos componentes do sistema.

Na linha de Convexificação da FCF foi abordado o uso da técnica de relaxação Lagrangeana das restrições de balanço hídrico do sistema para obtenção dos

coeficientes que dão origem aos cortes das FCFs. Esta metodologia garante não apenas a convexidade das aproximações, como também a construção de aproximações externas para as FCFs, respeitando assim o critério de convergência do algoritmo de PDDE. Foi proposto, neste trabalho, um aprimoramento desta metodologia com a incorporação de um procedimento eficiente para atualização dos multiplicadores de Lagrange, buscando tornar mais fortes as aproximações das FCFs.

Na linha de Convexificação dos Componentes foi discutida a necessidade de garantia de aproximações externas às FCFs. Foi abordada a técnica convencionalmente adotada para o problema de convexificação com o uso de funções lineares por partes ajustadas para minimização do erro de aproximação. Embora ênfase tenha sido dada à flexibilidade que ambos os critérios de convexificação apresentam quanto à natureza das não-convexidades representadas, as análises foram direcionadas ao problema de representação da variabilidade do fator de produção das usinas hidrelétricas. Um modelo de programação linear inteira mista foi utilizado para a formulação deste problema, considerando uma função linear por partes não-convexa gerada partir de uma grade de pontos discretizados de volume armazenado e defluência total das usinas. Neste contexto, uma nova metodologia de Convexificação do Componente foi proposta nesta tese, considerando a substituição de variáveis de volume de água por energia armazenada, e incorporando um procedimento heurístico que permitiu a representação da variabilidade do fator de produção de usinas em cascata, através da relação aproximada entre estas funções.

A avaliação dos critérios de convexificação se baseou em uma análise de desempenho de cada uma das metodologias abordadas, considerando os resultados de simulações operativas de sistemas hidrotérmicos gerados a partir da política estabelecida pelas aproximações das FCFs. As seguintes metodologias foram consideradas para comparação dos resultados: para o critério de Convexificação da FCF, três abordagens utilizando a relaxação Lagrangeana, a primeira considerando os multiplicadores de Lagrange extraídos da solução de uma relaxação linear do problema original, a segunda considerando os multiplicadores extraídos da solução de um problema localmente convexificado e a terceira considerando a segunda abordagem acrescida do procedimento de busca proposto para atualização dos multiplicadores. Para o critério de Convexificação do Componente, outras três abordagens, a primeira considerando fator de produção médio constante, a segunda considerando fator de produção variável usando função linear por partes convexa e a terceira considerando a proposta de transformação de variáveis de volume em energia armazenada.

O procedimento comparativo foi realizado para dois estudos de caso, o primeiro considerando a hidrelétrica de El Cajón, em Honduras, escolhida pelas características particulares da função de produção desta usina, e o segundo

considerando a região Sudeste (e Centro-Oeste), a mais importante do sistema Brasileiro. A seguir estão descritas as principais conclusões tiradas a partir dos resultados desses estudos.

A importância da representação da variabilidade da função de produção hidrelétrica no cálculo das aproximações das FCFs foi observada pelo valor elevado de custo operativo total obtido na simulação dos casos em que a política operativa foi calculada com fator de produção constante. Isto é, ao estabelecer que, durante o cálculo da política operativa, as hidrelétricas operam com fator de produção constante, isto é, independente do nível de armazenamento dos reservatórios, podemos estar cometendo distorções muito grandes no planejamento da operação caso as condições hidrológicas, topográficas e operacionais do sistema tornem muito expressiva a variabilidade das funções de produção.

A metodologia utilizando a relaxação Lagrangeana foi claramente aperfeiçoada pela incorporação dos procedimentos proposto nesta tese. Ao considerar a solução de um problema localmente convexificado e o algoritmo de maximização do Lagrangeano, foram obtidos valores para os multiplicadores de Lagrange que garantiram melhor aproximação das FCFs em relação à solução de um problema de relaxação linear. Estes progressos foram verificados a partir dos valores obtidos para os limites inferiores e superiores da solução do problema. Portanto, a estratégia sugerida, que inclui a solução do problema original não-convexo, tornou possível tanto a formulação do problema localmente convexificado, como a indicação do valor ótimo de limite superior para atualização dos multiplicadores de Lagrange.

O desempenho desta metodologia em relação especificamente aos casos analisados mostrou que a natureza de elevada não-convexidade do problema de El Cajón não permitiu a convergência do algoritmo de cálculo da política operativa. Comprovou-se que a aproximação externa de uma função não-convexa pode levar a descasamentos muito grandes dos limites inferior e superior da solução do problema, prejudicando assim a qualidade do planejamento, uma vez que o resultado da simulação para o custo operativo não foi o mais adequado. Entretanto, no caso da região Sudeste, esta metodologia resultou em uma boa estratégia, isto é, foram obtidos cortes fortes para a aproximação das FCFs que garantiram a melhor solução da simulação operativa.

Os resultados obtidos para as metodologias de linearização por partes e transformação de variáveis, segundo o critério de Convexificação do Componente, mostraram que estes métodos, apesar de não garantirem aproximações externas das FCFs, podem resultar em estratégias adequadas de operação, principalmente em casos onde a não-convexidade é mais expressiva, como é o caso de El Cajón. Neste estudo, ambas as metodologias tiveram melhor desempenho em relação ao custo operativo e esforço computacional, se comparadas com a técnica de relaxação Lagrangeana, podendo ainda destacar a alternativa proposta com a transformações

de variáveis. No caso da região Sudeste, mesmo não resultando na solução com melhor custo operativo, ainda sim, estas metodologias de Convexificação do Componente mostraram extrema eficiência computacional para obtenção de soluções não tão piores quanto o caso de fator de produção constante. Isto significa dizer que o procedimento heurístico que inclui a criação do perfil de esvaziamento do sistema que foi desenvolvido para o modelo alternativo pode ser considerado uma boa estratégia de convexificação.

De fato, foi verificado que a metodologia de relaxação Lagrangeana conduziu a convergências mais lentas, devido ao número de problemas de programação linear inteira mista a serem resolvidos para cada iteração do algoritmo de PDDE. No entanto, apesar de ser interessante para fins comparativos, ao lidar com problemas de planejamento, especialmente para horizontes de médio a longo prazo, o tempo de execução do cálculo da política não chega a ser um critério muito relevante na escolha de uma metodologia de solução, uma vez que este algoritmo provavelmente será aplicado com intervalos que podem variar de semanas a meses. No caso do sistema Brasileiro, por exemplo, este esforço extra garantiu um benefício para a solução do custo operativo do sistema e por essa razão acreditamos nas vantagens associadas à aplicação desta metodologia.

Dessa forma, conclui-se finalmente que a seleção da metodologia de convexificação a ser aplicada a um problema específico de planejamento da operação não é uma tarefa trivial, e depende fundamentalmente das características do sistema e da aplicação prática do estudo realizado.

## 6.2 Trabalhos futuros

A busca pela crescente eficiência computacional é um dos desafios da investigação prática e teórica em modelagem matemática. Esta busca tem levado a uma grande diversidade de esforços para transformar um problema matemático específico em um que possa ser resolvido eficientemente. Ao utilizarmos uma função linear-por-partes para representar a função de produção hidrelétrica, estamos trabalhando com uma simplificação do problema original que não irá capturar regiões altamente não lineares a menos que seja feita uma discretização bastante refinada desta função. Isso significa que a aproximação se torna muito mais precisa à medida que o número de valores discretizados cresce. Infelizmente, isto representa um crescimento também no tamanho do problema. Sugere-se como extensão do presente trabalho buscar metodologias para discretizações eficientes não uniformes desta função, a fim de criar uma representação acurada com esforço computacional mais reduzido.

Além disso, como foi visto na descrição do trabalho, é necessária a incorporação das variáveis inteiras na formulação da função de produção hidrelétrica para garantir

adjacência nas combinações lineares convexas dos pontos do *grid* de discretização. Este artifício permite que os valores para esta função não sejam subestimados devido a existência das não-convexidades. Entretanto, quanto maior é o número de variáveis inteiras do problema, mais combinatória é a natureza do modelo e, portanto, mais dificilmente solucionado. No sentido de diminuição do número de variáveis inteiras para a definição de uma função linear-por-partes não convexa, sugere-se a incorporação da técnica proposta por Vielma [66] que torna logaritmico o número de variáveis inteiras e restrições necessárias para a modelagem da função.

Em relação aos métodos de convexificação abordados, os benefícios observados com a metodologia de relaxação Lagrangeana proposta sugerem uma motivação para incorporação de novas fontes de não-convexidades, por exemplo, as decisões de unit commitment, restrições de rampa, tempo mínimo e máximo. Ou ainda, utilizar para problemas de naturezas diversas, como por exemplo:

- Desenvolvimento de uma estratégia de expansão da capacidade de geração e transmissão sob incerteza da taxa de crescimento da demanda, custos de combustíveis etc. Este problema pode ser formulado como um modelo de otimização estocástica multi-estágio e resolvido por PDDE, porém é necessário representar o fato de que as decisões de investimento em geração são variáveis inteiras, e portanto levam a problemas não convexas em cada estágio.
- Representação de fluxo de potência ótimo não-linear com restrições de segurança (SC) e ações de chaveamento no cálculo da política operativa estocástica. O SC-FPO é um problema não convexo que contém variáveis inteiras.
- Representação de restrições de segurança baseadas em risco de racionamento e Value at Risk (VaR) no cálculo da política operativa estocástica. Estas restrições são representadas como o valor esperado de funções indicadoras binárias.
- Representação de problemas de otimização estocástica multi-estágio de ativos físicos (usinas) e financeiros (contratos) de uma empresa, sujeito a restrições de VaR. Assim como nos casos anteriores, este problema é não convexo e pode ser resolvido por PDDE através da convexificação pelo esquema de Lagrangeano.

Por fim, como podem ser muito agressivos os cortes gerados com metodologias que não garantem aproximações externas para as FCFs, isto é, podem acabar eliminando regiões importantes do conjunto de soluções viáveis do problema, poderia ser desenvolvida uma metodologia híbrida no sentido de construção das

aproximações das FCFs: Isto é, nas primeiras iterações são utilizadas metodologias mais conservadoras que garantem limites inferiores dos valores da FCF para gerar os primeiros cortes e posteriormente usa-se outra metodologia para gerar outros cortes mais agressivos e assim obter uma política operativa realista.

# Referências Bibliográficas

- [1] 2009, *Monalisa: Modelo Não Linear para Cálculo da Energia Firme*. Manual do Usuário Versão 3.0, PSR, Rio de Janeiro.
- [2] 2013, *SDDP: Stochastic Dual Dynamic Programming*. Manual de Metodologia Versão 12, PSR, Rio de Janeiro.
- [3] AHMED, S., KING, A. J., PARIJA, G., 2003, “A multi-stage stochastic integer programming approach for capacity expansion under uncertainty”, *Journal of Global Optimization*, v. 26, pp. 3–24.
- [4] ARCE, A., OHISHI, T., SOARES, S., 2002, “Optimal dispatch of generating units of the Itaipu Hydroelectric Plant”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 1 (February), pp. 154–158.
- [5] BELLMAN, R. E., 1957, *Dynamic Programming*. Princeton, NJ, Princeton University Press.
- [6] BELLONI, A., DINIZ, A. L., MACEIRA, M. E., et al., 2003, “Bundle relaxation and primal recovery in unit commitment problems: The Brazilian case”, *Annals of Operations Research*, v. 120, n. 1-4 (April), pp. 21–44.
- [7] BELTRAN-ROYO, C., 2009, “The radar method: An effective line search for piecewise linear concave functions”, *Annals of Operations Research*, v. 166, n. 1, pp. 299–312.
- [8] BENDERS, J. F., 1962, “Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems”, *Numerische Mathematik*, v. 4, pp. 238–252.
- [9] BEZERRA, B., BARROSO, L. A., KELMAN, R., et al., 2010, “Integrated Electricity-Gas Operations Planning in Long-term Hydroscheduling Based on Stochastic Models”, *Handbook of Power Systems. Energy Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [10] BORGUETTI, A., FRANGIONI, A., LACALANDRA, F., et al., 2003, “Lagrangian heuristics based on disaggregated bundle methods for

- hydrothermal unit commitment”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 1 (February), pp. 313–323.
- [11] BORGUETTI, A., AMBROSIO, C., LODI, A., 2008, “A MILP approach for short-term hydro scheduling and unit commitment problem”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 23, n. 3 (August), pp. 1115–1124.
- [12] BURAS, N., 1966, “Dynamic programming and water resources development”, *Advances in Hydroscience*, v. 3, pp. 372–412.
- [13] CAROE, C. C., SCHULTZ, R., 1996, “Dual decomposition in stochastic integer programming”. In: *Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin*, December.
- [14] CARPENTIER, P., COHEN, G., CULIOLI, J.-C., et al., 1996, “Stochastic optimization of unit commitment: a new decomposition framework”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, pp. 1067–1073.
- [15] CERISOLA, S., BAILLO, A., LOPEZ, J. M. F., et al., 2009, “Stochastic power generation unit commitment in electricity markets: a novel formulation and a comparison of solution methods”, *Operations Research*, v. 57, n. 1 (January), pp. 32–46.
- [16] CERISOLA, S., LATORRE, J. M., RAMOS, A., 2012, “Stochastic dual dynamic programming applied to nonconvex hydrothermal models”, *European Journal of Operational Research*, v. 218, n. 3 (May), pp. 687–697.
- [17] CHANG, G. W., AGANAGIC, M., WAIGHT, J. G., et al., 2001, “Experiences with mixed integer linear programming based approaches on short term hydro scheduling”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, n. 4 (November), pp. 743–749.
- [18] CUNHA, S. H. F., PRADO, S., COSTA, J. P., 1997, “Modelagem da produtividade variavel de usinas hidreletricas com base na construcao de uma funcao de producao energetica”. In: *XII Simposio Brasileiro de Recursos Hidricos, Anais 2*. ABRH.
- [19] DINIZ, A. S. L., MACEIRA, M. E. P., 2008, “A Four-Dimensional Model of Hydro Generation for the Short-Term Hydrothermal Dispatch Problem Considering Head and Spillage Effects”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 23, n. 3 (August), pp. 1298–1308.

- [20] DINIZ, A. S. L., TERRY, L. A., SOUSA, L. C. F., et al., 2004, “Modelagem da Funcao de Producao Energetica das Usinas Hidroeletricas nos Modelos de Otimizacao do Planejamento a Curto Prazo e da Programacao do Despacho de Sistemas Hidrotermicos Interligados”. In: *IX SEPOPE - Simposio de Especialistas em Planejamento da Operacao e Expansao Eletrica*, May.
- [21] FENTELMARK, S., KIWIEL, K. C., 1999, “Dual applications of proximal bundle methods including lagrangian relaxation of nonconvex problems”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 10, n. 3, pp. 697–721.
- [22] FINARDI, E. C., SILVA, E. L., 2006, “Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 21, n. 2 (May), pp. 835–844.
- [23] FISHER, M. L., 1981, “The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems”, *Management Science*, v. 27, n. 1 (January), pp. 1–18.
- [24] FLETEN, S.-E., WALLACE, S. W., 2009, “Delta-Hedging a Hydropower Plant Using Stochastic Programming”, *Optimization in the Energy Industry, Energy Systems*, v. 1, pp. 507–524.
- [25] GEOFFRION, A. M., 1972, “Generalized Benders decomposition”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 10, n. 4, pp. 237–260.
- [26] GEOFFRION, A. M., 1974, “Lagrangean relaxation for integer programming”, *Mathematical Programming Study 2*, v. 2, pp. 82–114.
- [27] GJELSVIK, A., MO, B., HAUGSTAD, A., 2010, “Long and Medium-term Operations Planning and Stochastic Modelling in Hydro-dominated Power Systems Based on Stochastic Dual Dynamic Programming”, *Handbook of Power Systems. Energy Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- [28] GONZALEZ, J. G., CASTRO, G. A., 2001, “Short-term hydro scheduling with cascaded and head-dependent reservoirs based on mixed-integer linear programming”. In: *Proc. 10th Power Tech Conference*, September.
- [29] GUAN, X., SVOBODA, A. J., LI, C., 1999, “Scheduling hydro power systems with restricted operating zones and discharge ramping constraints”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1 (February), pp. 126–131.

- [30] HALL, W. A., BURAS, N., 1961, “The Dynamic Programming Approach to Water-Resources Development”, *Journal of Geophysical Research*, v. 66, n. 2, pp. 517–520.
- [31] HANSON, F. B., 1996, “Techniques in Computational Stochastic Dynamic Programming”, *Stochastic Digital Control System Techniques*, v. 76, pp. 103–162.
- [32] JACOBS, J., FREEMAN, G., GRYGIER, J., et al., 1995, “A stochastic multi-reservoir hydroelectric scheduling model”. In: *Integrated Water Resources Planning for the 21st Century, Proceedings of the 22nd Annual Conference*. Water Resources Planning and Management Division, American Society of Civil Engineers, .
- [33] JACOBS, J., FREEMAN, G., GRYGIER, J., et al., 1995, “SOCRATES - A system for scheduling hydroelectric generation under uncertainty”, *Annals of Operations Research*, v. 59, n. 1, pp. 99–133.
- [34] JIMENEZ, N., CONEJO, A. J., 1999, “Short-term hydrothermal coordination by Lagrangian relaxation: Solution of the dual problem”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, pp. 89–95.
- [35] LABADIE, J., 2004, “Optimal operation of multireservoir systems: State-of-the-art review”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 130, n. 2, pp. 93–111.
- [36] LAMOND, B. F., BOUKHTOUTA, A., 1996, “Optimizing long-term hydro-power production using markov decision processes”, *International Transactions in Operational Research*, v. 3, n. 3-4, pp. 223–241.
- [37] LI, C. A., SVOBODA, A. J., TSENG, C. L., et al., 1997, “Hydro unit commitment in hydro-thermal optimization”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 2 (May), pp. 764–769.
- [38] MACEIRA, M. E. P., DUARTE, V. S., PENNA, D. D. J., et al., 2008, “Ten Years of Application of Stochastic Dual Dynamic Programming in Official and Agent Studies in Brazil - Description of the NEWAVE Program”. In: *16th Power Systems Computation Conference (PSCC)*, July.
- [39] MCCORMICK, G. P., 1976, “Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part I - convex underestimating problems”, *Mathematical Programming*, v. 10, pp. 147–175.

- [40] MORTON, D. P., 1996, “An enhanced decomposition algorithm for multistage stochastic hydroelectric scheduling”, *Annals of Operations Research*, v. 64, pp. 211–235.
- [41] NI, E., GUAN, X., LI, R., 1999, “Scheduling hydrothermal power systems with cascaded and head-dependent reservoirs”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 3 (August), pp. 1127–1132.
- [42] NORBIN, V. I., PFLUG, G., RUSZCZYNSKI, A., 1998, “A branch and bound method for stochastic global optimization”, *Mathematical Programming*, v. 83, pp. 425–450.
- [43] NOWAK, M., RAOMISCH, W., 2000, “Stochastic Lagrangian relaxation applied to power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty”, *Annals of Operations Research*.
- [44] OLIVEIRA, G. C., GRANVILLE, S., PEREIRA, M. V. F., 2002, “Optimization in electrical power systems”, *Handbook of applied optimization*, pp. 770–807.
- [45] PEREIRA, M. V. F., 1989, “Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 11, pp. 161–169.
- [46] PEREIRA, M. V. F., PINTO, L. M. V. G., 1985, “Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach”, *Water Resources Research*, v. 21, n. 6, pp. 779–792.
- [47] PEREIRA, M. V. F., PINTO, L. M. V. G., 1991, “Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning”, *Mathematical Programming*, v. 52, pp. 359–375.
- [48] ROCKAFELLAR, R. T., WETS, R. J.-B., 1991, “Scenario and policy aggregation in optimization under uncertainty”, *Mathematics of Operations Research*, v. 16, pp. 119–147.
- [49] ROMISCH, W., SCHULTZ, R., 1996, “Decomposition of a multi-stage stochastic program for power dispatch”, *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Mechanik*, v. 76, n. 3, pp. 29–32.
- [50] SAHINIDIS, N. V., 2004, “Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities”, *Computers and Chemical Engineering*, v. 28, n. 6-7, pp. 971–983.

- [51] SCHULTZ, R., STOUGIE, L., VAN DER VLERK, M. H., 1996, “Two-stage stochastic integer programming: a survey”, *Statistica Neerlandica*, v. 50, pp. 404–416.
- [52] SEN, S., 2005, “Algorithms for stochastic mixed-integer programming models”, *Handbooks in OR and MS*, v. 12.
- [53] SHAWWASH, Z. K., SIU, T. K., RUSSEL, S. O. D., 2000, “The B.C. Hydro short term hydro scheduling optimization model”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 3 (August), pp. 1125–1131.
- [54] SHOR, N. Z., 1985, *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. 3 ed. New York, Springer Berlin Heidelberg.
- [55] SHRESTHA, G. B., POKHAREL, B. K., LIE, T. T., et al., 2005, “Medium term power planning with bilateral contracts”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 5, pp. 627–633.
- [56] SINGH, K. J., PHILPOTT, A. B., WOOD, R. K., 2009, “Dantzig-Wolfe Decomposition for Solving Multistage Stochastic Capacity-Planning Problems”, *Operations Research*, v. 57, n. 5 (October), pp. 1271–1286.
- [57] SOARES, S., SALMAZO, C. T., 1997, “Minimum loss predispatch model for hydroelectric power systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 3 (August), pp. 1220–1228.
- [58] SOARES, S., OHISHI, T., CICOGNA, M., et al., 2003, “Dynamic dispatch of hydro generation units”. In: *IEEE Power Tech Conference*, June.
- [59] SUANNO, C. M., 1995, *Operação Estocástica de Sistemas Hidrotérmicos com Representação da Produtibilidade Variável*. Dissertação M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [60] TAKRITI, S., BIRGE, J. R., LONG, E., 1996, “A stochastic model for the unit commitment problem”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, pp. 1497–1508.
- [61] THOME, F. S., FAMPA, M. H. C., GRAVILLE, S., et al., 2012, “Representation of Nonconvexities in Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP)”. In: *Informatics Annual Meeting 2012*, October 14-17.
- [62] TILMAN, A., KELMAN, R., 2007, “A stochastic approach to analyze trade-offs and risks associated with large-scale water resources systems”, *Water Resources Research*, v. 43.

- [63] TURGEON, A., 1981, “A decomposition method for the long-term scheduling of reservoirs in series”, *Water Resources Research*, v. 17, n. 6, pp. 1565–1570.
- [64] TURGEON, A., 1981, “Optimal short-term hydro scheduling from the principle of progressive optimality”, *Water Resources Research*, v. 17, n. 3, pp. 481–486.
- [65] VELASQUEZ, J., RESTREPO, P. J., CAMPO, R., 1999, “Dual Dynamic Programing: A Note on Implementation”, *Water Resources Research*, v. 35, n. 7, pp. 2269–2271.
- [66] VIELMA, J. P., NEMHAUSER, G. L., 2008, “Modeling Disjunctive Constraints with a Logarithmic Number of Binary Variables and Constraints”. In: *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, v. 5035, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 199–213.
- [67] WALLACE, S. W., FLETEN, S.-E., 2003, “Stochastic programming models in energy”, *Handbooks in Operations Research and Management Science, Stochastic Programming*, v. 10, pp. 637–677.
- [68] WETS, R. J.-B., 1974, “Stochastic programs with fixed recourse: The equivalent deterministic program”, *SIAM Review*, v. 16, n. 3, pp. 309–339.
- [69] YAKOWITZ, S., 1982, “Dynamic programming applications in water resources”, *Water Resources Research*, v. 18, n. 4, pp. 673–696.
- [70] YEH, W. W.-G., 1985, “Reservoir management and operations models: A state of the art review”, *Water Resources Research*, v. 21, n. 12 (July), pp. 1797–1818.