EQUILÍBRIOS DE NASH EM MERCADOS TERMELÉTRICOS COM OFERTAS PREÇO-QUANTIDADE: ANÁLISE E ALGORITMO

Marcelo Moraes Resende
PSR
Praia de Botafogo, 370 - Botafogo, Rio de Janeiro - RJ, 22250-040, Brasil
resende@psr-inc.com

Carlos Tomei
Departamento de Matemática, PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea, Rio de Janeiro – RJ, 22451-900, Brasil
tomei@mat.puc-rio.br

Sérgio Granville
PSR
Praia de Botafogo, 370 - Botafogo, Rio de Janeiro - RJ, 22250-040, Brasil
granville@psr-inc.com

Gabriel Cunha
PSR
Praia de Botafogo, 370 - Botafogo, Rio de Janeiro - RJ, 22250-040, Brasil
gabriel@psr-inc.com

RESUMO

Este trabalho analisa equilíbrios de Nash em um sistema termelétrico em que os geradores declaram custos quadráticos para o operador e suas disponibilidades máximas de geração. O operador, então, determina a produção de cada gerador para atender a uma demanda inelástica ao menor custo possível. Estabelecemos resultados matemáticos e um algoritmo que permitem computar os equilíbrios de Nash deste modelo.

PALAVRAS CHAVE. Mercados Elétricos. Simulação de Mercado. Equilíbrios de Nash.

PO na Área de Energia, Petróleo e Gás; Programação Matemática

ABSTRACT

This work analyzes Nash equilibria in a thermoelectric system in which the generators declare quadratic costs for the operator and their maximum available capacity. The operator then determines the production of each generator to meet an inelastic demand at the lowest possible cost. We establish mathematical results and an algorithm that allows us to compute the Nash equilibria of this model.

KEYWORDS. Electricity Markets. Market Simulation. Nash Equilibria

OR in the Energy, Oil and Gas Area; Mathematical Programming

1. Introdução e motivação

Modelos de equilíbrio em mercados elétricos têm sido foco de pesquisa, por sua utilidade para agentes e reguladores [Wolak 2003]. Em muitos modelos, os agentes escolhem somente quantidades, em oligopólios de Cournot [Barroso 2006], [Fanzeres et al. 2020]. Em outros, podem escolher o preço cobrado em função de sua geração, mas não a capacidade disponível [Klemperer e Meyer 1989], [Green 1996], [Lin 2020].

Na seção 2, sugerimos um modelo [Resende 2023] em que cada gerador elétrico decide tanto o preço como a quantidade da energia que disponibiliza para o sistema. Custos e ofertas dos geradores são aproximados por funções quadráticas. Nas seções seguintes, descrevemos condições de existência e um algoritmo que encontra todos os (múltiplos) equilíbrios de Nash, se existirem.

2. O espaço de estratégias e o problema do operador

Seja um sistema elétrico com N agentes geradores termelétricos. Cada agente j possui capacidade *real* $\bar{G}_j$ (em MW) e seu custo *real* é uma função quadrática da geração g_j, $c_j g_j^2/2$ (em reais), com $c_j > 0$. Mas ele *pode declarar* ao operador do sistema valores diferentes de quantidade máxima, $\bar{g}_j$, e custo, $b_j g_j^2/2$, com o intuito de alterar preços e aumentar seu lucro. As regras de mercado limitam os valores declarados ao *espaço de estratégias*

$$S_j = \{(b_j, \bar{g}_j) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \bar{g}_j \leq \bar{G}_j \ e \ \ 0 < b_j \bar{g}_j \leq M\}$$

em que M é o custo de déficit (em reais/MW). Isto é, um agente deve declarar disponibilidade entre 0 e sua capacidade real. O custo marginal *declarado* ($b_j \bar{g}_j$) não pode superar o custo de déficit.

Definidas as estratégias dos agentes, o operador resolve a minimização de custos

$$\min_{g_1,\ldots,g_N,\, def} \sum_{j \leq N} b_j g_j^2/2 + M \times def \tag{1}$$

s.a. $\sum_{j \leq N} g_j + def = d$ (balanço); $\quad \forall j,\ 0 \leq g_j \leq \bar{g}_j$ (geração máxima); $\quad def \geq 0$.

Os parâmetros são $(b_j, \bar{g}_j) \in S_j$ (as estratégias dos agentes), $d \geq 0$ (a demanda do sistema) e $M > 0$, o custo de déficit. As variáveis de decisão são g_j, a geração exigida ao agente j, e def, a demanda não atendida ou *déficit*. O preço *spot* π é a variável dual associada à restrição de balanço.

Para um vetor de estratégias $\boldsymbol{s} \in S = \prod_{j \leq N} S_j$, definimos as funções $g_j(\boldsymbol{s})$, $def(\mathbf{s})$ e $\pi(\boldsymbol{s})$, que o associam à solução do problema de minimização de custos[1]. O lucro de cada agente é

$$L_j(\boldsymbol{s}) = \pi(\boldsymbol{s}) g_j(\boldsymbol{s}) - c_j g_j^2(\boldsymbol{s})/2. \tag{2}$$

O problema de um operador real é mais complexo que em (1) e as funções de custo em geral não são quadráticas. As simplificações que decidimos implementar, entretanto, são usuais [Bortolossi 2002]. O nosso objetivo é encontrar b_j e $\bar{g}_j$ declarados pelos agentes em equilíbrio.

3. Equilíbrios de Nash

Usamos dois conceitos de equilíbrio. Como usual, $(s_1, \ldots, s_N) \in S$ é um *equilíbrio de Nash global* se todo agente maximiza globalmente seu lucro dadas as estratégias dos concorrentes,

$$\forall\, j,\ \ \forall\, s' \in S_j,\ \ L_j(s_1, \cdots, s_j, \cdots, s_N) \geq L_j(s_1, \cdots, s_{j-1}, s', s_{j+1}, \cdots, s_N).$$

No caso de um *equilíbrio de Nash local* [Ratliff et al. 2016], a maximização ocorre localmente,

$$\forall\, j, \exists\, \epsilon > 0, \forall\, s' \in S_j,$$

$$\|s' - s_j\| < \epsilon \rightarrow L_j(s_1, \cdots, s_j, \cdots, s_N) \geq L_j(s_1, \cdots, s_{j-1}, s', s_{j+1}, \cdots, s_N)$$

Todo equilíbrio de Nash local é também global, mas o inverso não vale.

4. Caracterização de equilíbrios de Nash locais

Particionamos $S \subseteq (\mathbb{R}^+)^{2N}$ em 2^N subconjuntos indexados por $J \subseteq \{1,2, \ldots, N\}$,

$$\mathcal{R}_J = \{\boldsymbol{s} \in \textstyle\prod_{j \leq N} S_j \mid \forall j \in J,\ g_j(\boldsymbol{s}) = \bar{g}_j\ ;\ \ \forall j \notin J, g_j(\boldsymbol{s}) < \bar{g}_j\}.$$

---

[1] Por convexidade e compacidade, a otimização tem solução única. Se $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j \neq d$, pode-se provar que π é único. Se $\sum_{j \leq N} \bar{g}_j = d$, convencionamos $\pi(\boldsymbol{s}) = M$. Isso garante que as funções são bem definidas.

Por exemplo, $\mathcal{R}_{\{1,3\}}$ é o conjunto dos vetores de estratégias que levam a soluções da otimização em que os agentes 1 e 3 (e somente esses) geram a máxima capacidade (declarada).

Mostra-se que os equilíbrios de Nash locais no interior de cada $\mathcal{R}_J$, se existirem, formam uma caixa N-dimensional E_J [Resende 2023]. Qualquer ponto em E_J leva às mesmas gerações, preço e lucros (sendo, neste sentido, soluções indiferentes para os agentes e para o operador). Mais precisamente, $\boldsymbol{s} = (b_1, \ldots, b_N, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_N)$ é equilíbrio de Nash local no interior de $\mathcal{R}_J$ se só se[2]

$$\forall j \notin J,\ b_j = c_j + \left(\sum_{i \notin J \cup \{j\}} \frac{1}{b_i}\right)^{-1} \text{ (3)}; \qquad \forall j \in J,\ \bar{g}_j = \frac{d - \sum_{k \in J - \{j\}} \bar{g}_k}{2 + c_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} < \bar{G}_j \text{ (4)};$$

$$\forall j \notin J,\ \frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{b_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}} < \bar{g}_j < min\left\{\bar{G}_j, \frac{M}{b_j}\right\} \text{ (5)}; \qquad \forall j \in J,\ 0 < b_j < min\left\{\frac{d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i}{\bar{g}_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}}, \frac{M}{\bar{g}_j}\right\} \text{ (6)}.$$

O sistema não linear (3) tem $N - card(J)$ equações e variáveis (as variáveis são b_j, para $j \notin J$). Sua solução existe e é única, desde que $card(J) < N - 2$ [Resende 2023]. Uma vez resolvidos b_j em (3), as equações em (4) são um sistema linear determinado nas variáveis $\bar{g}_j$ (com $j \in J$), de solução única. Os N graus de liberdade restantes, os valores de $\bar{g}_j$ para $j \notin J$ e de b_j para $j \in J$, podem variar nos intervalos dados pelas desigualdades (5) e (6), que definem E_J.

Se para algum $j \in J$, $\bar{g}_j$ encontrado como solução de (4) é maior que $\bar{G}_j$, as inequações em (4) não são satisfeitas, então não existe equilíbrio de Nash local. O mesmo ocorre se, para algum $j \notin J$, $\min\{\bar{G}_j, M/b_j\} < \left(d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i\right) / \left(b_j \sum_{i \notin J} \frac{1}{b_i}\right)$, já que a condição (5) não pode então ser satisfeita.

5. Equilíbrios de Nash globais

Suponha uma região $\mathcal{R}_J$ com $E_J \neq \emptyset$. Por (5) e (6), existem pontos de E_J arbitrariamente próximos ao vértice com $b_j = 0$, para todo j em J, e $\bar{g}_j = \min\{\bar{G}_j, M/b_j\}$, para todo $j \notin J$. Mostramos que, se estes pontos não forem equilíbrios de Nash globais, então nenhum outro ponto de E_J será: a busca é local [Resende 2023].

6. Algoritmo

O seguinte algoritmo encontra os equilíbrios de Nash locais e um global interiores a $\mathcal{R}_J$:

1. Resolver o sistema de equações[3] (3) e encontrar b_k, para $k \notin J$.
2. Resolver (4), com os valores de b_j encontrados no passo 1, e encontrar $\bar{g}_j$, para $j \in J$.
3. Verificar se $\forall k \notin J, \left(d - \sum_{i \in J} \bar{g}_i\right) / \left(\sum_{i \notin J} 1/b_i\right) < \min\{M, b_k \bar{G}_k\}$ e $\forall j \in J, \bar{g}_j < \bar{G}_j$. Caso negativo, pare: $E_J = \emptyset$.
4. Encontrar E_J, calculando as cotas de $\bar{g}_k$, para $k \notin J$, e de b_j, para $j \in J$, segundo (5) e (6).
5. Tomar ϵ pequeno e verificar[4] se o ponto da caixa com $\bar{g}_k = \min\{\bar{G}_j, M/b_j\} - \epsilon$, para todo $k \notin J$, e $b_j = \epsilon$, para todo $j \in J$, é equilíbrio de Nash global.

Podemos percorrer todos os subconjuntos $J \subseteq \{1,2, \ldots, N\}$, se o objetivo for encontrar todos os equilíbrios possíveis, ou parar assim que acharmos $\mathcal{R}_J$ com equilíbrio de Nash global. Como o número de subconjuntos é 2^N, a complexidade do algoritmo cresce exponencialmente com o número de agentes, o que pode inviabilizar sua aplicação em sistemas elétricos de grande porte – outra limitação para aplicação em sistemas reais são as simplificações de modelagem realizadas

[2] Para obter as equações (3) e (4), escreve-se o lucro de cada agente j em função de $b_1, \ldots, b_N, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_N$ em $\mathcal{R}_J$ e igualam-se à zero as derivadas parciais em relação a b_j e $\bar{g}_j$ [Resende 2023].

[3] Basta resolver a equação $B = \sum_{j \notin J} \left(c_j/2 + 1/\mathrm{B} + \sqrt{\left(c_j/2\right)^2 + (1/\mathrm{B})^2}\right)^{-1}$ em B e fazer $b_k = c_k/2 + 1/B + \sqrt{(\mathrm{c_k}/2)^2 + (1/\mathrm{B})^2}$ [Resende 2023].

[4] Uma forma é, para cada agente j, fixar as estratégias dos *N-1* concorrentes e calcular seu lucro em uma malha de pontos em S_j. Se em algum ponto da malha o lucro for maior que o lucro no ponto testado, então este não é um equilíbrio de Nash global.

(ver seção 2). Aqui, testamos um caso com 14 agentes, que levou cerca de 30 segundos em computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-8565U CPU 1.80GHz e 16 GB de RAM, usando MATLAB. Uma linha promissora de pesquisa é a busca de estratégias mais eficientes para percorrer os conjuntos $\mathcal{R}_J$ da partição.

O algoritmo calcula E_J de cada $\mathcal{R}_J$ e verifica se um ponto de E_J é equilíbrio de Nash global. Outros possíveis equilíbrios globais em E_J são equivalentes, com mesmas gerações, lucros e preço.

Como exemplo, seja $N = 4$, $M = 6000$, $d = 3700$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0.8, 0.4, 0.3, 0.2)$ e $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4) = (600, 1200, 1300, 5000)$. Há somente duas caixas de equilíbrios locais ($E_\emptyset$ e $E_{\{4\}}$) e só uma possui equilíbrios globais, como na tabela. Para mais exemplos, ver [Resende 2023].

Partição	$J = \emptyset$		$J = \{4\}$	
Equilíbrios de Nash Locais $E_\emptyset$ e $E_{\{4\}}$ (passos 1 a 4)	$b_1 = 0.96$ $b_2 = 0.58$ $b_3 = 0.49$ $b_4 = 0.41$	$\bar{g}_1 > 532$ $\bar{g}_2 > 879$ $\bar{g}_3 > 1039$ $\bar{g}_4 > 1251$	$b_1 = 1.23$ $b_2 = 0.89$ $b_3 = 0.82$ $0 < b_4 < 0.52$	$\bar{g}_1 > 592$ $\bar{g}_2 > 815$ $\bar{g}_3 > 889$ $\bar{g}_4 = 1405$
Existe Nash global (passo 5, $\epsilon = 10^{-9}$)?	Sim: b_j como acima, $\bar{g}_j = \bar{G}_j - 10^{-9}, \forall j$		Não	

7. Conclusão

Modelamos um mercado termelétrico como um leilão em que cada agente declara custos quadráticos e disponibilidades, e o operador resolve um problema simplificado de minimização de custos. Para este tipo de mercado, a identificação de equilíbrios de Nash foi completada. Futuras pesquisas podem levar a algoritmos mais eficientes e genéricos.

Referências

Barroso, L. A. N. (2006). Estratégias de ofertas ótimas sob incerteza e cálculos de equilíbrios de Nash de agentes geradores em mercados de curto prazo de energia elétrica: uma abordagem por programação linear inteira. Tese (Doutorado) - Engenharia de Sistemas e Computação, UFRJ.

Bortolossi, H. J. (2002). Operação ótima de sistemas hidrotérmicos. Minicurso no XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC).

Fanzeres, B., Street, A. e Pozo, D. (2020). A column-and-constraint generation algorithm to find Nash equilibrium in pool-based electricity markets. *Electric Power Systems Research*, 189.

Green, R. (1996). Increasing competition in the British electricity spot market. *The Journal of Industrial Economics*, 44(2): 205-216.

Klemperer, P. e Meyer, M. (1989). Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty. *Econometrica*, 57(2): 1243-1277.

Lin, W. e Bitar, E. (2020). A structural characterization of market power in electric power networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 7 (3): 987-1006.

Ratliff, L. J., Burden, S. A. e Sastry, S. S. (2016), On the characterization of local Nash equilibria in continuous games, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(8): 2301-2307.

Resende, M. M. (2023). Equilíbrios de Nash em mercados elétricos com funções de oferta quadráticas cotadas. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática, PUC-Rio.

Wolak, F. A. (2003). Measuring unilateral market power in wholesale electricity markets: the California market, 1998-2000. *American Economic Review*, 93 (2): 425-430.