

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

CAROLINA MONTEIRO CARNEIRO DA SILVA

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO
DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS ELÉTRICOS
INDEPENDENTES

Rio de Janeiro

2022

CAROLINA MONTEIRO CARNEIRO DA SILVA

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO
DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS ELÉTRICOS
INDEPENDENTES

Trabalho de conclusão de curso apresentada
para a Escola de Matemática Aplicada
(FGV/EMAp) como requisito para o grau
de bacharel em Matemática Aplicada

Área de estudo: Otimização

Orientador: Vincent Guigues

Rio de Janeiro

2022

Ficha catalográfica elaborada pela BMHS/FGV

da Silva, Carolina

Modelagem e Otimização da Operação Descentralizada de Sistemas Elétricos Independentes / Carolina Monteiro Carneiro da Silva. – 2022.

29 f.

Trabalho de Conclusão de Curso – Escola de Matemática Aplicada.

Advisor: Vincent Gérard Yannick Guigues .

Includes bibliography.

1. Otimização descentralizada 2. Sistemas elétricos 3. Programação Linear I. Vincent Gérard Yannick Guigues II. Escola de Matemática Aplicada III. Modelagem e Otimização da Operação Descentralizada de Sistemas Elétricos Independentes

CAROLINA MONTEIRO CARNEIRO DA SILVA

MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO
DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS ELÉTRICOS
INDEPENDENTES

Trabalho de conclusão de curso apresentado para a
Escola de Matemática Aplicada (FGV/EMAp) como
requisito para o grau de bacharel em Matemática
Aplicada. Área de estudo: Otimização

E aprovado em 07/12/2022

Pela comissão organizadora

Vincent Gérard Yannick Guigues
Escola de Matemática Aplicada

Alfredo Noel Iusem
Escola de Matemática Aplicada

Joaquim Masset Lacombe Dias Garcia
PSR

Rio de Janeiro

2022

CAROLINA MONTEIRO CARNEIRO DA SILVA

**“MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DESCENTRALIZADA DE SISTEMAS ELÉTRICOS
INDEPENDENTES”**

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC apresentado ao Curso de Graduação em Matemática Aplicada da Escola de Matemática Aplicada para obtenção do grau de Bacharel (a) em Matemática Aplicada.

Data da Defesa: 07/12/2022

ASSINATURA DOS MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA



Vincent Gerard Yannick Guigues
Orientador



Alfredo Iusem
Membro



Joaquim Garcia
Membro

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a toda a minha família, incluindo pais, tios, irmão e primos, por desde a minha infância ter contribuído para a minha educação e incentivado meus estudos. Também agradeço a todas as professoras de Matemática que despertaram e atiçaram minha curiosidade ao longo dos meus anos na escola.

Um agradecimento especial ao professor Lucídio Santos, que me treinou para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, uma competição que teve grande impacto na minha vida. Com isso, aproveito para agradecer ao professor César Camacho por liderar a criação da OBMEP em 2005, e futuramente promover o Programa "Seleção de Talentos", que foi fundamental para o meu ingresso e conclusão da graduação em Matemática Aplicada.

Agradeço aos amigos que fiz e mantive ao longo da graduação, dentre eles José Arthur de Souza, Ana Luíza Nunes, Laura Chaves e Yolanda D'Ávila.

Agradeço aos que contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiramente agradeço aos meus supervisores Joaquim Garcia e Tiago Andrade, por todas as reuniões e conversas sobre a formulação dos modelos contidos neste documento. Um agradecimento especial ao Joaquim por me auxiliar na escrita deste documento e por me motivar nas horas mais difíceis. Agradeço também ao meu orientador, Vincent Guigues, por me ensinar a escrever de forma mais clara e técnica, com boas notações matemáticas.

Agradeço aos meus colegas Rafael Benchimol, por ter me convencido a escolher como tema deste trabalho um projeto realizado no meu estágio, e Thiago Novaes por ter contribuído com alguns *insights* que melhoraram a convergência do modelo apresentado.

Agradeço à minha irmã Regina Peixoto, por ter revisado o texto deste documento. Não posso deixar de agradecer a meu namorado, Yan Brum, por todo o suporte emocional a mim prestado ao longo do processo de escrita.

RESUMO

O problema do despacho ótimo para um grupo de sistemas elétricos interligados visa definir as quantidades de energia a serem geradas em cada gerador de cada sistema, bem como as quantidades de energia a ser transmitida entre cada par de sistemas, de forma a minimizar os custos. Uma pequena revisão bibliográfica mostra que é desejável que esse problema seja resolvido de forma descentralizada.

Este trabalho apresenta um modelo para resolver o problema do despacho ótimo de sistemas elétricos interligados de forma descentralizada. Para isso, propõe o algoritmo da Operação Coordenada, que iterativamente define o fluxo de energia entre os sistemas, com base nos custos marginais, e em seguida corrige os custos marginais com base nos novos fluxos.

Experimentos numéricos são feitos baseados em dados fictícios de 3 sistemas, em que o primeiro sistema possui 7 geradores, o segundo possui 3 geradores, e o terceiro possui 2 geradores.

Palavras-Chave: Otimização descentralizada, Despacho ótimo, Otimização, Sistemas elétricos

ABSTRACT

The optimal dispatch problem for a group of interconnected power systems aims to define the amounts of energy to be generated in each generator of each system, as well as the amounts of energy to be transmitted between each pair of systems, in order to minimize costs. A small bibliographic review shows that it is desirable that this problem be solved in a decentralized way.

The present work presents a model to solve the optimal dispatch problem of interconnected power systems in a decentralized way. For this, it proposes the Coordinated Operation algorithm, which iteratively defines the energy flow between the systems, based on the marginal costs, and then corrects the marginal costs based on the new flows.

Numerical experiments are done based on fictitious data from 3 systems, where the first system has 7 generators, the second has 3 generators, and the third has 2 generators.

Keywords: Decentralized optimization, Optimal dispatch, Optimization, Power systems

Sumário

1	Introdução	11
2	Sistemas isolados	13
2.1	Parâmetros	13
2.2	Variáveis de decisão	13
2.3	Modelagem	14
3	Operação integrada	14
3.1	Parâmetros	15
3.2	Variáveis de decisão	16
3.3	Modelagem	17
4	Operação coordenada	18
4.1	Parâmetros e variáveis	18
4.2	Subproblema Define_Fluxos	20
4.3	Subproblema Define_Custos_Marginais	21
4.4	Algoritmo da Operação Coordenada	22
5	Experimentos numéricos	24
6	Conclusão	27
	Referências	28

Lista de Figuras

1	Gráfico com a soma dos custos dos sistemas a cada iteração.	24
2	Gráfico com a comparação dos objetivos das Operações Coordenada e Integrada	25
3	Função objetivo de cada sistema ao longo das iterações da Operação Coordenada	26
4	Custo térmico de cada sistema ao longo das iterações da Operação Coordenada	26
5	Custo marginal de cada sistema ao longo das iterações da Operação Coordenada	27
6	Preço da energia entre cada par de sistemas ao longo das iterações da Operação Coordenada	28

Lista de Tabelas

1	Parâmetros de Sistemas Isolados	13
2	Variáveis de Decisão de Sistemas Isolados	14
3	Parâmetros do modelo Operação Integrada	16
4	Variáveis de decisão do modelo Operação Integrada	16
5	Parâmetros do modelo Operação Coordenada	19
6	Variáveis do modelo Operação Coordenada	20

1 Introdução

Problemas de otimização descentralizada têm sua importância em diversas áreas, como a cooperação de veículos não tripulados, o uso de satélites miniaturizados, ou redes de sensores sem fio [4], [9], [2], [11]. De forma geral, otimização descentralizada surge quando agentes conectados competem por algum recurso, cada um objetivando maximizar algum benefício individual, e o objetivo da rede é definir a alocação de recursos de forma a maximizar o benefício total [11]. Com uma abordagem descentralizada, os agentes da rede tomam decisões locais, e se tenta coordenar o objetivo geral.

Neste documento, o problema abordado envolve um conjunto de sistemas elétricos independentes, que podem ser interpretados como países, cujo objetivo de cada um é minimizar seus custos de obtenção de energia, sendo que a quantidade de energia obtida deve atender a uma demanda interna preestabelecida. Esse problema é conhecido na literatura como o problema do despacho [3]. Cada sistema tem duas formas de obter energia: por meio da geração em suas usinas ou pela compra de outros sistemas. É possível também vender energia para outros sistemas, de forma que o lucro com as vendas é subtraído dos custos. Então, a chave do problema é definir, para cada sistema, o quanto de energia ele produzirá internamente e como, a quantidade de energia que ele comprará ou venderá para cada um dos outros sistemas, e os preços de compra ou venda da energia. O objetivo geral do problema é minimizar a soma dos custos de cada sistema.

Observando que não é desejável que sistemas elétricos independentes divulguem suas informações internas uns para os outros, um modelo de operação descentralizada para minimização dos custos de produção é proposto em [1]. Neste modelo, as trocas de energia e os preços são baseados em custos marginais, e existe uma entidade de coordenação que capta algumas informações do sistema, como seu custo marginal.

Além de gerar problemas com exposição de informações, abordar centralizadamente a operação de sistemas elétricos independentes pode não ser recomendado em algum casos. O motivo é que uma operação centralizada pressupõe que os sistemas em questão, que podem ser países, aceitariam o controle de uma entidade

externa.

Motivado pelos dois problemas apontados, o modelo descrito neste documento priorizará uma abordagem descentralizada para o problema de otimização do despacho. Mais especificamente, neste modelo os sistemas não precisam divulgar todas as suas informações, nem obedecer a uma entidade central. Na modelagem, as decisões locais dos sistemas envolverão definir a quantidade de energia a ser gerada internamente e as quantidades de energia a serem compradas ou vendidas para cada outro sistema. A decisão sobre compras e vendas naturalmente se baseia em preços, e por isso é preciso que o modelo defina os preços de alguma forma.

Em [10], é mostrado que o custo marginal associado a um gerador pode ser usado para definir o preço da energia dele, e no caso em que isso é feito, o sistema opera de forma a atingir eficiência econômica. A precificação com base em custos marginais é abordada e defendida em [8], apesar de barreiras, inclusive econômicas, serem apresentadas para sua implementação. Dessa forma, os preços de compra e venda de energia, no modelo a ser apresentado neste documento, serão baseados em custos marginais.

Em [11], é modelado um problema em que cada agente tem sua função objetivo, individual e não compartilhada com os demais agentes, e a função objetivo do problema é minimizar a soma das funções objetivo de cada agente. Todos os agentes cooperam para chegar a uma solução ótima para o sistema, sem uma coordenação central. Na solução, o artigo relaxa a restrição de que as variáveis de decisão devem assumir um só valor para todos os agentes, e faz uma otimização dual.

Este documento se organiza da seguinte forma: na seção 2, é apresentado o modelo Sistemas Isolados, que será útil para introduzir o problema e também será usado para resolver um subproblema no modelo principal, apesar de não ser o objeto central deste texto. Um modelo para a Operação Integrada, que é a abordagem centralizada para a solução do problema proposto, é apresentado na seção 3, com a finalidade de auxiliar a introduzir o modelo principal mais uma vez e gerar dados para comparações de soluções. Na seção 4, é apresentado o modelo da Operação Coordenada, que é a versão descentralizada para solucionar o problema, objeto central deste documento. Finalmente, experimentos numéricos são apresentados na seção 5.

2 Sistemas isolados

O problema Sistemas Isolados tem como panorama um sistema elétrico isolado, sem possibilidade de intercâmbio de energia com outros sistemas. Esse sistema possui uma demanda de energia a atender, podendo contar com alguns geradores que têm capacidades máximas e custos predefinidos. O objetivo do problema é definir as quantidades de energia gerada em cada gerador, de forma a minimizar os custos e atender à demanda.

2.1 Parâmetros

O sistema analisado no modelo de Sistemas Isolados é indexado por k . Para esse sistema k , temos como dados de entrada: a demanda D^k do sistema, em unidades de energia; a quantidade de geradores q^k que o sistema possui; o vetor de custos c^k , em que c_i^k é o custo, em unidades de dinheiro por unidades de energia, de se produzir cada unidade de energia no gerador i ; o vetor de capacidades máximas G^k , em que G_i^k é a quantidade máxima de energia que o gerador i pode gerar, em unidades de energia.

A tabela 1 fornece um resumo dos parâmetros do modelo de Sistemas Isolados.

D^k	Demanda de energia do sistema k
q^k	Número de geradores do sistema k
c^k	Vetor com o custo de cada gerador do sistema k : c_i^k é o custo do gerador i do sistema k
G^k	Vetor com a capacidade máxima de cada gerador do sistema k : G_i^k é a capacidade máxima do gerador i do sistema k

Tabela 1: Parâmetros de Sistemas Isolados

2.2 Variáveis de decisão

Temos como variáveis de decisão para o sistema indexado por k : o vetor de gerações g^k , em que g_i^k é a quantidade de energia a ser gerada no gerador i , em unidades de energia; e a variável dual λ_k , que é associada à restrição do balanço

de demanda. A interpretação da variável λ_k é o custo marginal do sistema, que significa o custo de se aumentar a demanda a cada unidade de energia aumentada. A unidade de medida dessa variável é unidades de dinheiro por unidades de energia.

A tabela 2 fornece um resumo das variáveis de decisão do modelo de Sistemas Isolados.

g^k	Vetor com a energia gerada em cada gerador do sistema k : g_i^k é a energia gerada no gerador i
λ_k	Variável dual associada à restrição do balanço de demanda do sistema k

Tabela 2: Variáveis de Decisão de Sistemas Isolados

2.3 Modelagem

A função objetivo é minimizar o custo total de geração, que é a soma do produto da quantidade de energia a ser gerada em cada gerador pelo seu respectivo custo de geração: $\sum_{i=1}^{q^k} c_i^k g_i^k = c^{k\top} g^k$.

Como restrições, temos que: a quantidade de energia gerada em cada gerador tem que ser não negativa e menor ou igual que a capacidade máxima do gerador (restrição (1-b) do problema 1), e a soma das quantidades geradas por cada gerador tem que ser igual à demanda (restrição (1-c) do problema 1)). O problema de otimização correspondente é:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{g^k, \lambda_k} & c^{k\top} g^k & (a) \\ 0 \leq g_i^k \leq G_i^k, & i = 1, \dots, q^k & (b) \\ \sum_{i=1}^{q^k} g_i^k = D^k & : \lambda_k. & (c) \end{array} \right. \quad (1)$$

3 Operação integrada

O problema abordado pelo modelo Operação Integrada é similar ao modelo de Sistemas Isolados. A diferença fundamental é que, em vez de definir a operação para um único sistema isolado, define-se a operação para N sistemas interligados, que podem vender energia uns para os outros. Como no modelo Sistemas Isolados,

cada sistema k no modelo da Operação Integrada possui geradores com custo e capacidade máxima definidos, e uma demanda a ser atendida. Além disso, existe um limite para o fluxo de energia entre cada par de sistemas. Tal limite representa as capacidades das linhas de transmissão que interconectam os sistemas. O objetivo na Operação Integrada é definir a quantidade de energia gerada em cada gerador de cada sistema e o fluxo de energia entre cada par de sistemas, de forma a minimizar a soma dos custos de produção dos sistemas.

Esse modelo resolve o problema de forma centralizada, pressupondo que existiria um operador central que conhece todos os parâmetros de todos os sistemas e define como cada sistema deve agir para atingir a otimalidade da operação conjunta. Como mencionado na introdução, essa abordagem centralizada pode não ser desejável, porque os sistemas elétricos independentes em geral não estão dispostos a compartilhar todas as suas informações, nem a aceitar um controle partindo de uma entidade externa. Apesar desse aspecto indesejável, o modelo da Operação Integrada contribuirá com este trabalho para ajudar a introduzir o modelo da Operação Coordenada, definido na seção 4, e para criar um comparativo para os resultados do mesmo modelo.

3.1 Parâmetros

Temos como parâmetros da Operação Integrada o número de sistemas N e a matriz de fluxos máximos F , em que cada entrada F_{jk} é o fluxo máximo do sistema j para o sistema k , em unidades de energia. Note que se $j = k$, ou se os sistemas j e k não são conectados, $F_{jk} = 0$. Temos também como parâmetros, para cada sistema k : a demanda D^k , em unidades de energia; a quantidade q^k de geradores; o vetor de custos c^k , em que c_i^k é definido em unidades de dinheiro por unidades de energia; e o vetor de gerações máximas G^k , em que G_i^k é definido em unidades de energia. Os parâmetros definidos por sistema estão descritos com mais detalhes na seção 2.1.

A tabela 3 fornece um resumo dos parâmetros do modelo Operação Integrada.

N	Número de sistemas
D^k	Demanda de energia do sistema k
q^k	Número de geradores do sistema k
c^k	Vetor com o custo de cada gerador do sistema k : c_i^k é o custo do gerador i do sistema k
G^k	Vetor com a capacidade máxima de cada gerador do sistema k : G_i^k é a capacidade máxima do gerador i do sistema k
F	Matriz de fluxos máximos, cuja entrada F_{jk} é o fluxo máximo do sistema j para o sistema k

Tabela 3: Parâmetros do modelo Operação Integrada

3.2 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão de Operação Integrada são: para cada sistema k , o vetor de gerações g^k , em que g_i^k , definido em unidades de energia, é melhor detalhado na seção 2.2; e a matriz de fluxos f , em que cada entrada f_{jk} é o fluxo de energia que vai do sistema j para o sistema k . Note que f_{jk} pode assumir valores negativos, e que caso assuma, significa que k está enviando uma quantidade positiva de energia para j . Note também que $f_{jk} = -f_{kj}$, e $f_{kk} = 0$, portanto f é matriz antissimétrica.

A tabela 4 fornece um resumo das variáveis de decisão do modelo Operação Integrada.

g^k	Vetor com a energia gerada em cada gerador do sistema k : g_i^k é a energia gerada no gerador i
f	Matriz com o fluxo de energia entre cada par de sistemas: f_{jk} é o fluxo de energia do sistema j para o sistema k

Tabela 4: Variáveis de decisão do modelo Operação Integrada

3.3 Modelagem

Temos, para a Operação Integrada, o modelo 2 a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{f, g^1, g^2, \dots, g^N} \sum_{k=1}^N c^{k\top} g^k & (a) \\ 0 \leq g_i^k \leq G_i^k, \quad i = 1, \dots, q^k, \quad k = 1, \dots, N & (b) \\ -F_{jk} \leq f_{kj} \leq F_{kj}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N & (c) \\ f_{jk} = -f_{kj}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N & (d) \\ \sum_{i=1}^{q_k} g_i^k - \sum_{j=1}^N f_{kj} = D^k, \quad k = 1, \dots, N & (e) \end{array} \right. \quad (2)$$

A função objetivo (2-a) é minimizar a soma dos custos de produção de cada sistema: $\sum_{k=1}^N c^{k\top} g^k$, com relação às variáveis f e g^1, g^2, \dots, g^N .

As restrições (2-b) e (2-c) expressam limites inferior e superior de variáveis. A restrição (2-b) diz respeito a g_i^k : a quantidade de energia gerada por cada gerador deve ser não negativa e menor ou igual que à capacidade máxima G_i^k . Por outro lado, (2-c) limita f . A variável f_{kj} pode assumir valor positivo, negativo ou nulo. Caso assuma um valor positivo, significa que o sistema k está enviando energia ao sistema j , e portanto f_{kj} tem que ser menor ou igual ao fluxo máximo F_{kj} de k para j . Caso assuma valor negativo, f_{kj} na verdade representa a quantidade que j está mandando a k , porém negativa, e essa quantidade tem que respeitar o fluxo máximo F_{jk} do sistema j para o sistema k , ou seja: $-f_{kj} = f_{jk} \leq F_{jk} \therefore f_{kj} \geq -F_{jk}$. E, por fim, caso f_{kj} seja nulo, ainda respeitará os limites, pois F recebe entradas não negativas.

A restrição (2-d) reflete o fato de que a quantidade de energia que j envia a k tem que ser igual à quantidade de energia que k recebe de j .

Por último, a restrição (2-e) modela o suprimento da demanda. A energia que é gerada no sistema e o saldo dos fluxos devem juntos totalizar a quantidade de energia demandada. A quantidade de energia gerada no sistema é a soma das quantidades geradas em cada gerador: $\sum_{i=1}^{q_k} g_i^k$. O saldo de fluxos é a soma da energia recebida de outros sistemas ($-f_{kj}$ caso f_{kj} seja negativo) menos a soma da energia enviada a outros sistemas (f_{kj} caso seja positivo), ou seja, $-\sum_{j=1}^N f_{kj}$. Assim, chegamos

à equação: $\sum_{i=1}^{q_k} g_i^k - \sum_{j=1}^N f_{kj} = D^k$.

4 Operação coordenada

A Operação Coordenada se propõe a resolver o mesmo problema que a Operação Integrada, mas de forma descentralizada. Para isso, definimos um algoritmo iterativo, em que a cada iteração se resolve o problema sob a ótica de cada um dos N sistemas e se compatibiliza as soluções propostas por cada um. A cada iteração ℓ , o algoritmo determina o preço de venda λ_k^ℓ da energia no sistema $k = 1, \dots, N$.

Dentro do algoritmo da Operação Coordenada, são utilizados o modelo de Sistemas Isolados (1), e os subproblemas `Define_Fluxos` e `Define_Custos_Marginais`, a serem definidos nesta seção.

Nesta seção, o preço da energia entre dois sistemas k e j será dado como a média entre os custos marginais desses dois sistemas. Essa definição é útil porque, supondo que o custo marginal de um sistema i seja menor que o de um sistema j ($\lambda_i < \lambda_j$), o preço $\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}$ é maior que λ_i e menor que λ_j , então cria um incentivo para i querer vender energia para j , e j querer comprar de i , contribuindo para a alocação ótima dos recursos.

4.1 Parâmetros e variáveis

Os parâmetros da Operação Coordenada são exatamente os mesmos descritos na seção 3.1, com o acréscimo de L , que é o número máximo de iterações do *loop* principal do modelo. A tabela 5 fornece um resumo com os parâmetros do modelo Operação Coordenada.

N	Número de sistemas
D^k	Demanda de energia do sistema k
q^k	Número de geradores do sistema k
c^k	Vetor com o custo de cada gerador do sistema k : c_i^k é o custo do gerador i do sistema k
G^k	Vetor com a capacidade máxima de cada gerador do sistema k : G_i^k é a capacidade máxima do gerador i do sistema k
F	Matriz de fluxos máximos, cuja entrada F_{jk} é o fluxo máximo do sistema j para o sistema k
L	Número máximo de iterações da Operação Coordenada

Tabela 5: Parâmetros do modelo Operação Coordenada

Os modelos de otimização definidos nesta seção possuem como variáveis de decisão: os vetores g^k , para cada sistema k , a matriz f , e o vetor λ . As variáveis g^k e f foram detalhadas na seção 3.2, e λ é o vetor em que as entradas λ_k estão descritas na seção 2.2.

Além das variáveis de decisão, existem outras variáveis presentes nos algoritmos. São elas: a matriz f^ℓ , que armazena o valor atribuído à variável de decisão f na iteração ℓ ; o vetor λ^ℓ , similar a f^ℓ , mas referente à variável de decisão λ ; o escalar α , que assume valores entre 0 e 1 e define a proporção do conjunto de valores que a variável f pode assumir que poderá ser usada como variação de f entre duas iterações consecutivas. O conjunto de valores que f_{jk} pode assumir é o intervalo entre $-F_{kj}$ e F_{jk} e, portanto, seu tamanho é $F_{kj} + F_{jk}$. Então, o que α faz é limitar a expressão $\|f^\ell - f^{\ell-1}\|$ ao valor $\alpha(F_{kj} + F_{jk})$.

A tabela 6 fornece um resumo das variáveis do modelo Operação Coordenada, e envolve tanto variáveis de decisão para os problemas de otimização quanto variáveis do algoritmo.

g^k	Vetor de variáveis de decisão com a energia gerada em cada gerador do sistema k : g_i^k é a energia gerada no gerador i
f	Matriz de variáveis de decisão com o fluxo de energia entre cada par de sistemas: f_{jk} é o fluxo de energia do sistema j para o sistema k
λ	Vetor de variáveis em que a entrada λ_k no índice k é a variável dual associada à restrição do balanço de demanda do sistema k , chamada de custo marginal do sistema k
f^ℓ	Matriz com os fluxos definidos na iteração ℓ da Operação Coordenada
λ^ℓ	Vetor com os custos marginais λ_k do sistema k definidos na iteração ℓ
α	Fator que limita a diferença entre f^ℓ e $f^{\ell+1}$, assume valores entre 0 e 1

Tabela 6: Variáveis do modelo Operação Coordenada

4.2 Subproblema Define_Fluxos

Dados k , $\lambda^{\ell-1}$ (aproximação do vetor λ dos preços no início da iteração ℓ), α , $f^{\ell-1}$ (aproximação do vetor dos intercâmbios no início da iteração ℓ), N , F , D^k , q^k , c^k e G^k , o subproblema **Define_Fluxos** é o problema de otimização

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \min_{g^k, f_{1k}, \dots, f_{Nk}} c^{k\top} g^k - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^{\ell-1} + \lambda_k^{\ell-1}}{2} f_{kj} & (a) \\
 0 \leq g_i^k \leq G_i^k, \quad i = 1, \dots, q^k & (b) \\
 \sum_{i=1}^{q_k} g_i^k - \sum_{j=1}^N f_{kj} = D^k & (c) \\
 -F_{jk} \leq f_{kj} \leq F_{kj}, \quad j = 1, \dots, N & (d) \\
 -\alpha(F_{jk} + F_{kj}) \leq f_{kj} - f_{kj}^{\ell-1} \leq \alpha(F_{jk} + F_{kj}), \quad j = 1, \dots, N. & (e)
 \end{array} \right. \quad (3)$$

O subproblema (3) é resolvido a cada iteração ℓ do Algoritmo 1 (algoritmo **Operação_Coordenada**, descrito na seção 4.4) para cada sistema k . Este subproblema define quais são as quantidades ótimas de energia que o sistema k deve comprar ou vender para cada outro sistema. Para isso, ele recebe como entradas: o índice k do sistema a que ele se refere; o vetor de custos marginais $\lambda^{\ell-1}$; o fator α ; a matriz de fluxos $f^{\ell-1}$ (note que bastaria passar somente a linha k da matriz); a quantidade N de sistemas; a matriz de fluxos máximos F (aqui bastariam a coluna

k e a linha k); e os dados internos do sistema k : D^k , q^k , c^k e G^k .

Esse subproblema resolve o problema de otimização (3), em que as variáveis de decisão são o vetor g^k e a linha k da matriz f . A função objetivo (3-a) é o custo do sistema k : o custo total de geração para cada gerador (comentado na seção 2.3) menos a receita e mais o gasto vindos do comércio de energia com outros sistemas. A receita é a soma de cada quantidade vendida f_{kj} , caso f_{kj} for positivo, multiplicada pelo preço pelo qual se vendeu a energia, que no modelo é a média dos custos marginais dos sistemas j e k : $\frac{\lambda_j^{\ell-1} + \lambda_k^{\ell-1}}{2}$. Já o gasto é a soma do oposto de cada quantidade comprada $-f_{kj}$, caso f_{kj} seja negativo, multiplicada pelo preço pelo qual se comprou, que é novamente as médias dos custos marginais dos sistemas em questão. Note que tanto subtrair a receita quanto somar o gasto são contemplados pela parcela à direita na função objetivo.

As restrições (b), (c) e (d) de (3) estão contidas nas restrições (b), (c) e (e) do problema de otimização (2), e portanto explicadas na seção 3.3. A restrição (3-e) limita a variação do fluxo com relação aos valores definidos na iteração anterior. O limite dessa variação é dado pelo fator α (que assume valores entre 0 e 1) multiplicado pelo tamanho do conjunto de valores que f_{jk} pode assumir. Note que, se $\alpha = 1$, essa restrição não interfere no problema, pois, apenas com base na restrição (d), $f_{kj} \leq F_{kj}$ e $f_{kj}^{\ell-1} \geq -F_{jk}$, então $f_{kj} - f_{kj}^{\ell-1} \leq F_{kj} + F_{jk}$, e, de forma análoga, $f_{kj} - f_{kj}^{\ell-1} \geq -(F_{jk} + F_{kj})$.

Uma solução ótima do subproblema (3) fornece intercâmbios de energia f_{kj} entre os subsistemas.

4.3 Subproblema Define_Custos_Marginais

Dados k , f^ℓ (vetor de intercâmbios definido na iteração ℓ), N , D^k , q^k , c^k e G^k , o subproblema Define_Custos_Marginais é o problema de otimização

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{g^k, \lambda_k} c^{k\top} g^k \quad (a) \\ 0 \leq g_i^k \leq G_i^k, \quad i = 1, \dots, q^k \quad (b) \\ \sum_{i=1}^{q_k} g_i^k - \sum_{j=1}^N f_{kj}^\ell = D^k : \lambda_k. \quad (c) \end{array} \right. \quad (4)$$

Dentro de cada iteração ℓ do Algoritmo 1 (algoritmo da Operação Coordenada), são atribuídos valores às variáveis de fluxo. Com esses valores, o subproblema `Define_Custos_Marginais` é resolvido e assim se define o custo marginal de cada sistema.

As entradas do subproblema são: o índice k do sistema; a matriz de fluxos f^ℓ (note que bastaria a linha k da matriz); a quantidade de sistemas N ; e as informações internas do sistema k .

As variáveis de decisão são o vetor g^k e a variável dual λ_k . A função objetivo a ser minimizada é o custo do sistema, que é a soma dos custos de cada gerador menos o lucro obtido com a comercialização de energia (compra e venda), definido com base em f^ℓ . Como f^ℓ não é variável de decisão, a parcela referente aos lucros do comércio é constante, e portanto foi omitida. As restrições (b) e (c) são como as restrições (2-b) e (2-e), explicadas na seção 3.3. Note que à restrição (4-c) foi associada a variável dual λ_k .

Uma solução ótima do problema fornece o custo marginal λ_k^ℓ para o sistema k .

4.4 Algoritmo da Operação Coordenada

Temos enfim o Algoritmo da Operação Coordenada. É o algoritmo que se propõe a minimizar a soma dos custos dos sistemas $k \in 1, \dots, N$, de forma descentralizada, e respeitando as restrições de atendimento à demanda, limites de geração e transmissão.

Inicialmente, atualizam-se os valores de λ^0 com a ajuda do modelo 1: `Sistemas_Isolados`. λ_k^0 assume o valor do custo marginal do sistema k quando não há intercâmbio de energia com outros sistemas, ou seja, quando $f_{kj} = 0, \forall j$.

Após as inicializações, começa o *loop* principal, com iterações ℓ variando de 1 a L . Dentro do *loop*, primeiro α assume o valor de $1/\ell$, o que faz com que sejam permitidas grandes variações em f nas primeiras iterações, mas que ao longo das iterações aproximam de 0. A motivação por trás do fator α é que, nas primeiras versões do modelo, a função objetivo oscilava entre dois extremos ao longo das iterações, o que era provocado por oscilações agudas nos valores de f^ℓ . Por isso, no modelo apresentado, existe esse fator α , para limitar as variações e melhorar a

Algoritmo 1: Operação_Coordenada

```
para  $k = 1, \dots, N$ 
┌ Para o problema (1), seja  $\lambda_k^0$  uma solução ótima para a variável dual
└ associada a restrição de atendimento a demanda  $D^k$ .

para  $\ell = 1, \dots, L$ 
┌  $\alpha \leftarrow 1/\ell$ ;
└
  para  $k = 1, \dots, N$ 
  ┌ Sejam  $f_{k1}^\ell, \dots, f_{kN}^\ell$  intercâmbios ótimos para o subproblema
  └ Define_Fluxos (3) com parâmetros de entrada
    ┌  $(k, \lambda^{\ell-1}, \alpha, f^{\ell-1}, N, F, D^k, q^k, c^k, G^k)$ 
    └  $f^\ell \leftarrow \frac{f^\ell - f^{\ell T}}{2}$ 
      para  $k = 1, \dots, N$ 
      ┌ Seja  $\lambda_k^\ell$  solução dual ótima para o subproblema
      └ Define_Custos_Marginais (4) com parâmetros de entrada  $k,$ 
        ┌  $f^\ell, N, D^k, q^k, c^k, G^k$ .
```

convergência.

O primeiro *loop* interno é a definição dos fluxos ótimos para cada sistema k com a ajuda do subproblema `Define_Fluxos`, e com base nos fluxos definidos na iteração anterior $f^{\ell-1}$.

Após a definição dos fluxos, é preciso fazer uma compatibilização, porque f_{jk}^ℓ precisa ser igual a $-f_{kj}^\ell$. A solução dada é atribuir $f_{jk}^\ell = (f_{jk}^\ell - f_{kj}^\ell)/2$, que na formulação matricial é $f^\ell = \frac{f^\ell - f^{\ell T}}{2}$. A interpretação disso é que os sistemas k e j estão cumprindo a média das intenções de cada um. Por exemplo, suponha que k queira comprar 5 unidades de energia de j ($f_{kj}^\ell = -5$), mas j queira na verdade vender apenas 3 unidades de energia para k ($f_{jk}^\ell = 3$). Então, o resultado final é que j vende 4 unidades de energia para k .

Por fim, ainda dentro do *loop* principal, para cada sistema k é atualizado seu custo marginal λ_k^ℓ , com base nos novos fluxos f^ℓ . Também são atualizados os valores dos vetores g^k .

De forma geral, o que o algoritmo faz é iterativamente definir o fluxo de energia entre os sistemas, com base nos custos marginais, e em seguida corrigir os custos marginais com base nos novos fluxos.

5 Experimentos numéricos

Para realizar experimentos numéricos com o modelo da Operação Coordenada, todos os algoritmos descritos neste documento, e também um algoritmo referente à Operação Integrada, foram implementados usando JuMP [7], uma linguagem de domínio específico para modelagem de otimização matemática, incorporada na linguagem de programação Julia [6]. O *solver* de programação linear utilizado para otimizar os modelos descritos foi o GLPK [5].

O experimento numérico apresentado foi feito com dados fictícios de três sistemas, em que o *Sistema 1* possui 7 geradores, o *Sistema 2* possui 3 geradores e o *Sistema 3* possui 2 geradores. O número L de iterações escolhido foi 50, e os gráficos apresentados nesta seção mostrarão resultados a partir da iteração 0, antes de entrar no *loop*.

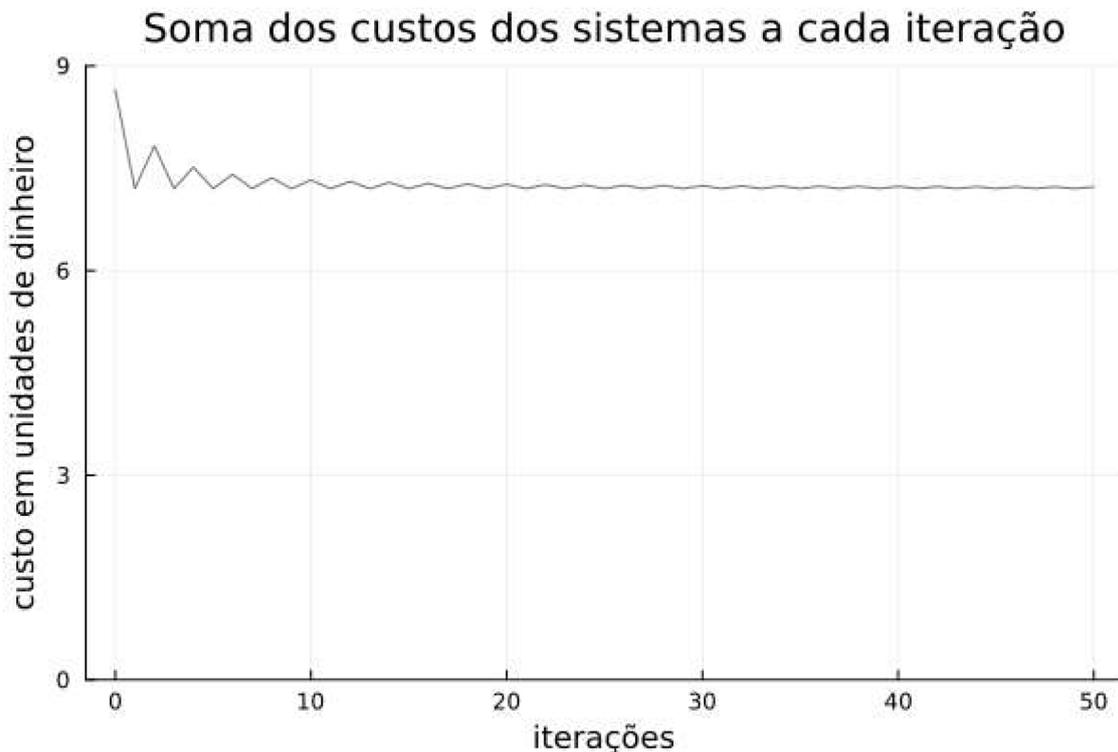


Figura 1: Gráfico com a soma dos custos dos sistemas a cada iteração.

O gráfico contido na Figura 1 mostra a soma dos custos dos sistemas a cada iteração. É possível observar que a soma das funções objetivo convergiu com certa estabilidade.

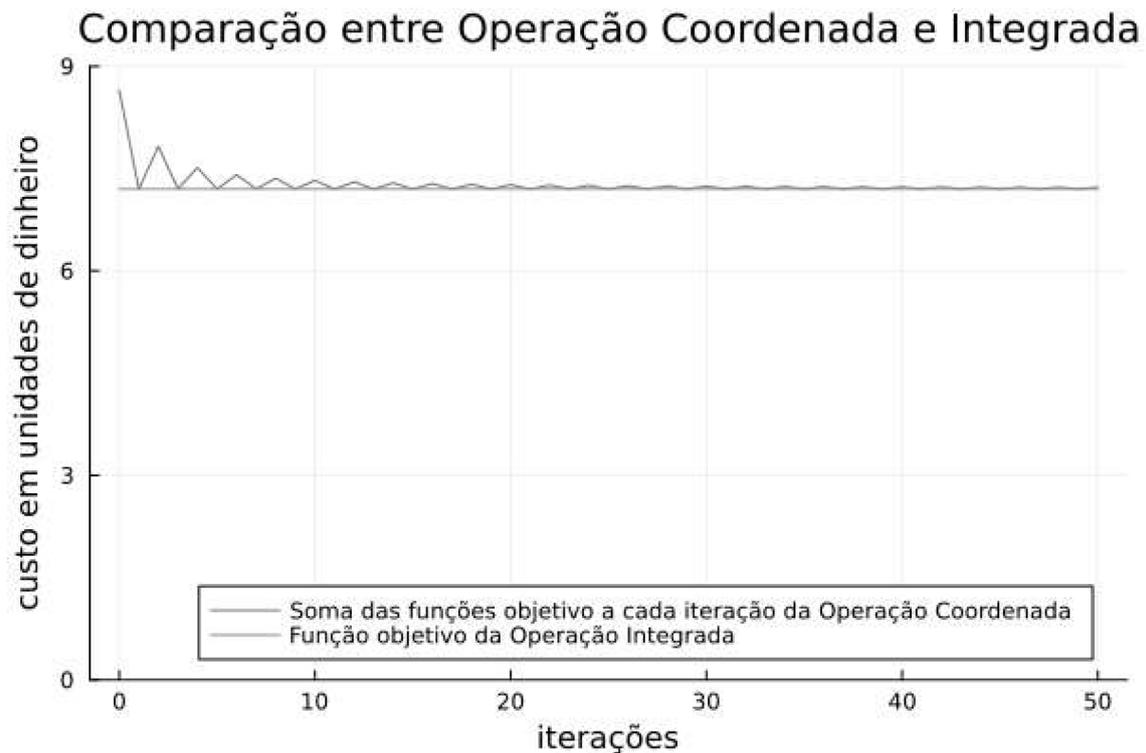


Figura 2: Gráfico com a comparação dos objetivos das Operações Coordenada e Integrada

Na Figura 2, é mostrada, além da curva descrita na Figura 1, a função objetivo atingida pela Operação Integrada. O gráfico mostra que a soma das funções objetivo da Operação Coordenada convergiu para o valor da função objetivo da Operação Integrada.

O gráfico na Figura 3 mostra a evolução das funções objetivo de cada sistema ao longo das iterações. É possível ver que as funções objetivo oscilam bastante, apesar de a soma entre elas ser estável.

A Figura 4 mostra, para cada sistema, o custo térmico ao longo das iterações. O custo térmico é a soma dos custos de geração, e difere da função objetivo por não incluir o resultado da compra ou venda de energia para outros sistemas. No gráfico, v -se que, ao contrário das funções objetivo, os custos térmicos atingiram uma estabilidade, tendo uma leve oscilação nas últimas iterações.

A Figura 5 mostra a evolução do custo marginal de cada sistema ao longo das iterações. O custo marginal se manteve estável para o *Sistema 1* e o *Sistema 3*, mas oscilou bastante para o *Sistema 2*. Algo relevante de se apontar   que o custo marginal no modelo naturalmente assume o valor do custo, por unidades de

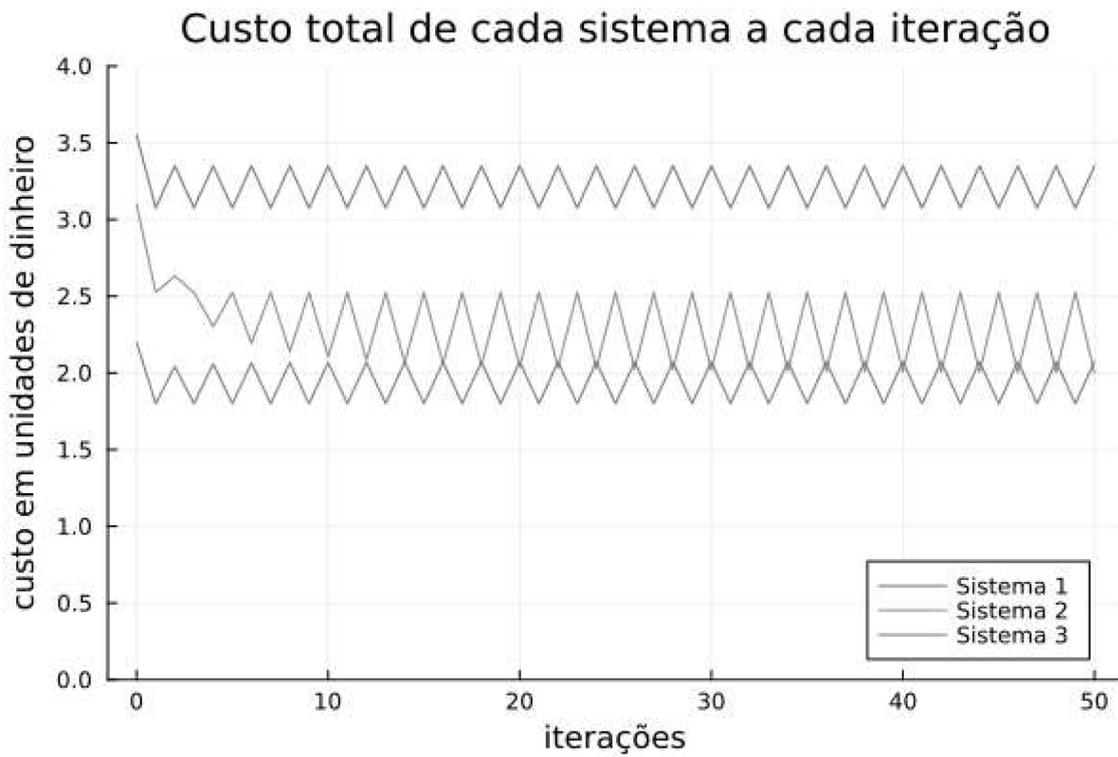


Figura 3: Função objetivo de cada sistema ao longo das iterações da Operação Coordenada

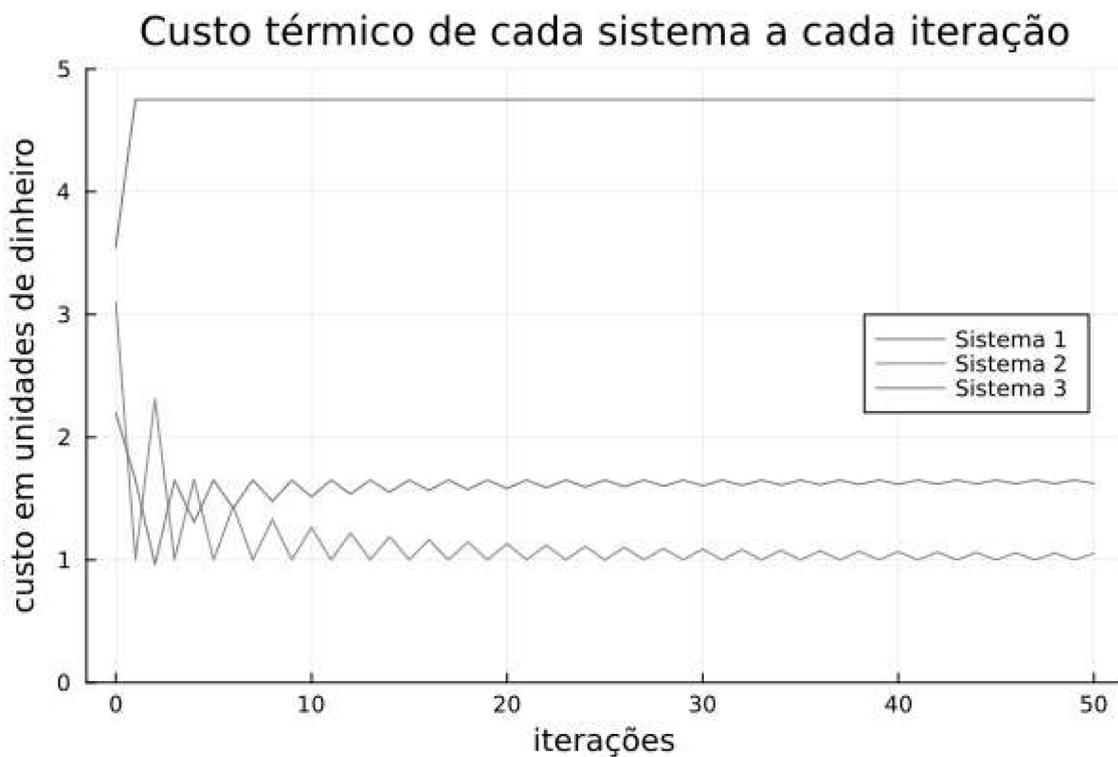


Figura 4: Custo térmico de cada sistema ao longo das iterações da Operação Coordenada

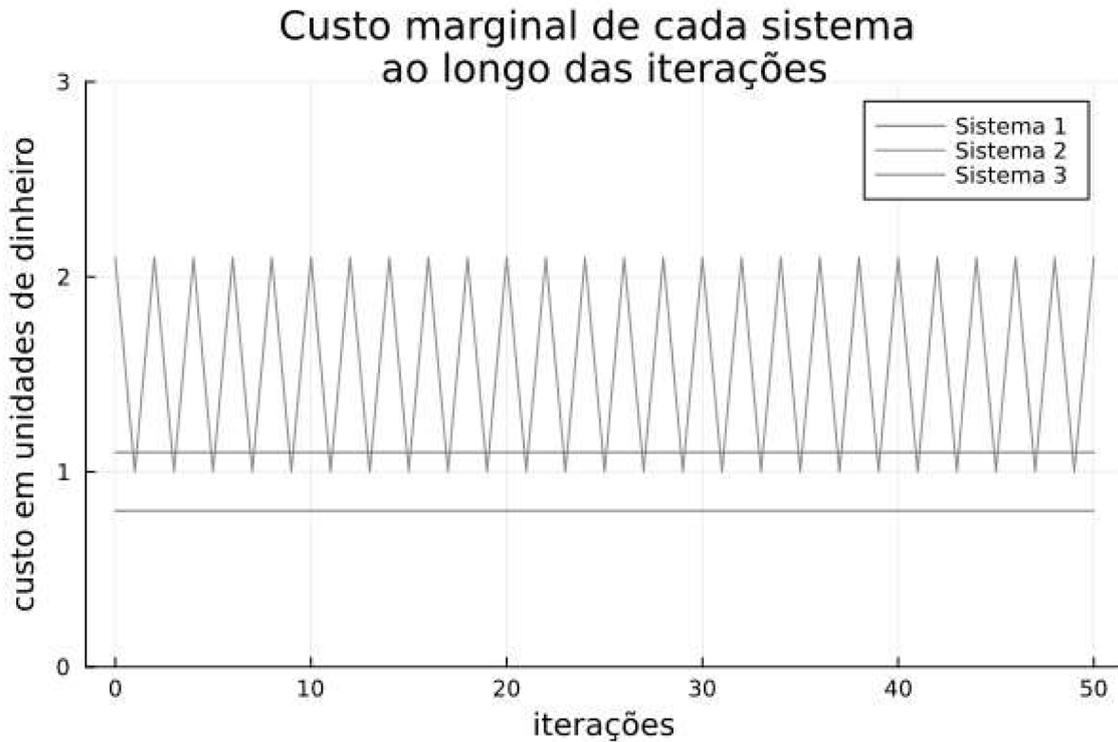


Figura 5: Custo marginal de cada sistema ao longo das iterações da Operação Coordenada

energia, do gerador mais caro que estiver ativo na solução ($\max\{c_i^k \mid g_i^{k*} > 0\}$). Nos dados fictícios do experimento numérico, o *Sistema 2* possui geradores com custos de 1.0 e de 2.1 unidades de dinheiro por unidades de energia. Isso ajuda a explicar as oscilações no custo marginal do *Sistema 2*.

O gráfico na Figura 6 mostra a evolução do preço da energia entre cada par de sistemas ao longo das iterações. Como era de se esperar, o único preço que manteve estabilidade foi o praticado entre o *Sistema 1* e o *Sistema 3*, pois esses foram os sistemas que tiveram seus custos marginais estáveis.

6 Conclusão

Foi apresentado um algoritmo para definir o intercâmbio de energia entre sistemas elétricos independentes de forma descentralizada com o objetivo de minimizar o custo total de geração de energia para suprir a demanda de todos os sistemas. No modelo apresentado, as informações compartilhadas entre um par de sistemas interligados é o custo marginal de cada um e a capacidade das linhas de transmissão

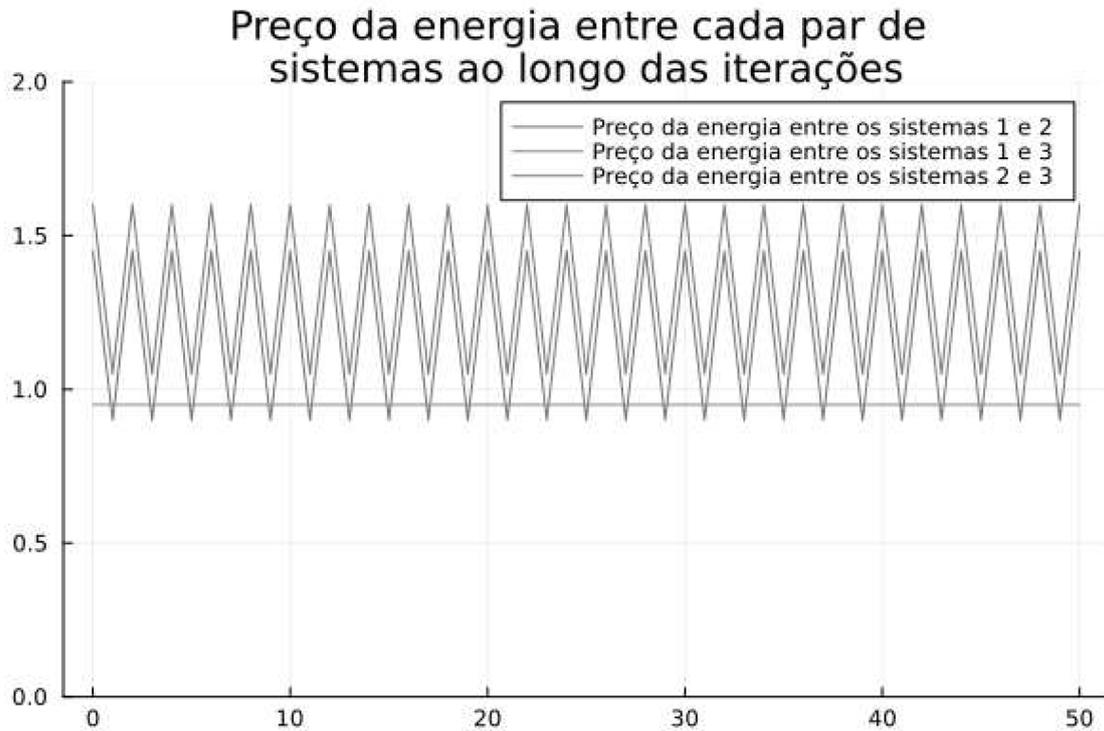


Figura 6: Preço da energia entre cada par de sistemas ao longo das iterações da Operação Coordenada

entre eles.

O modelo da Operação Coordenada atendeu aos requisitos de garantir uma operação descentralizada, com pouco compartilhamento de informações entre sistemas. Com o experimento numérico realizado, foi possível constatar que o modelo proposto conseguiu minimizar o gasto total de geração de energia.

Referências

- [1] J. A. Aguado and V. H. Quintana. Inter-Utilities Power-Exchange Coordination: A Market-Oriented Approach. *IEEE Power Engineering Review*, 21(7):67–67, 2001.
- [2] Vincent D. Blondel, Julien M. Hendrickx, Alex Olshevsky, and John N. Tsitsiklis. Convergence in Multiagent Coordination, Consensus, and Flocking. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2996–3000, 2005.

- [3] B.H. Chowdhury and S. Rahman. A review of recent advances in economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(4):1248–1259, 1990.
- [4] J.A. Fax and R.M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1465–1476, 2004.
- [5] GLPK. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/glpk/>. Acesso em: 03 dez. 2022.
- [6] Julia. Disponível em: <https://docs.julialang.org/en/v1/>. Acesso em: 03 dez. 2022.
- [7] JuMP. Disponível em: <https://jump.dev/JuMP.jl/stable/>. Acesso em: 03 dez. 2022.
- [8] Daniel C Matisoff, Ross Beppler, Gabriel Chan, and Sanya Carley. A review of barriers in implementing dynamic electricity pricing to achieve cost-causality. *Environmental Research Letters*, 15(9):093006, 2020.
- [9] R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1520–1533, 2004.
- [10] Fred C Schweppe, Michael C Caramanis, Richard D Tabors, and Roger E Bohn. Spot Pricing of Electricity. pages 131–149, 1988.
- [11] Håkan Terelius, Ufuk Topcu, and Richard M. Murray. Decentralized Multi-Agent Optimization via Dual Decomposition. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):11245–11251, 2011.