



Eduardo Thomaz Faria

**Aplicação de Teoria dos Jogos à Repartição da Energia Firme de  
um Sistema Hidrelétrico**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Professores Orientadores:

Álvaro Veiga Filho, Docteur  
Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.

Rio de Janeiro  
Maio de 2004



Eduardo Thomaz Faria

## **Aplicação de Teoria dos Jogos à Repartição da Energia Firme de um Sistema Hidrelétrico**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

---

**Prof. Álvaro Veiga Filho**  
Professor Orientador  
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

---

**Dr. Mario Veiga Ferraz Pereira**  
PSR Consultoria

---

**Dr. Sergio Granville**  
PSR Consultoria

---

**Dr. João Lizardo Rodrigues Hermes de Araújo**  
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

---

**Dr. Jerson Kelman**  
Agência Nacional de Águas – (ANA)

Rio de Janeiro, xx de xxxx de xxxx

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Eduardo Thomaz Faria**

Graduou-se em Engenharia Elétrica na PUC-RJ em 2001 na área de Sistemas de Apoio à Decisão. Estagiou na empresa Mercados de Energia, onde participou ativamente de estudos relacionados à avaliação financeira de projetos; comercialização de energia; gerenciamento de risco e otimização físico/financeira para o setor elétrico e estudos de planejamento energético.

**Ficha Catalográfica**

Faria, Eduardo Thomaz

Aplicação de Teoria dos Jogos à Repartição da Energia Firme de um Sistema Hidrelétrico / Eduardo Thomaz Faria; orientadores: Álvaro Veiga Filho, Mario Veiga Ferraz Pereira – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Elétrica, 2004.

v. 164 f. il.; 29.7 cm

1. Tese (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Alocação de Custos/Benefícios. 3. Teoria de Jogos Cooperativos. 4. Otimização Linear 5. Teoria Marginalista I. Veiga Fº, Álvaro. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

A meus pais, Sérgio Nilo e Vera Lúcia,  
e a meus irmãos, Francisco e Fernando

## **Agradecimentos**

A meus pais, pela educação, carinho e apoio, sem os quais este trabalho não poderia ter sido concluído.

A meus irmãos e família, pelos incentivos demonstrados durante todos os momentos.

Ao amigo Mário Veiga Ferraz Pereira, pela oportunidade de realização deste trabalho e pela orientação indispensável em todas as etapas do desenvolvimento.

Ao amigo Luiz Augusto Barroso, pela excelente orientação e imprescindível disposição em ajudar sempre que foi necessário.

Aos amigos Sérgio Granville e Rafael Kelman, por toda excelente orientação.

Aos amigos Jorge Trinkenreich, Frank Ávila e Priscila Lino, pelos ensinamentos e apoio.

À Cristiane Faria Coelho, pelo carinho e estímulo em todos os momentos.

Ao meu orientador Álvaro Veiga, pelo estímulo e apoio.

Ao CNPq e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos

A todos os amigos da PSR/Mercados de Energia.

## **Resumo**

Faria, Eduardo Thomaz. **Aplicação de Teoria dos Jogos à Repartição da Energia Firme de Um Sistema Hidrelétrico.** Rio de Janeiro, 2004, 164 p. Tese de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desta monografia é investigar a aplicação de distintas metodologias de alocação de energia firme de usinas hidrelétricas através da teoria dos jogos de coalizão. Mostra-se que não existe uma maneira “ótima”, única, de se fazer esta repartição, mas existem critérios para verificar se uma metodologia de repartição específica apresenta algum aspecto inadequado. Um desses critérios é a “justiça”. Mostra-se que este critério equivale a pertencer ao chamado “núcleo” de um jogo cooperativo. O cálculo da energia firme será formulado como um problema de otimização linear e serão investigadas vantagens e desvantagens de distintos métodos de alocação (a benefícios marginais, geração média no período crítico, última adição e “nucleolus”). Em seguida será desenvolvida uma aplicação do esquema Aumann-Shapley (AS) à repartição da energia firme de usinas hidrelétricas. Demonstra-se que além de robusto em relação aos tamanhos dos recursos e eficiente computacionalmente, este método fornece para o problema do firme uma alocação pertencente ao núcleo e, portanto, atende à condição de “justiça”. A aplicação do esquema AS será apresentada para o Sistema Brasileiro e serão comparados os resultados obtidos por este método com outros esquemas de alocação adotados no Sistema Hidrelétrico Brasileiro.

## **Palavras-chave**

Engenharia Elétrica, Energia Firme, Alocação de Custos, Alocação de Benefícios, Teoria dos Jogos Cooperativos, Otimização Linear, Teoria Marginalista.

## **Abstract**

Faria, Eduardo Thomaz. **Allocation of Firm Energy Rights Among hydro plants: a game theoretic approach.** Rio de Janeiro, 2004, 164 p. Master Thesis – Electrical Engineering Department, Catholic University of Rio de Janeiro.

The objective of this work is to investigate the application of different methodologies of allocation of firm energy rights among hydro plants using a game-theoretic framework. It is shown that there is not an optimal and unique approach to make this allocation but there are criteria to verify if a given approach presents any inadequate aspect. One of these criteria is the “justice”, or “fairness”. It is shown that this criterion is equivalent to the condition of the core of a cooperative game. The calculation of the firm energy will be formulated as a linear program and advantages/disadvantages of different allocation methods (marginal allocation, average production on the dry period, incremental allocation and “nucleolus”) will be investigated. Next, an application of the Aumann-Shapley (AS) scheme to the problem of allocation of firm energy rights will be developed. It is shown that, besides being robust and computationally efficient, this scheme provides an allocation that belongs to the core of the game and therefore meets the condition of “justice”. The AS scheme will be applied to the Brazilian system (composed of about 100 hydro plants) and the results obtained will be compared with the allocation schemes currently adopted in the Brazilian system.

## **Keywords**

Electrical Engineering, Firm Energy, Cost Allocation, Benefit Allocation, Cooperative game theory, Linear Optimization, Marginal Theory.

## **Sumário**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO</b>   | <b>11</b> |
| 1.1. Energia firme de uma usina hidrelétrica                      | 11        |
| 1.2. Energia firme de múltiplas usinas                            | 12        |
| 1.3. Sinergia da operação integrada de usinas hidrelétricas       | 13        |
| 1.4. O problema da repartição de benefícios                       | 14        |
| 1.5. Objetivos  | 16        |
| 1.6. Organização e principais resultados                          | 16        |
| <br>  |           |
| <b>2 ENERGIA FIRME DE SISTEMAS HIDRELÉTRICOS</b>                  | <b>20</b> |
| 2.1. Formulação como um problema de otimização – uma única usina  | 20        |
| 2.2. Formulação como um problema de otimização – múltiplas usinas | 24        |
| 2.3. Aplicações do modelo para cálculo de energia firme.          | 27        |
| 2.4. Período Crítico  | 32        |
| <br>  |           |
| <b>3 O PROBLEMA DA REPARTIÇÃO DOS BENEFÍCIOS</b>                  | <b>37</b> |
| 3.1. Teoria de Jogos Cooperativos                                 | 37        |
| 3.2. Condição para um jogo cooperativo                            | 47        |
| <br>  |           |
| <b>4 ALOCAÇÃO PELA GERAÇÃO MÉDIA NO PERÍODO CRÍTICO (GMPC)</b>    | <b>57</b> |
| 4.1. Descrição do Método  | 57        |
| 4.2. Vantagens e Desvantagens do Método GMPC                      | 59        |
| <br>  |           |
| <b>5 ALOCAÇÃO A BENEFÍCIOS MARGINAIS (BM)</b>                     | <b>61</b> |
| 5.1. Descrição do Método  | 61        |
| 5.2. Alocação no Núcleo   | 62        |
| 5.3. Núcleo do Jogo Não Vazio                                     | 66        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.4. Vantagens e Desvantagens do Método                                  | 66         |
| <b>6 ALOCAÇÃO POR ÚLTIMA ADIÇÃO (UA)</b>                                 | <b>68</b>  |
| 6.1. Descrição do Método   | 68         |
| 6.2. Vantagens e Desvantagens do Método                                  | 69         |
| <b>7 ALOCAÇÃO PELO MÉTODO DO “NUCLEOLUS”</b>                             | <b>74</b>  |
| 7.1. Definição do “Nucleolus”  | 74         |
| 7.2. Descrição do Método do “Nucleolus”                                  | 75         |
| 7.3. Definição do “Nucleolus” Proporcional                               | 77         |
| 7.4. Vantagens e desvantagens do método                                  | 79         |
| <b>8 ALOCAÇÃO PELO MÉTODO AUMANN-SHAPLEY (AS)</b>                        | <b>80</b>  |
| 8.1. Método por Benefício Incremental                                    | 81         |
| 8.2. Método de Shapley   | 81         |
| 8.3. Método Aumann-Shapley (AS)  | 83         |
| 8.4. Alocação no Núcleo  | 87         |
| 8.5. Vantagens e Desvantagens do Método AS                               | 89         |
| <b>9 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ALOCAÇÃO</b>                 | <b>91</b>  |
| 9.1. Resultados da aplicação a três sistemas-exemplo fictícios           | 91         |
| 9.2. Resultados: Sistema Interligado Brasileiro                          | 98         |
| 9.3. Alocação da Energia Firme do Sistema Interligado Brasileiro         | 99         |
| 9.4. Resultados por cascata  | 105        |
| 9.5. Análise dos resultados: síntese geral                               | 114        |
| <b>10 CONCLUSÕES</b>   | <b>116</b> |
| <b>11 REFERÊNCIAS</b>  | <b>119</b> |
| <b>12 ANEXO A – MÉTODO DO DIAGRAMA DE MASSAS (ou DIAGRAMA DE RIPPL).</b> | <b>124</b> |

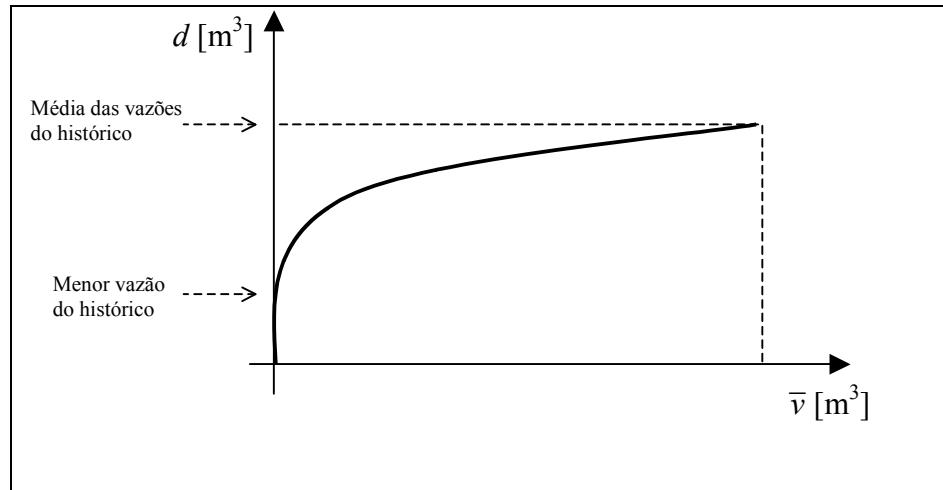
|  |            |
|--|------------|
| 12.1. Algoritmo recursivo  | 127        |
| <b>13 ANEXO B – ENERGIA ASSEGURADA E O SISTEMA BRASILEIRO</b>  | <b>128</b> |
| 13.1. Certificados de Energia Assegurada (CEA)   | 128        |
| 13.2. Importância comercial dos CEAs   | 129        |
| 13.3. Cálculo dos CEAs – Sistema 100% hidroelétrico  | 129        |
| 13.4. Cálculo dos CEAs – sistema hidrotérmico  | 133        |
| 13.5. Outros Temas para Discussão na metodologia atual   | 136        |
| <b>14 ANEXO C –O MECANISMO DE REALOCAÇÃO DE ENERGIA</b>  | <b>140</b> |
| 14.1. MRE: Motivação   | 140        |
| 14.2. O Mecanismo de Realocação de Energia   | 142        |
| 14.3. Exemplo de Aplicação do MRE  | 143        |
| 14.4. Vantagens e Limitações do MRE  | 148        |
| <b>15 ANEXO D – MÉTODO AUMANN-SHAPLEY: SEÇÕES AUXILIARES</b>   | <b>150</b> |
| 15.1. Efeito da ordem de entrada na alocação por benefício incremental                               | 150        |
| 15.2. Efeito do tamanho dos agentes no método de Shapley   | 152        |
| 15.3. Desenvolvimento do método AS a partir do método de Shapley: uma interpretação intuitiva.       | 154        |
| <b>16 Anexo E – Certificados de energia assegurada das usinas do Sistema Interligado Brasileiro.</b> | <b>159</b> |

**1****INTRODUÇÃO****1.1.****Energia firme de uma usina hidrelétrica**

O conceito de suprimento firme surgiu no final do século XIX, quando se estudava o dimensionamento de reservatórios para o abastecimento de água das cidades. O objetivo era determinar a capacidade de armazenamento que asseguraria uma determinada vazão “firme”, mesmo na ocorrência da seqüência mais seca registrada no histórico.

Rippl [37] propôs um diagrama, descrito no anexo A, para determinar graficamente a mínima capacidade de armazenamento  $\bar{v}$  que um reservatório deveria ter para garantir o atendimento a uma demanda  $d$  constante (“firme”), caso o histórico de vazões naturais afluentes voltasse a ocorrer. Esta mesma capacidade de armazenamento pode ser calculada através de uma recursão inversa no tempo, também descrita no anexo A.

Aplicando o método de Rippl sucessivas vezes para diferentes demandas pode-se construir um gráfico (Figura 1.1) que responde à pergunta inversa: qual a demanda firme  $d$  que pode ser atendida por uma determinada capacidade de armazenamento  $\bar{v}$ ? Observa-se na Figura que a demanda firme capaz de ser atendida por um reservatório de tamanho “infinito” é a média dos volumes afluentes do histórico. No outro extremo (reservatório de tamanho zero) esta demanda firme seria igual ao menor volume afluente do histórico.



**Firgura 1.1 - Gráfico de sucessivas aplicações do método de Rippl**

O conceito de suprimento firme e o método da Figura 1.1 foram posteriormente levados para o setor elétrico e aplicados ao dimensionamento econômico de usinas hidrelétricas. Essencialmente, para cada alternativa de capacidade do reservatório da usina, era calculada a Energia Firme resultante, isto é, a maior demanda de energia que ela poderia atender, sem que houvesse déficit, quando se simulava sua operação para todas as vazões registradas no histórico. A razão entre o custo de construção de cada alternativa e a respectiva energia firme era usada como índice custo/benefício, o que permitia a comparação econômica de alternativas.

## 1.2.

### Energia firme de múltiplas usinas

Após a determinação de um critério para calcular a energia firme, ou somente o “firme”, de uma usina hidrelétrica, o próximo passo seria calcular a energia firme de um sistema composto por múltiplas usinas. O conceito de energia firme neste caso é o mesmo, ou seja, é a máxima demanda que o sistema consegue atender, sem que haja déficit, quando se simula sua operação para todo o histórico de vazões. Porém, um fator importante para esse resultado está na forma com que estas usinas operam seus reservatórios. Esta será a discussão da próxima seção.

### 1.3.

#### **Sinergia da operação integrada de usinas hidrelétricas**

A operação integrada de um conjunto de usinas hidrelétricas o possibilita aproveitar a existência da diversidade hidrológica usualmente observada entre elas, e regular suas vazões afluentes, importante tarefa realizada pelos reservatórios. Estas possibilidades fazem com que, através de uma operação conjunta, as usinas consigam atender a uma demanda “firme” maior que a soma das demandas que cada uma conseguiria atender se operasse “individualmente”.

A diversidade hidrológica possibilita que as usinas situadas em bacias que estão experimentando condições hidrológicas mais favoráveis “ajudem” aquelas que atravessam períodos de estiagem (e vice-versa quando os períodos hidrológicos se invertem). Com isso, a operação integrada das usinas traz benefícios para o sistema como um todo. Já se cada usina operasse “individualmente”, estes benefícios não seriam obtidos. Em outras palavras, a energia firme total resultante da operação integrada das usinas é maior que a soma das energias firmes “individuais” de cada uma, mesmo que estas estejam localizadas em diferentes rios.

Outra forma de benefício observada na operação integrada das usinas é a ação dos reservatórios, que além de regularizar as vazões naturais afluentes da própria usina (armazenando água em períodos úmidos para usar em períodos mais secos), ajudam na regularização das vazões das usinas a jusante. Uma usina a fio d’água (sem reservatório), por exemplo, tem sua produção de energia totalmente dependente das suas vazões naturais, que são sazonais e voláteis. A maior demanda “firme” que ela consegue atender tende a ser baixa, dado que não é possível armazenar e transferir água dos períodos úmidos para os períodos secos. Entretanto, esta usina é beneficiada quando há um reservatório a montante, pois sua função de regularizar as vazões a beneficia diretamente, fazendo com que ela consiga atender a uma demanda constante superior à que conseguiria se dependesse somente de suas vazões naturais. Analogamente ao caso anterior, este ganho não seria observado quando as usinas de uma mesma cascata operam “individualmente”, e neste caso os benefícios da regularização a jusante são perdidos.

Resumidamente, existe um *ganho “sinérgico”* de energia firme, que resulta da ação *cooperativa* de todos os agentes do sistema. A importância desta sinergia é ilustrada , por exemplo, em [71], onde mostra-se que há uma diferença de quase 8000 MW médios entre a soma das energias firmes “individuais” e a energia firme integrada do sistema hidrelétrico brasileiro<sup>1</sup>.

#### 1.4.

#### O problema da repartição de benefícios

##### 1.4.1.

##### Importância econômica da repartição da energia firme

A existência de benefícios “sistêmicos” na capacidade de produção firme leva imediatamente à questão de como reparti-los entre os agentes proprietários das usinas. Esta repartição de benefícios tem grande importância comercial, pois em muitos sistemas com base hidrelétrica, tais como o Panamá[17], costa oeste dos Estados Unidos (Bonneville Power Administration)[10][11], Chile e Argentina[46], e Nova Zelândia[32][33], a energia firme é usada como limite máximo para os contratos de suprimento assinados pelas usina hidrelétricas.

---

<sup>1</sup> Estudo realizado com dados da época, vide referência citada.

### ***Energia firme e energia assegurada***

No caso do Brasil, uma versão probabilística da energia firme, a chamada energia assegurada, é usada tanto como limite para contratos, como no chamado Mecanismo de Realocação de Energia (MRE), que aloca os benefícios da operação integrada entre as usinas e define o fluxo de receitas da usina no mercado de energia. Por estas razões a Energia Assegurada é um parâmetro de grande impacto comercial. O Anexo B discute o cálculo da energia assegurada no Brasil (e temas afins) e o Anexo C apresenta uma breve descrição do funcionamento do MRE.

Nesta monografia, todas as análises e discussões estarão concentradas na energia firme, e não na energia assegurada, pelas seguintes razões: (i) o critério da repartição da energia assegurada total entre as usinas hidrelétricas foi feita com base na energia firme<sup>2</sup>; (ii) a energia firme ainda é usada em muitos países como critério de confiabilidade de suprimento; (iii) a maior parte dos resultados e metodologias desenvolvidos pode ser estendida à repartição da energia assegurada; (iii) a Agência Nacional de Águas (ANA), órgão responsável pela implantação da Política Nacional de Recursos Hídricos, apresentou relatório técnico[1] sugerindo a adoção da energia firme como critério suplementar à energia assegurada para a confiabilidade do sistema.

#### **1.4.2.**

#### **Teoria dos jogos**

A repartição da energia firme é um exemplo do problema geral de repartição de custos e benefícios entre agentes que cooperaram para a construção de um recurso *compartilhado*, por exemplo, uma rede de estradas ou um sistema de transmissão. Como o desenvolvimento de um recurso para uso compartilhado é mais barato e/ou eficiente que o desenvolvimento de vários recursos para uso “exclusivo” de cada agente, surge o problema de como alocar os “bônus” entre os participantes.

---

<sup>2</sup> A repartição da energias firme total entre as usinas foi feita a partir da geração média de cada uma durante o período crítico (método de alocação apresentado no capítulo 4 desta monografia). Conforme explicado em [80], esta mesma ponderação foi usada para repartir a energia assegurada total.

Este tipo de problema é estudado na teoria de jogos de coalizão, também conhecida pelo nome de teoria de jogos cooperativos [20][25][44], que será utilizada como base para os desenvolvimentos deste trabalho. Em particular, serão analisadas as alocações baseadas em núcleo de jogos cooperativos [28][44], e a alocação de Aumann-Shapley [5][44].

## 1.5.

### Objetivos

Este trabalho tem três objetivos principais: (i) analisar o problema de repartição dos benefícios da energia firme; (ii): propor uma metodologia de repartição que seja viável do ponto de vista de esforço computacional, que forneça alocações justas, robustas quanto ao tamanho dos recursos aportados por cada agente, e que seja eficiente economicamente; (iii) ilustrar a aplicação desta metodologia ao caso brasileiro, em comparação ao esquema de repartição atualmente adotado.

## 1.6.

### Organização e principais resultados

O capítulo 2 formula o cálculo da energia firme de uma usina e de um conjunto de usinas hidrelétricas como um problema de programação linear. A partir das variáveis duais associadas à solução ótima deste problema, são feitas interpretações de conceitos associados ao cálculo do firme, tais como o período crítico.

O capítulo 3 discute os principais critérios para repartição de benefícios: (i) “justiça”; e (ii) eficiência econômica. O primeiro critério – justiça - é formulado a partir do seguinte conceito: uma alocação é justa se cada participante individual, ou qualquer subconjunto de participantes, é mais beneficiado por fazer parte da “cooperativa” do que se estiver fora dela. Mostra-se que este critério equivale a pertencer ao chamado “núcleo” de um jogo cooperativo. O segundo critério está associado à sinalização econômica para novos investimentos, isto é, se uma usina considerada econômica sob o ponto de vista de um planejamento centralizado seria valorizada corretamente na alocação de benefícios.

O capítulo 4 investiga o primeiro candidato para a alocação, que é a geração média no período crítico (GMPC). Este método é adotado em diversos países, e em particular foi a base do cálculo das energias firmes das usinas no sistema brasileiro. Mostra-se inicialmente que o GMPC pode ser interpretado como uma alocação baseada na remuneração no mercado “spot” da usina (energia produzida em cada estágio multiplicada pelo preço “spot”). A razão é que o preço “spot” fora do período crítico seria zero, e durante o período crítico seria constante e igual ao custo de racionamento. Em seguida, é mostrado que este método não é eficiente economicamente, pois não credita corretamente a contribuição dos reservatórios à energia firme. Inicialmente isto é mostrado para um caso extremo (um reservatório “puro”, sem capacidade de geração, teria energia firme nula mesmo que contribua significativamente para o aumento da produção firme nas usinas a jusante). Em seguida, mostra-se que esta distorção é geral, isto é, há uma transferência sistemática de energia firme das usinas a montante para as usinas a jusante, mesmo que todas as usinas tenham capacidade de geração.

Em vista das limitações do método GMPC, o capítulo 5 analisa o segundo candidato, a alocação a benefícios marginais (BM). Nesta alocação, o benefício de cada participante é proporcional ao incremento marginal na energia firme resultante de um aumento marginal nos recursos aportados pelo participante (capacidade de armazenamento do reservatório, capacidade de turbinamento e vazão natural). Constatata-se inicialmente que a alocação BM é eficiente economicamente, pois leva em conta tanto a contribuição do reservatório quanto a da capacidade de turbinamento de cada usina. Além disso, demonstra-se que a alocação pertence ao núcleo do jogo. Entretanto, mostra-se que a alocação necessita atribuir explicitamente a quem pertence o recurso “água”, o que não é trivial quando existem usinas localizadas na mesma cascata e que por definição compartilham este recurso. Finalmente, mostra-se que a alocação BM não é *robusta*, isto é, uma pequena variação na quantidade dos recursos aportados por cada agente (por ex. capacidade de armazenamento ou limite de turbinamento) pode levar a uma grande variação na energia firme alocada à usina, e num caso de um aporte de “excesso” dos recursos a sua alocação pode ser até reduzida.

O terceiro método, examinado no capítulo 6, se chama Última Adição (UA). Este método procura aliviar a fragilidade da alocação marginalista realizando uma alocação

*incremental*, isto é, o firme de uma usina é proporcional à diferença entre o firme do sistema (com todas as usinas) e o firme resultante da retirada desta usina<sup>3</sup>. Assim como a alocação marginalista, o método UA é eficiente economicamente, pois também considera o benefício dos reservatórios. Entretanto, mostra-se que este método pode não ser “justo”, isto é, a alocação UA pode não pertencer ao núcleo do jogo.

O quarto método, abordado no capítulo 7, é o método do “nucleolus”. Este método, diferente da alocação UA, garante que a alocação pertença ao núcleo. Dado que mais de uma alocação pode estar no núcleo, deve-se distinguir dentre elas qual a mais adequada. O método do “nucleolus” faz isso maximizando a menor “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer ao “consórcio”. A principal dificuldade do método do “nucleolus” é o caráter combinatório das restrições, que crescem com  $2^N$ , onde N é o número de agentes.

O quinto e último método, analisado no capítulo 8, é o Método de Aumann-Shapley (AS). Este método é derivado do método de Shapley, que parte da idéia de atribuir a cada usina a diferença entre a energia firme do sistema quando a usina entra, e a energia firme total anterior à sua entrada. Sabe-se que a alocação feita dessa forma é influenciada pela ordem de entrada das usinas, já que o incremento de energia firme de uma usina é diferente quando ela “entra” em diferentes posições. O método de Shapley resolve este problema alocando a cada agente a média das alocações incrementais para todas as permutações possíveis na ordem de entrada. Este método pode ser considerado uma generalização do método por última adição, pois nele o incremento de energia firme é calculado com a usina entrando não somente na última posição, mas sim em todas as posições possíveis. Esse método também é intuitivamente “justo”, já que todas as usinas têm chances iguais de entrar em todas as posições. Porém mostra-se que a alocação Shapley não é “isonômica” com relação ao tamanho de agentes, isto é, agentes maiores são menos sensíveis à ordem de entrada que agentes menores, e por isso são beneficiados. Outro problema do método de Shapley é o número permutações calculadas que cresce muito com o aumento do número de agentes, fazendo com que seu cálculo seja

---

<sup>3</sup> Em outras palavras, é como se a usina fosse a última a entrar no sistema. Por esta razão, o método de alocação incremental é conhecido como “última adição”.

computacionalmente inviável. Estes dois problemas são resolvidos no método AS. A solução é dividir cada agente em pedaços infinitesimais e permitir que estas pequenas partes entrem separadas nas diversas permutações. À primeira vista, as dificuldades computacionais deste método são ainda maiores que as da alocação de Shapley, pois o número de agentes e, portanto, de permutações, seria infinito. Entretanto, como será mostrado, o esquema AS permite uma solução analítica para o problema. Demonstra-se que além de robusto em relação aos tamanhos dos recursos e eficiente computacionalmente, este método fornece para o problema da energia firme uma alocação no núcleo e, portanto, “justa”.

No capítulo 9 são analisados os resultados da aplicação a um sistema-exemplo composto por quatro usinas em cascata de cinco métodos de alocação estudados: alocação pela geração média no período crítico; alocação marginalista; “nucleolus”; alocação por última adição; e alocação Aumann-Shapley. Este capítulo também apresenta a aplicação no sistema hidrelétrico brasileiro de três destes métodos, excluindo apenas o método do “nucleolus” e BM. Foram utilizados dados das usinas hidrelétricas existentes no PMO<sup>4</sup> (Programa Mensal de Operação) de Janeiro de 2004 do ONS (Operador Nacional do Sistema), de onde também foi obtido o histórico de vazões incrementais (do ano de 1932 a 2001). Os resultados dos três métodos foram comparados percentualmente com valores dos certificados de Energia Assegurada homologados pela ANEEL<sup>5</sup> (Agência Nacional de Energia Elétrica).

O capítulo 10 apresenta as principais conclusões do estudo realizado.

---

<sup>4</sup> Obtido no site do MAE (Mercado Atacadista de Energia) - [www.mae.org.br](http://www.mae.org.br)

<sup>5</sup> Os valores dos certificados de energia assegurada foram obtidos através das resoluções da ANEEL, todas publicadas em seu site – [www.aneel.gov.br](http://www.aneel.gov.br), salvo algumas poucas exceções que foram obtidas através de contratos de concessão e outras que não estão publicados oficialmente.

**2****ENERGIA FIRME DE SISTEMAS HIDRELÉTRICOS**

Como visto no capítulo 1, a energia firme de uma usina hidrelétrica corresponde à máxima demanda que pode ser suprida continuamente (sem racionamento) na ocorrência das vazões registradas no histórico.

Uma das formas de se obter a Energia Firme de uma usina hidrelétrica é utilizar um procedimento iterativo do tipo “tentativa e erro”. Um procedimento típico seria:

- (a) defina uma demanda firme inicial EF;
- (b) simule a operação do sistema para atender a esta demanda EF; se ocorreu algum racionamento durante a simulação, reduza EF e volte ao passo (b); se não ocorreu nenhum racionamento, aumente EF e volte ao passo (b).

Este procedimento deve ser aplicado até que um critério de convergência seja atendido.

Neste capítulo será mostrado que a energia firme pode ser calculada diretamente através de um modelo de otimização linear. Por motivos didáticos, será apresentado inicialmente o modelo para apenas uma usina e em seguida será apresentada a extensão para múltiplas usinas.

**2.1.****Formulação como um problema de otimização – uma única usina**

Por simplicidade de apresentação, no modelo apresentado a seguir, e no restante deste trabalho, será usada uma formulação linear para a modelagem do sistema hidrelétrico, a qual em particular considera constante o coeficiente de produção da usina hidrelétrica<sup>6</sup>. Outra não-linearidade desconsiderada no modelo, discutida em [1][24], é a

---

<sup>6</sup> O coeficiente de produção de uma usina é diretamente proporcional à altura de queda da água, que corresponde à diferença entre a cota do reservatório (que depende do volume armazenado) e o nível do

representação das perdas de volume dos reservatórios por evaporação<sup>7</sup>. Mostra-se em [36][82] que estas não-linearidades podem ser representadas por um conjunto de inequações lineares obtidas através de envoltórias convexas (“convex hull”)[81].

### 2.1.1.

#### **Equação de balanço hídrico**

Esta equação representa a evolução do armazenamento ao longo do período de estudo: o volume final a cada estágio é obtido somando-se ao volume inicial a afluência durante o estágio (afluência natural do rio) e subtraindo-se os volumes turbinado e vertido:

$$v_{t+1} - v_t + u_t + w_t = a_t \quad (2.2)$$

para  $t = 1, \dots, T$

onde:

|           |   |
|-----------|---|
| $t$       | indexa os estágios (por exemplo, mês)                             |
| $T$       | duração do estudo (número de meses do registro histórico)         |
| $v_t$     | armazenamento do reservatório no início do mês $t$ ( $m^3$ )      |
| $v_{t+1}$ | armazenamento ao final do mês $t$ = início do mês $t+1$ ( $m^3$ ) |
| $u_t$     | volume turbinado ao longo do mês ( $m^3$ )                        |
| $w_t$     | volume vertido ( $m^3$ )  |
| $a_t$     | afluência incremental ao longo do mês ( $m^3$ )                   |

---

canal de fuga (que depende do volume defluente). As perdas hidráulicas são abatidas diretamente desta altura líquida de queda A formulação não-linear do problema é apresentada em [1][24].

<sup>7</sup> A evaporação é proporcional ao produto do coeficiente mensal de evaporação pela área do espelho d'água do reservatório, que por sua vez depende do armazenamento.

### 2.1.2.

#### **Limites de armazenamento e turbinamento**

Estas restrições são auto-explicativas e estabelecem o volume máximo armazenado no reservatório e máximo volume turbinado ao longo de cada mês:

$$v_t \leq \bar{v} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$u_t \leq \bar{u} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

onde:

$\bar{v}$  volume útil do reservatório ( $m^3$ )

$\bar{u}$  máximo volume turbinado ao longo do mês ( $m^3$ )

### 2.1.3.

#### **Geração hidrelétrica**

A produção de energia da usina (MWh) é proporcional ao produto do volume turbinado ( $m^3$ ) e do coeficiente de produção médio ( $MWh/m^3$ ).

$$E_t = \rho \times u_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

onde:

$\rho$  fator de produção médio da usina ( $MWh/m^3$ )

### 2.1.4.

#### **Energia firme**

Como a energia firme deve ser produzida continuamente, o conjunto de restrições a seguir essencialmente estabelece que o firme corresponde à menor energia produzida ao longo do período:

$$F \leq \rho \times u_t \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

onde:

$F$  variável escalar que representa a energia firme da usina (MWh)<sup>8</sup>.

### 2.1.5.

#### Função objetivo

Como visto em (2.6),  $F$  é a menor energia produzida ao longo do período. Portanto, o objetivo é maximizar  $F$ .

### 2.1.6.

#### Formulação completa

O problema de otimização é formulado como:

$$\text{Max} \quad F$$

sujeito a

$$v_{t+1} - v_t + u_t + w_t = a_t \quad (2.7a)$$

$$v_t \leq \bar{v} \quad (2.7b)$$

$$u_t \leq \bar{u} \quad (2.7c)$$

$$F - \rho u_t \leq 0 \quad (2.7d)$$

para  $t = 1, \dots, T$

O armazenamento inicial no reservatório,  $v_0$ , é arbitrado para ter 100% da capacidade máxima da usina, ou seja,  $\bar{v}$ .

<sup>8</sup> Por simplicidade de notação, estamos supondo que todos os estágios têm igual duração. Na prática são utilizados estágios mensais e é feito um ajuste de MWh para MW médio.

## 2.2.

### Formulação como um problema de otimização – múltiplas usinas

A Energia Firme total de um conjunto de usinas hidrelétricas, analogamente ao caso de uma usina, corresponde à máxima demanda que elas podem atender continuamente, numa operação *integrada*, supondo a ocorrência do registro histórico de vazões e sem ocorrência de déficits. A Energia Firme de um sistema composto de múltiplas usinas hidrelétricas também pode ser obtida através de um modelo de programação linear, análogo ao modelo para uma usina visto no na seção 2.1. A produção de energia total do sistema, também neste caso, está sujeita a restrições operativas de cada usina que compõe o sistema (balanço hídrico, limites de armazenamento e turbinamento, etc.).

#### 2.2.1.

##### Equação de balanço hídrico

Para o caso de um sistema com múltiplas usinas, a equação de balanço hídrico é um pouco diferente, já que neste caso adiciona-se à afluência incremental de cada usina as defluências das usinas a montante dela.

O volume final a cada estágio é obtido somando-se ao volume inicial a afluência durante o estágio (afluência incremental mais defluência das usinas a montante) e subtraindo-se os volumes turbinado e vertido:

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \quad (2.8)$$

para  $t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$

onde:

$t$  indexa os estágios (por exemplo, mês)

$T$  duração do estudo (número de meses do registro histórico)

$i$  indexa as usinas ( $I$  - número de usinas)

$v_{t,i}$  armazenamento do reservatório no início do mês  $t$  ( $m^3$ )

|             |   |
|-------------|---|
| $v_{t+1,i}$ | armazenamento ao final do mês $t = \text{início do mês } t+1$ ( $m^3$ ) |
| $m \in M_i$ | conjunto de usinas imediatamente a montante da usina $i$                |
| $u_{t,i}$   | volume turbinado ao longo do mês ( $m^3$ )                              |
| $w_{t,i}$   | volume vertido ( $m^3$ )  |
| $a_{t,i}$   | afluência incremental ao longo do mês ( $m^3$ )                         |

### 2.2.2.

#### Limites de armazenamento e turbinamento

Similarmente ao caso uma usina somente, estas restrições são auto-explicativas:

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \quad \text{para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I \quad (2.9)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \quad \text{para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I \quad (2.10)$$

onde:

$\bar{v}_i$  armazenamento máximo ( $m^3$ )

$\bar{u}_i$  máximo volume turbinado ao longo do mês ( $m^3$ )

### 2.2.3.

#### Geração hidrelétrica

A produção de energia total do sistema é igual à soma das produções individuais de todas as usinas:

$$E_t = \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.11)$$

onde:

$\rho_i$  fator de produção médio da usina  $i$  (MWh/ $m^3$ )

## 2.2.4.

### Energia firme

Como a energia firme deve ser produzida continuamente, o conjunto de restrições a seguir essencialmente estabelece que o firme corresponde à menor energia produzida ao longo do período:

$$F \leq \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (2.12)$$

onde:

$F$  variável escalar que representa a energia firme do conjunto de usinas (MWh)<sup>9</sup>.

## 2.2.5.

### Função objetivo

Como visto em (2.12),  $F$  é a menor energia produzida ao longo do período. Portanto, o objetivo é maximizar  $F$ .

## 2.2.6.

### Formulação Completa

O problema de otimização é formulado como:

---

<sup>9</sup> Novamente, por simplicidade de notação, estamos supondo que todos os estágios têm igual duração e na prática são utilizados estágios mensais e é feito um ajuste de MWh para MW médio.

Max F

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \quad (2.13a)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \quad (2.13b)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \quad (2.13c)$$

$$F - \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \leq 0 \quad (2.13d)$$

para  $t = 1, \dots, T$ ; para  $i = 1, \dots, N$

Os armazenamentos iniciais dos reservatórios  $v_0$ 's de cada usina são arbitrados para terem 100% das capacidades máximas.

O modelo de cálculo da energia firme (2.13) é um problema de otimização linear e pode ser resolvido por pacotes computacionais comerciais como o CPLEX [68] ou XPRESS-MP [69].

### 2.3.

#### **Aplicações do modelo para cálculo de energia firme.**

Esta seção mostra a aplicação do modelo de cálculo de energia firme (2.13), primeiro para um caso com uma única usina, e em seguida considerando 4 usinas em cascata.

### 2.3.1.

#### Exemplo com 1 usina

A Tabela 2.1 abaixo as características físicas da usina do primeiro exemplo:

|                | <b>Fator de Produtibilidade (<math>\rho</math>)</b><br>(MW/ $m^3/s$ ) | <b>Volume útil do reservatório (<math>\bar{v}</math>)</b><br>( $hm^3$ ) | <b>Turbinamento máximo (<math>\bar{u}</math>)</b><br>( $m^3/s$ ) | <b>Potência Nominal</b><br>(MW) |
|----------------|---|---|--|---------------------------------|
| <b>Usina 1</b> | 0,75  | 18250   | 1700   | 1275,0                          |

**Tabela 2.1<sup>10</sup> - Características físicas da usina do primeiro exemplo**

As vazões naturais utilizadas foram obtidas do histórico de vazões de uma usina do sistema brasileiro com características semelhantes.

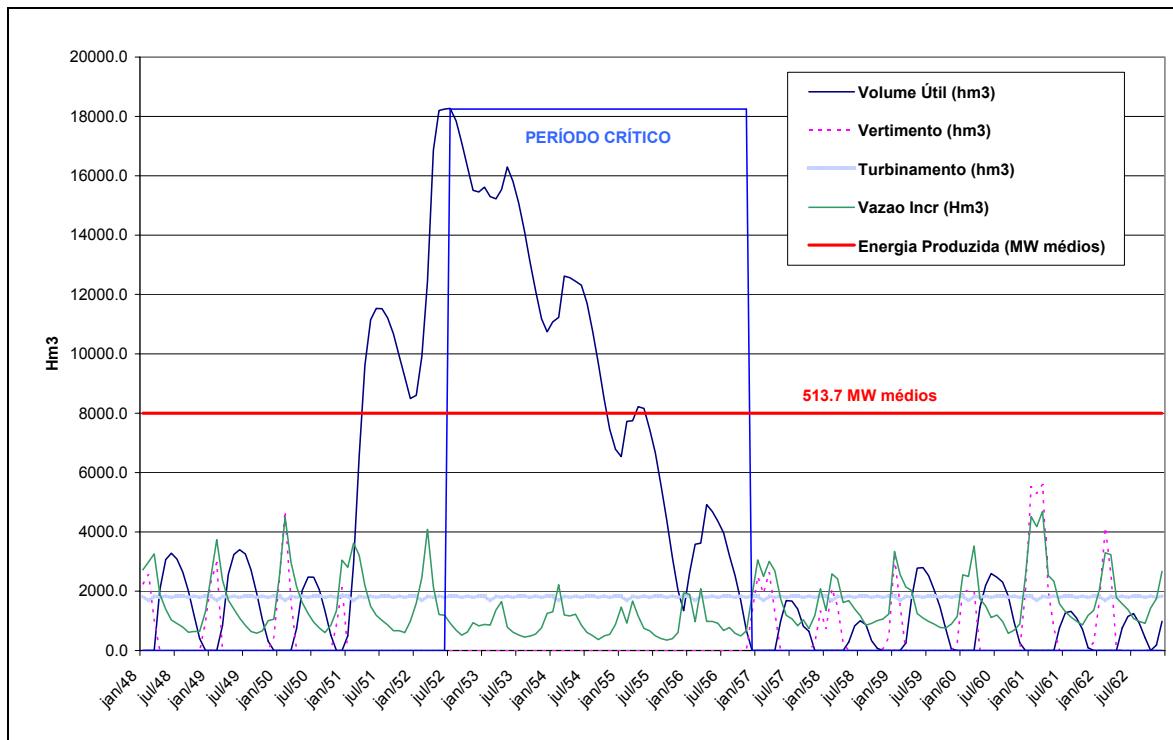
O modelo (2.13) foi implementado e testado para a usina com o pacote computacional Xpress-MP.

O valor da Energia Firme encontrado foi 513,7 MW médios. Isto significa que a usina consegue atender, sem que haja déficit, a uma demanda constante de no máximo 513,7 MW médios, caso ocorra novamente a seqüência histórica de vazões simulada.

Os resultados são apresentados no gráfico da Figura 2.1, que mostra a evolução das variáveis: (i) volume armazenado, (ii) vertimento, (iii) turbinamento, (iv) vazão incremental, expressos em  $hm^3$ , e (v) energia produzida, expressa em MW médios. Para que se possa ver com mais detalhes o período crítico (que será introduzido na seção 2.4), o horizonte de tempo apresentado é bem menor que o simulado, que começa em 1931 e se estende até 2001.

---

<sup>10</sup> As unidades nesta tabela, diferentes das apresentadas no modelo (2.13), são as mais usualmente utilizadas.



**Figura 2.1 - Resultados do cálculo da energia firme para 1 usina**

Observa-se inicialmente que a energia produzida, expressa em MW médios, é constante, pois se está atendendo continuamente a uma “demanda” igual à energia firme do sistema. As pequenas variações no turbinamento se devem ao fato de que os meses simulados têm número de dias diferentes, e, portanto, mesmo turbinando a uma taxa constante, apresentam volumes totais turbinados em cada mês, em  $hm^3$ , diferentes.

### 2.3.2.

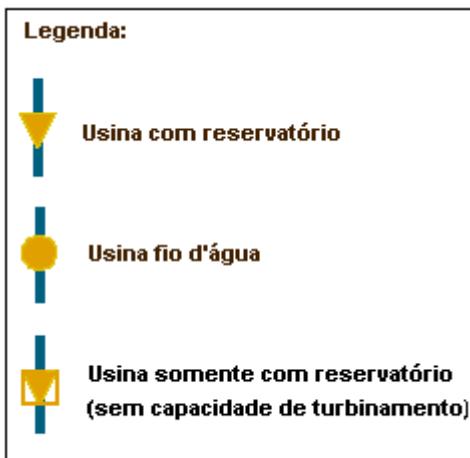
#### Exemplo com 4 usinas

Neste segundo exemplo foi utilizado um sistema hidrelétrico composto por quatro usinas localizadas em cascata. As características físicas das usinas estão descritas na Tabela 2.2 e a topologia é mostrada na Figura 2.3. As vazões naturais utilizadas foram obtidas dos dados do histórico de vazões de 4 postos do sistema brasileiro. Para definir as características das usinas (volume máximo, turbinamento máximo e fator de produção

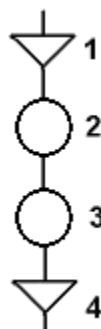
médio) também foram adotados valores típicos de hidrelétricas existentes no sistema brasileiro.

A Figura 2.2 mostra a legenda das figuras usadas para representar cada tipo de usinas (fio d'água, com reservatório e somente com reservatório):

#### Legenda dos Tipos de Usinas Hidrelétricas



**Figura 2.2 – Legenda das figuras usadas para representar usinas hidrelétricas**

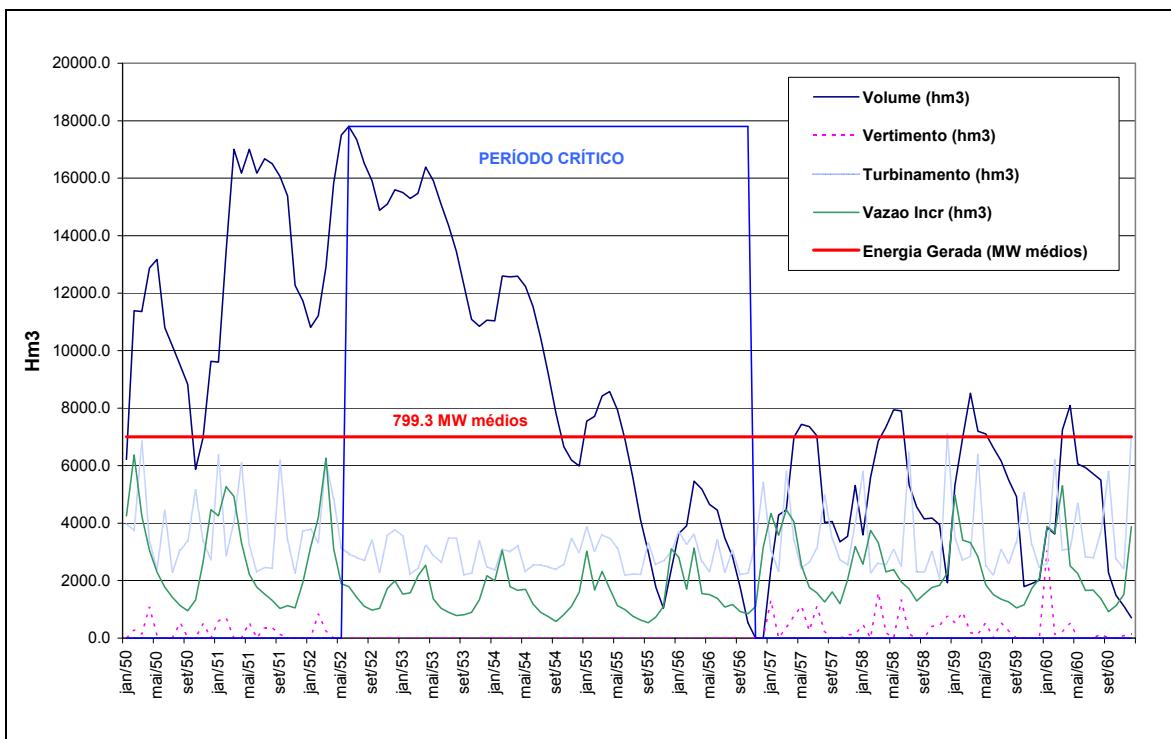
**Figura 2.3 – Topologia do sistema-exemplo**

|                | Fator de Produtibilidade ( $\rho$ )<br>(MW/ $m^3/s$ ) | Volume útil do reservatório ( $\bar{v}$ )<br>(hm <sup>3</sup> ) | Turbinamento máximo ( $\bar{u}$ )<br>( $m^3/s$ ) | Potência Nominal (MW) |
|----------------|---|---|--|-----------------------|
| <b>Usina 1</b> | 0,15  | 800   | 200  | 30,0                  |
| <b>Usina 2</b> | 0,25  | 0   | 250  | 62,5                  |
| <b>Usina 3</b> | 0,35  | 0   | 600  | 210,0                 |
| <b>Usina 4</b> | 1,00  | 17000   | 1600   | 1600,0                |

**Tabela 2.2 - Características físicas das 4 usinas segundo exemplo**

O valor da Energia Firme encontrado foi 799,3 MW médios, que é, portanto, a máxima demanda que estas quatro usinas conseguem atender numa operação integrada, sem que haja déficit, caso ocorra novamente a seqüência histórica de vazões simulada.

Os resultados são apresentados no gráfico da Figura 2.4, que mostra a evolução da soma das variáveis das quatro usinas: (i) volume armazenado, (ii) vertimento, (iii) turbinamento, (iv) vazão incremental, expressas em hm<sup>3</sup> e (v) energia produzida, expressa em MW médios. Novamente, para que se possa ver com mais detalhes o período crítico (que será introduzido em seguida na seção 2.4), o horizonte de tempo apresentado é bem menor que o horizonte simulado (1931 até 2001).



**Figura 2.4 – Resultados do cálculo da energia firme para 4 usinas**

Apesar de a produção de energia ser constante, o volume turbinado apresenta uma certa variação, devido aos diferentes coeficientes de produção das usinas que geram em diferentes proporções em cada etapa.

Já o volume afluente é bastante variável, e é a variação no armazenamento do reservatório que transforma esta série variável de entrada numa saída constante. Em particular, observa-se na Figura 2.4 que o reservatório foi enchendo para poder compensar as afluências mais reduzidas ao longo do período crítico.

## 2.4.

### Período Crítico

Associado ao cálculo do “firme” surge um importante conceito que será usado em um dos métodos de alocação estudado nesta dissertação, que é o método de alocação pela geração média no Período Crítico.

Quando o modelo de otimização (2.7) para cálculo da energia firme é aplicado e a solução ótima é obtida, os valores da variável *volume útil* do problema apresentam um

comportamento típico: sempre haverá um intervalo de tempo em que a usina começa com seu reservatório completamente cheio e termina com ele completamente vazio, sem haver reenchimentos parciais. Este intervalo é conhecido como período crítico e está destacado nas Figura 2.1 e Figura 2.4.

O período crítico se caracteriza por ter as piores afluências do histórico de vazões, ou seja, é o período em que ocorre a pior seca, daí o adjetivo “crítico”. Ele é importante porque representa o “ponto de estrangulamento” da capacidade contínua de produção do sistema. Fora do período crítico, ainda seria possível atender a um incremento da demanda, sem problemas. Entretanto, dentro do período crítico, o atendimento a este mesmo incremento levaria a um racionamento.

#### 2.4.1.

#### **Interpretação das Variáveis Duais: modelo para uma usina**

As variáveis duais (ou multiplicadores de Lagrange) associadas às restrições do modelo do “firme” servem para interpretar e definir explicitamente importantes aspectos relacionados ao problema da energia firme.

A definição do período crítico pode ser feita de maneira *explícita* (depois de encontrada a solução ótima) através dos valores das variáveis duais associadas às restrições de atendimento ao firme (2.7d). Ele pode ser definido como o intervalo de tempo onde estas restrições estão ativas, isto é, têm variáveis duais diferentes de zero. Para todo o resto do horizonte estas restrições estarão “relaxadas”, e suas variáveis duais terão valores nulos.

A razão é que aumentar infinitesimalmente o “recurso” (lado direito) da restrição (2.7d) numa etapa “fora” do período crítico não geraria benefício (ou melhora) à função objetivo. Neste caso estas restrições apenas ficariam um pouco mais “relaxadas” e o valor ótimo do problema não se alteraria. Já aumentar o recurso desta restrição numa etapa que está “dentro” do período crítico geraria um aumento do firme total, pois nesta etapa menos água precisaria ser turbinada para atender à restrição do firme (que neste caso seria menor pelo aumento do recurso no lado direito). Com isso, mais água poderia passar a ser turbinada nas etapas do período crítico, o que geraria um aumento da energia firme

total da usina. Esta também é a explicação para não haver nenhum vertimento durante o período crítico, ou seja, nenhuma quantidade de água é desperdiçada. Outra característica das variáveis duais associadas à restrição (2.7d) é que possuem o mesmo valor durante todo o período crítico<sup>11</sup>, o que significa que um aumento infinitesimal no lado direito da restrição (2.7d) geraria aumentos iguais na energia firme total da usina. Visto em termos econômicos, o *custo marginal de curto prazo*, que reflete justamente o custo de atender a 1 MWh adicional de demanda, é igual a zero fora do período crítico; e igual ao custo do racionamento dentro do período crítico. Este conceito é a base das extensões metodológicas discutidas nos capítulos seguintes.

Outra característica do modelo diz respeito ao comportamento do reservatório da usina durante o período crítico. Na última etapa do período crítico o reservatório sempre se esvazia completamente. A razão é que o modelo irá “tentar” aumentar o valor da variável F (que representa a capacidade de geração constante e é a própria função objetivo), até que ela atinja seu valor máximo. Se no final do período crítico o reservatório não se esvazia completamente, significa que esta água que ainda sobrou poderia ter sido usada para aumentar ainda mais o valor de F. Por esses motivos, quando a solução ótima for obtida, sempre haverá um período crítico e o reservatório da usina ao final dele sempre estará vazio.<sup>12</sup>

O mesmo raciocínio feito para as restrições de atendimento ao firme (2.7d) vale para as restrições de balanço hídrico (2.7a), ou seja, um aumento infinitesimal na quantidade de água (“recurso”, ou lado direito da restrição de balanço hídrico) que chega a montante da usina em uma etapa fora do período crítico não iria alterar o valor da energia que ela seria capaz de gerar continuamente durante todo o horizonte. A razão é que caso esta quantidade a mais de água “chegasse” em uma etapa anterior ao período crítico, ela certamente iria ser vertida antes de seu início, quando o reservatório se enche por completo. Já se essa quantidade “chegasse” depois do período crítico, ela também

---

<sup>11</sup> Neste caso se supõe que todas as etapas simuladas são do mesmo tamanho.

<sup>12</sup> Em teoria, poderiam existir, para uma mesma energia firme, dois períodos críticos diferentes. Este caso seria equivalente ao de uma solução “degenerada” em programação linear, em que um dos períodos seria arbitrariamente o “crítico” (básico). Este caso, por ser considerado estatisticamente impossível de ocorrer, não afeta os desenvolvimentos deste trabalho.

não iria ser capaz de impedir o completo esvaziamento do reservatório ao final do período crítico.

Outra característica importante diz respeito à variável dual associada à restrição de volume máximo. Quando a solução ótima do problema é obtida ela terá valor maior que zero apenas na primeira etapa do período crítico, quando o reservatório está completamente cheio. Apenas nesta etapa um aumento da capacidade do reservatório geraria um aumento no valor da função objetivo, já que uma quantidade maior de água poderia ser armazenada e utilizada durante o período crítico para aumentar a capacidade de geração constante da usina.

#### 2.4.2.

#### **Interpretação das Variáveis Duais: modelo para múltiplas usinas**

Todas as análises das variáveis duais feitas até então estão relacionadas ao modelo para uma usina (2.7). As mesmas características observadas neste modelo se estendem para o caso de múltiplas usinas (2.13), salvo algumas observações.

No início do período crítico, por exemplo, não é garantido que todas as usinas atingirão os níveis máximos de armazenamento ao mesmo tempo, e por isso a variável dual associada à restrição de volume máximo de alguma delas pode ter valor igual a zero nesta etapa.

Durante o período crítico o inverso também pode ocorrer, ou seja, alguma usina pode isoladamente encher completamente o reservatório e por isso apresentar a variável dual associada à restrição de volume máximo maior que zero. Isto serve também para explicar a existência de pequenos vertimentos isolados durante o período crítico. Ao final do período crítico os reservatórios de todas as usinas, analogamente ao caso de uma usina, se esvaziam completamente e ao mesmo tempo.

Há dois casos em que uma usina verte durante o período crítico. O primeiro é quando ela é um reservatório “puro”, sem capacidade de turbinamento, só lhe restando verter ou armazenar água. O segundo seria o de a usina possuir isoladamente vazões mais favoráveis durante o período crítico, o que faz com que encha por completo o reservatório, mesmo turbinando o máximo de água possível. Neste caso, a vazão

excedente, que não pode ser nem armazenada, nem turbinada, é vertida. Nunca ocorrerá, porém, durante o período crítico, vertimento em uma usina que não esteja turbinando o máximo de sua capacidade. Esta energia desperdiçada por esta usina, poderia ser gerada e fazer com que outra armazenasse mais água, aumentando a energia firme do sistema.

Analizando as variáveis duais associadas às restrições de turbinamento máximo constata-se que elas também poderão ter valores maiores que zero somente durante o período crítico. Isto ocorre por motivos análogos aos apresentados anteriormente, ou seja, um aumento infinitesimal na capacidade de turbinamento de qualquer usina numa etapa fora do período crítico não geraria um aumento da energia firme total do sistema. Tal fato ocorre geralmente com usinas cujas vazões afluentes durante o período crítico são mais favoráveis, o que faz com que elas pudessem turbinar uma quantidade de água maior que suas capacidades máximas de turbinamento.

### 3

## O PROBLEMA DA REPARTIÇÃO DOS BENEFÍCIOS

Como foi visto na seção 1.3, a produção firme total do sistema resultante de uma operação integrada das usinas, onde todas cooperam entre si formando uma grande coalizão, é maior que a produção firme onde cada agente maximiza isoladamente a sua produção, sem cooperar para a maximização do firme total do sistema.

A existência destes benefícios na capacidade de produção das usinas, operando de forma integrada, leva imediatamente à questão de como reparti-los de forma justa entre os diversos agentes, de tal forma que seja vantajoso para cada um participar da grande coalizão. Em outras palavras, os benefícios da operação conjunta devem ser repartidos de forma que nenhum dos agentes tenha incentivo a sair da grande coalizão, o que faria com que a Energia Firme total do sistema fosse menor que a da operação conjunta. Este tipo de problema é estudado em *teoria de jogos cooperativos*[44].

### 3.1.

#### **Teoria de Jogos Cooperativos**

A teoria de jogos cooperativos se aplica tanto a problemas de alocação de custos entre participantes que usufruem um mesmo serviço, quanto para problemas de alocação de benefícios (Energia Firme, por exemplo).

A diferença básica entre jogos cooperativos e não-cooperativos é o tipo de solução empregada por cada um. Jogos cooperativos buscam repartir os benefícios de uma ação conjunta de maneira a incentivar a cooperação entre os agentes. Os jogos não-cooperativos são usados em ambientes competitivos, onde cada participante procura maximizar seu benefício individual, mesmo que em detrimento dos demais.

### 3.1.1.

#### Revisão Bibliográfica

A teoria dos jogos tem sido extensivamente aplicada a temas do Setor Elétrico. De caráter geral, em [50] pode ser observada a variedade de temas e desafios que podem ser enfrentados pela teoria dos jogos.

Mais especificamente, a teoria dos jogos não-cooperativos tem sido aplicada em situações oriundas dos mercados competitivos de energia, onde os distintos agentes atuam estrategicamente, frente aos desafios de um mercado competitivo, objetivando a maximização do lucro individual. Os resultados do jogo para qualquer agente dependem não somente da atuação deste agente, mas da atuação conjunta de todos os jogadores. A busca tradicional de uma solução é denominada “equilíbrio do jogo”, no qual o equilíbrio de Nash[51] vem sendo usado como elemento principal. Na literatura encontram-se distintas aplicações, como por exemplo, análises de poder de mercado[52][53], modelos de equilíbrio[54][55] e determinação de estratégias de ofertas ótimas de geradores em ambiente de mercado[56][57].

Já a teoria dos jogos cooperativos vem sendo aplicada, no setor elétrico, a problemas de “alocação” de um modo geral, em seus diversos segmentos.

Uma de suas áreas de aplicações mais notáveis é a área de transmissão, sobretudo em alocação de custos de transmissão. Neste problema, o desenvolvimento de um “serviço” de transmissão (construir circuitos, adquirir recursos auxiliares, faixas de passagem etc) necessário para transportar a geração para a demanda ocorre de maneira *compartilhada* por um conjunto de agentes (geradores e demandas). É intuitivo que o custo do serviço integrado é menor que a soma de desenvolvimento de serviços separados para cada agente ou sub-grupos de agentes. Em outras palavras, o desenvolvimento conjunto é eficiente em termos econômicos. O problema é então como *alocar* este custo de serviço entre os participantes de maneira eficiente e justa. A teoria dos jogos cooperativos é extensivamente aplicada na alocação de custos, por exemplo, de transmissão entre geradores, consumidores, transmissores ou subconjunto de todos anteriores[13][14][29][47][48], e contratos de transações wheeling[59][60]. A referência [47] apresenta uma visão geral da utilização de jogos cooperativos para alocação de

custos de transmissão. Nestas aplicações distintos métodos de jogos cooperativos tem sido aplicados, como o valor de Shapley, Núcleo, Aumann-Shapley, etc.

Ainda no contexto de “custos de transmissão”, diversas outras aplicações são encontradas na literatura como a alocação do sobrecusto operativo e custos de congestão[4][39], o uso de teoria dos jogos cooperativos para repartir custos associados a serviços aniliares[6][41], obter fatores de perdas nodais[30], VaR planning[6][34], entre outros.

Diversas outras aplicações práticas de teoria dos jogos cooperativos podem ser encontradas fora do setor elétrico. Por exemplo, engenheiros da Tennessee Valley Authority consideraram nos anos 30 distintos métodos para alocar entre os beneficiários (usuários de irrigação, navegação e produtores de energia elétrica) os custos de melhoria do sistema de comunicação de água existente na época e construção de represas[61]. Os conceitos de “justiça”, núcleo e “nucleolus” foram utilizados de forma intuitiva e diversos anos antes da publicação do celebrado livro de Von Neumann e Morgenstern[42]. De modo geral, o problema de repartição de custos e benefícios de atividades, onde há economias de escala ou sinergia, ocorre em diversas atividades comerciais, e a literatura está repleta de exemplos:

- a) alocação de custos entre os departamentos da McDonnell-Douglas [62];
- b) repartição dos custos de aluguel de um sistema de telefonia na universidade de Cornell[63];
- c) alocação de custos de manutenção de uma biblioteca médica que é compartilhada por distintos hospitais[64];
- d) financiamento de projetos de recursos hídricos no estado americano do Tennessee[65];
- e) alocação de custos de construção de reservatórios com usos múltiplos nos Estados Unidos[66];
- f) alocação de taxas aeroportuárias na Inglaterra[67];
- g) alocação dos custos de construção de um duto subterrâneo para transporte de água na Suécia[43];

h) aplicações em recursos hídricos de um modo geral [45], como o problema de alocação de custos de construção de dutos para abastecimento de águas em cidades.

Finalmente, cabe ressaltar que, embora muitas aplicações da teoria dos jogos cooperativos possam ser encontradas na área de recursos hídricos, o autor desconhece sua aplicação na alocação de benefícios e direitos de energia firme, que é o foco deste trabalho.

### 3.1.2.

#### **Conceitos Básicos**

Um jogo cooperativo é formado por um conjunto de  $N$  jogadores que se unem para formar coalizões com o objetivo de maximizar ou minimizar uma função característica. Esta por sua vez fornece o benefício total, ou o custo total de fornecer um serviço, para cada coalizão formada pelos  $N$  jogadores (ou agentes).

Matematicamente, uma coalizão é um subconjunto  $S$  do conjunto de  $N$  jogadores. Os jogadores podem agrupar-se de diferentes maneiras de acordo com seus interesse e conveniência. Para formar uma coalizão, é necessário que todos os jogadores envolvidos firmem acordos entre si e uma vez que todos concordem, a coalizão é formada. As coalizões são mutuamente exclusivas, ou seja, formar uma coalizão  $S$  implica que não há possibilidade de seus participantes fazerem acordos com participantes de fora dela.

A coalizão formada por todos os  $N$  jogadores é chamada de *grande coalizão*, ou *coalizão N*. Num jogo com  $N$  jogadores há  $2^N$  diferentes coalizões possíveis. A coalizão vazia, ou coalizão  $\emptyset$ , é a coalizão na qual nenhum jogador participa.

A maneira através da qual todos os jogadores formam m coalizões pode ser descrita pelo conjunto  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ , conhecido como o conjunto das configurações das possíveis coalizões. Este conjunto S satisfaz três condições:

$$S_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{para todo } i \neq j, \text{ e} \quad (3.2)$$

$$\bigcup_{i=1}^m S_i = N. \quad (3.3)$$

Von Neumann e Morgenstern [42] introduziram pela primeira vez, em 1947, o termo *função característica*, que calcula para cada coalizão (argumento da função) o maior valor do benefício (ou menor valor do custo) associado a ela. Em outras palavras, a função característica fornece o valor do máximo benefício (ou mínimo custo) que os membros de uma determinada coalizão conseguem obter através de uma ação cooperativa entre eles. A definição formal da *função característica* é:

*Definição:* Para cada subconjunto  $S$  de  $N$ , a **função característica**  $\nu$  de um jogo fornece o maior valor  $\nu(S)$  que os membros de  $S$  podem receber se eles formarem uma coalizão e agirem juntos, cooperando entre si, sem a ajuda de qualquer jogador de fora dela.<sup>13</sup>

Esta definição leva em conta uma restrição que requer que o valor da função característica da coalizão vazia seja zero, ou seja,  $\nu(\emptyset)=0$ .

Outro requisito que deve ser atendido pela função característica em jogos de coalizão é a chamada **superaditividade**<sup>14</sup>, que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T) \quad \text{para todo } S, T \subseteq N, \text{ tal que } S \cap T = \emptyset \quad (3.4)$$

A superaditividade determina que o benefício associado a qualquer coalizão será sempre maior que a soma dos benefícios associados às sub coalizações que a particionam. Como a superaditividade deve ser atendida para quaisquer  $S$  e  $T$ , uma simples manipulação da expressão (3.4) permite concluir que seu lado direito pode não somente

<sup>13</sup> Nesta definição assume-se que o problema em questão é de alocação de benefícios, e por isso a função característica calcula o *maior* valor associado ao subconjunto  $S$ . Caso o problema fosse de alocação de *custos*, a função característica análoga calcularia o *menor* valor associado ao subconjunto  $S$ .

<sup>14</sup> Estaremos sempre lidando com problemas de alocação de benefícios entre jogadores. Para problemas de alocação de custos, esta propriedade é conhecida como “subaditividade” [44].

ter a soma dos benefícios de duas coalizões, como a soma dos benefícios de qualquer conjunto de coalizões que particiona  $S \cup T$ , o que equivale a:

$$v(S) \geq v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_m) \text{ para todo } S, \text{ tal que } Si \cap S_j = \emptyset \text{ e } \bigcup_{i=1}^m S_i = S \quad (3.5)$$

A superaditividade garante, portanto, que a cooperação entre os jogadores sempre gera um aumento do benefício global. Em outras palavras, a cooperação entre os agentes produz uma “sinergia”, que implica no aumento do benefício total.

Note que a expressão (3.4) não requer que  $S \cup T$  seja igual a  $N$ , e, portanto, a superaditividade deve ser válida não somente para a grande coalizão, mas para qualquer outra possível.

Assumindo que a função característica do jogo apresenta superaditividade, a grande coalizão sempre será formada ao final do jogo. Portanto, a pergunta natural que surge, após o cálculo do benefício total, é como dividi-lo de modo eficiente e justo entre os agentes que formam esta grande coalizão. A divisão do benefício  $v(N)$  entre eles, representada pelo vetor de alocações  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ , não é evidente.

### 3.1.3.

#### **Núcleo de jogos cooperativos**

Um vetor de alocações  $\phi$  só é considerado “justo” se satisfizer às três expressões abaixo:

$$v(N) = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (\text{Racionalidade do Grupo}) \quad (3.6)$$

$$\phi_i \geq v(\{i\}) \quad (\text{para todo } i \in N) \quad (\text{Racionalidade Individual}) \quad (3.7)$$

$$\sum \phi_i \geq v(S) \quad \text{para todo } i \in S, \text{ para todo } S \subset N \quad (\text{Racionalidade das Coalizões}) \quad (3.8)$$

A equação (3.6) determina que devem-se alocar aos jogadores benefícios cuja soma é igual ao benefício da grande coalizão ( $v(N)$ ), ou seja, deve-se garantir que a totalidade

do benefício é alocado entre os agentes. Por sua vez, a inequação (3.7) determina que cada jogador deve receber no mínimo um benefício igual ao que ele obteria agindo individualmente ( $v\{i\}$ ).

A inequação (3.8) determina que a soma das alocações dos jogadores de qualquer sub-coalizão  $S$  deve ser maior que o benefício obtido pela ação conjunta destes jogadores ( $v(S)$ ). Vale notar que (3.7) é apenas um caso particular de (3.8).

Quando uma alocação atende a (3.6) e a (3.8), diz-se que ela pertence ao *núcleo* do jogo.

O núcleo formaliza a idéia de justiça em uma alocação de custos ou benefícios entre agentes. Se uma alocação pertence ao núcleo de um jogo cooperativo, podemos dizer que o benefício atribuído a qualquer agente, ou a qualquer “consórcio” de agentes, não é inferior ao que estes agentes conseguiriam obter se formassem um “consórcio” separado ou se atuassem “individualmente” (fora da coalizão). Em outras palavras, uma alocação é justa se todos os participantes recebem mais benefícios por estarem no “grande consórcio” do que fora dele.

Soluções que pertencem ao núcleo possuem uma certa estabilidade, já que nenhum jogador tem incentivo a sair da grande coalizão. Porém, há casos em que o núcleo do jogo é vazio. Neste caso outras abordagens podem ser propostas, como, por exemplo, o uso dos conceitos de conjunto estável (“stable set”)[42] e conjunto de negociação (“bargaining-set”)[83]. Como será provado na seção 5.3, o núcleo do jogo relacionado à repartição de energia firme nunca é vazio, e por esta razão estes conceitos não serão abordados nesta monografia.

### 3.1.4.

#### **Núcleo: ilustração para o problema de energia firme**

Suponha que exista uma função  $f(.)$  que calcula a energia firme de qualquer subconjunto destas hidrelétricas<sup>15</sup>. O resultado desta função é calculado pela aplicação do

<sup>15</sup> Esta função calcula através do modelo (2.13) a energia firme do conjunto de usinas quando operadas de forma isolada na cascata, respeitando a topologia entre elas.

modelo (2.13) apresentado no capítulo 2. Com isso, teríamos, por exemplo, para um caso com 3 usinas,  $f(H_2)$  o firme da usina  $H_2$ ;  $f(H_1, H_3)$  o firme conjunto das usinas  $H_1$  e  $H_3$ ;  $f(H_1, H_2, H_3)$  o firme total do sistema, e assim por diante.

Sejam  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  as energias firmes alocadas à  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ , respectivamente. A primeira restrição do núcleo é que a soma das alocações deve ser igual à energia firme total do sistema:  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3)$ .

O segundo grupo de restrições exige que a alocação de cada usina não seja inferior ao firme individual das mesmas:

$$\phi_1 \geq f(H_1)$$

$$\phi_2 \geq f(H_2)$$

$$\phi_3 \geq f(H_3)$$

O terceiro grupo de restrições se aplica às combinações de duas usinas:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3)$$

Observe que  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  são as “incógnitas” do problema, e os lados direitos das restrições são valores conhecidos. De acordo com a abordagem de jogos cooperativos, qualquer alocação  $\{\phi_1; \phi_2; \phi_3\}$  que atende o conjunto de restrições acima – conhecido como “núcleo” do jogo - é considerada “justa”, no sentido de que nenhum subconjunto de agentes teria incentivo a sair do “consórcio global”.

Como visto, as restrições do núcleo formam um conjunto linear, onde o lado esquerdo de cada restrição contém uma das combinações possíveis dos agentes (1 a 1, 2 a 2 etc.). Por sua vez, o valor do lado direito da restrição contém o benefício (energia firme, no caso) associado à mesma combinação.

Portanto, o núcleo deste jogo corresponderia à solução do sistema linear formado pelo conjunto de equações anteriores. Este sistema é reproduzido a seguir:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3) \quad (3.9a)$$

$$\phi_1 \geq f(H_1) \quad (3.9b)$$

$$\phi_2 \geq f(H_2) \quad (3.9c)$$

$$\phi_3 \geq f(H_3) \quad (3.9d)$$

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2) \quad (3.9e)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3) \quad (3.9f)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \quad (3.9g)$$

Finalmente, observa-se que para uma alocação estar no núcleo ela deve atender a um conjunto de inequações, o que faz com que a solução não necessariamente seja única, o que normalmente não acontece.

### 3.1.5.

#### Núcleo de Jogos Cooperativos: exemplo

Vamos ilustrar nesta seção o conceito de núcleo de jogos cooperativos, através de um exemplo que trata o problema da energia firme. Considere um sistema fictício formado por duas usinas hidroelétricas em cascata, A e B, de proprietários distintos e com potências instaladas iguais a 360 MW (A) e 120 MW (B). Vamos supor que estas usinas possuem firmes individuais iguais a 110 MW médios (A) e 70 MW médios (B).

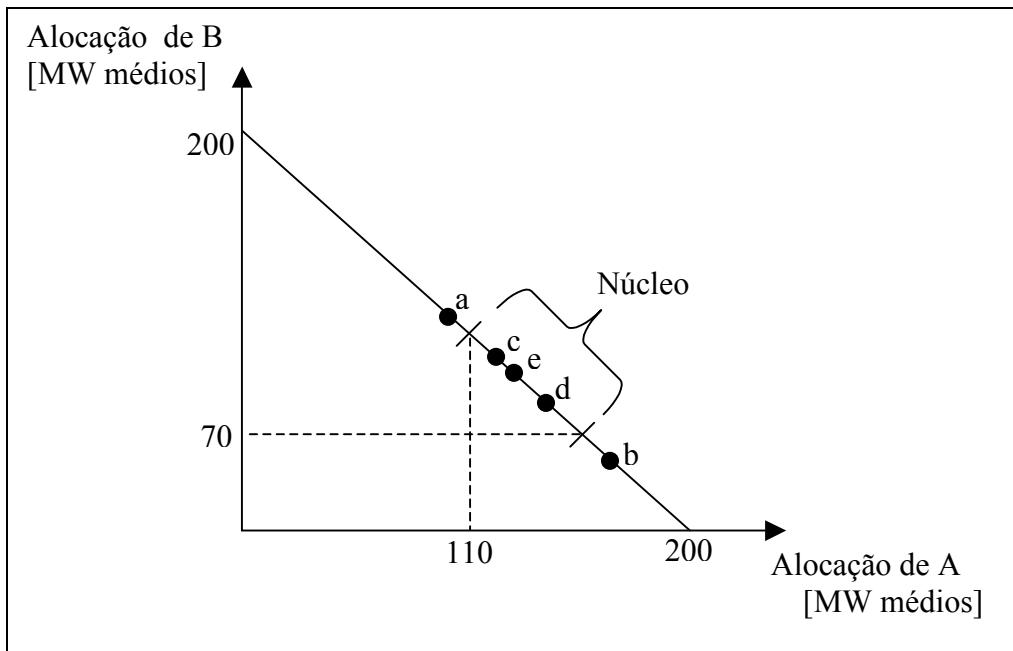
Suponhamos ainda que a Energia Firme total resultante de uma operação integrada das 2 usinas, como se pertencessem a um único dono, fornece um valor de 200 MW médios, que é superior à soma dos firmes individuais de A e B (180 MW) e indica a existência de um “benefício” na cooperação. Portanto, o problema a ser resolvido é repartir estes 200 MW médios entre as usinas, de forma a manter atrativa a operação integrada. Alguns possíveis critérios para a divisão deste montante estão indicadas na Tabela 3.1 a seguir.

|          | <b>Método de Alocação da Energia Firme Total</b>   | <b>Usina A</b><br>(MW médios)       | <b>Usina B</b><br>(MW médios)    |
|----------|--|-------------------------------------|----------------------------------|
| <b>a</b> | Divisão igual  | <b>100</b>                          | <b>100</b>                       |
| <b>b</b> | Divisão proporcional às capacidades instaladas de cada usina   | $200 \times (360/480) = 150$        | $200 \times (120/480) = 50$      |
| <b>c</b> | Divisão igual do ganho em relação à soma dos firmes individuais  | $110 + (20/2) = 120$                | $70 + (20/2) = 80$               |
| <b>d</b> | Divisão do ganho em relação à soma dos firmes individuais proporcional às capacidades instaladas de cada usina | $110 + 20 \times (360/480) = 125$   | $70 + 20 \times (120/480) = 75$  |
| <b>e</b> | Divisão do ganho em relação à soma dos firmes individuais proporcional às energias “individuais” de cada usina | $110 + 20 \times (110/180) = 122.2$ | $70 + 20 \times (70/180) = 77.8$ |

**Tabela 3.1 – Possíveis alocações de Energia Firme das usinas**

Observa-se nesta tabela que o incentivo à cooperação ocorre quando a repartição se concentra na divisão da energia “excedente” (ou “ganho” em relação à soma dos firmes individuais), presente nas opções **c**, **d** e **e**. Isto não ocorre na opção **a** para a usina A, já que nesta repartição o firme alocado a ela (100 MW médios) é menor que seu firme individual (110 MW médios). O mesmo ocorre na opção **b** para a usina B, que tem o firme alocado a ela nesta repartição (50 MW médios) menor que seu firme individual (70 MW médios). Ou seja, estes dois critérios de alocação não satisfazem à condição do tipo (3.9b), na seção 3.1.4, e, portanto, não constituem alocações “justas”.

Todas as alternativas de alocação da Tabela 3.1 estão representadas geometricamente na Figura 3.1.



**Figura 3.1 – Representação geométrica do núcleo**

Conforme visto na seção 3.1.4, o conjunto de soluções que fornece um incentivo à cooperação é chamado de “núcleo” de um jogo cooperativo e é representado neste exemplo pelo segmento de reta indicado na Figura 3.1. Pode-se notar que cada ponto deste segmento aloca tanto à usina A, quanto à usina B, energias firmes maiores que seus respectivos firmes individuais e, portanto, são atrativos sob o ponto de vista da coalizão. Observa-se ainda que mais de uma alocação pode pertencer ao núcleo, ou seja, o núcleo não é único.

### 3.2.

#### Condição para um jogo cooperativo

Conforme apresentado no capítulo 1, uma das motivações para o problema de alocação de benefícios é a existência de “sinergia” entre os agentes, isto é, o benefício global excede a soma dos benefícios isolados. Em outras palavras, o jogo dever atender à condição de superaditividade (3.4). Para o problema em análise nesta dissertação, este aspecto intuitivo se traduz no requisito de que a soma das energias firmes de qualquer grupo de agentes não exceda a energia firme do conjunto. Por exemplo, para o sistema

hidrelétrico composto de três usinas hidrelétricas  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ , a seguinte inequação deve ser atendida:

$$f(H_1, H_2, H_3) \geq f(H_1) + f(H_2) + f(H_3) \quad (3.10)$$

que é justamente a expressão da sinergia.

Porém as restrições do tipo (3.10) devem ser válidas também para todos os subconjuntos de agentes, por exemplo, também devem ser válidas inequações do tipo:

$$f(H_1, H_2, H_3) \geq f(H_1, H_2) + f(H_3) \quad (3.11)$$

A verificação de todas as condições parece ser tão complexa quanto verificar o conjunto de restrições de núcleo (4.1). Entretanto, como será visto a seguir, pode-se demonstrar que as condições de tipo (3.10) são válidas se o benefício global é calculado como a solução de um problema de programação linear com algumas características específicas, como é o caso da Energia Firme.

Esta demonstração será feita em duas etapas: na primeira será mostrado que a condição de superaditividade é satisfeita se o benefício do jogo cooperativo em questão pode ser calculado como a solução de um problema de programação linear, onde se altera apenas o lado direito das restrições para o cálculo do benefício de qualquer subconjunto de agentes. Em seguida, será mostrado que o problema de energia firme atende a estas condições.

### 3.2.1.

#### **Condição atendida para o caso de um modelo de otimização linear**

Por simplicidade de notação, a demonstração será feita para um caso de 2 agentes. A generalização para  $N$  agentes é imediata, ou seja, a prova de que o modelo do firme atende à condição de superaditividade para quaisquer dois subconjuntos de agentes é análoga.

Suponha que o benefício de um agente em um jogo cooperativo qualquer possa ser calculado com a solução de um problema de programação linear. Suponha ainda que o

benefício de qualquer sub-conjunto de agentes possas ser calculado através do mesmo modelo, apenas alterando o lado direito (“recursos”) das restrições.

Deseja-se mostrar que o benefício conjunto é maior ou igual à soma dos benefícios individuais:

$$z(1,2) \geq z(1) + z(2) \quad (3.12)$$

onde as funções dos benefícios  $z(\cdot)$  são dados por:

$$\begin{aligned} z(1) = & \text{ Max } cx \\ \text{sujeito a } & Ax \leq b_1 \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} z(2) = & \text{ Max } cx \\ \text{sujeito a } & Ax \leq b_2 \end{aligned} \quad (3.13b)$$

$$\begin{aligned} z(1,2) = & \text{ Max } cx \\ \text{sujeito a } & Ax \leq b_1 + b_2 \end{aligned} \quad (3.13c)$$

Calculando o Dual de cada problema, tem-se:

$$\begin{aligned} z(1) = & \text{ Min } \pi b_1 \\ \text{sujeito a } & \pi A \geq c \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} z(2) = & \text{ Min } \pi b_2 \\ \text{sujeito a } & \pi A \geq c \end{aligned} \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned}
 z(1,2) = & \text{ Min} & \pi(b_1 + b_2) \\
 & \text{sujeito a} & \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned} \tag{3.14c}$$

Sejam  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_{12}$  as soluções ótimas dos problemas (3.14a) a (3.14c). Aplicando a igualdade primal-dual, a restrição desejada (3.12) é reescrita como:

$$\pi_{12}(b_1 + b_2) \geq \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 \tag{3.15}$$

Como o conjunto de restrições  $\pi A \geq c$  é o mesmo nos três problemas duais, as soluções ótimas de cada problema são soluções viáveis dos demais. Em particular,  $\pi_{12}$  é uma solução viável do problema (3.14a). Como o problema dual minimiza a função objetivo, isto significa que:

$$\pi_{12} b_1 \geq \pi_1 b_1 \tag{3.16}$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao problema (3.14b), resulta:

$$\pi_{12} b_2 \geq \pi_2 b_2 \tag{3.17}$$

Somando (3.16) e (3.17), chega-se a (3.15), que por sua vez equivale ao resultado desejado, que é a restrição (3.12).

### 3.2.2.

#### **Condição atendida para o caso da energia firme**

O modelo de cálculo de Energia Firme apresentado no capítulo 2, e reproduzido a seguir, é um problema de otimização linear.

Max F

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \quad (3.18a)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \quad (3.18b)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \quad (3.18c)$$

$$F - \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \leq 0 \quad (3.18d)$$

para  $t = 1, \dots, T$ ; para  $i = 1, \dots, N$

Para que ele seja um caso particular da demonstração feita na seção anterior, e como tal, atenda automaticamente às condições de jogos cooperativos, deve-se provar que a energia firme de qualquer sub-conjunto de usinas pode ser calculada através de um mesmo modelo de programação linear, apenas alterando o lado direito (“recursos”) das restrições.

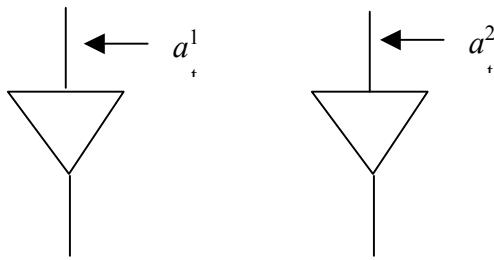
Note que esta condição não é claramente atendida no caso da energia firme, pois, tal como visto na equação (3.18a), há uma conexão entre as equações de balanço hídrico de usinas em cascata<sup>16</sup>. Caso uma usina não pertença a uma dada coalizão, e os lados direitos de todas suas restrições se igualem a zero, a água correspondente à sua vazão incremental (lado direito de uma das restrições), que deveria chegar à usina imediatamente a jusante, não estaria sendo contabilizada, o que caracterizaria um erro.

Esta limitação pode ser resolvida se considerarmos como recursos de cada usina somente suas capacidades de turbinamento  $\bar{u}$  e de armazenamento  $\bar{v}$ . Se uma usina não faz parte de uma dada coalizão, estas capacidades (lados direitos de suas restrições de volume máximo e turbinamento máximo) são zeradas. Neste caso, a água que chega a montante seria totalmente vertida e seria a mesma coisa que a usina não existisse.

<sup>16</sup> O vertimento e o turbinamento de uma usina são somados às vazões incrementais da usina imediatamente a jusante.

Entretanto, há um detalhe importante na demonstração de que a condição de superaditividade, apresentada na seção 3.2.1, está atendida: todos os recursos no lado direito das restrições estarão sendo alocados a cada um dos participantes – ver vetores  $b_1$  e  $b_2$  no problema (3.13). Observando o problema de cálculo de firme (3.18), não há dúvida em alocar os limites de armazenamento e turbinamento  $\bar{v}_i$  e  $\bar{u}_i$  aos respectivos agentes. O problema surge com as vazões afluentes incrementais  $a_{t,i}$ , que são os recursos no lado direito da equação de balanço (3.18a). Este problema já havia sido detectado em [74].

Uma primeira idéia seria alocar as vazões afluentes a cada usina como seu recurso próprio. Se as usinas estão em paralelo, como na Figura 3.2 abaixo, esta alocação estaria correta, pois o firme da usina #2 não é afetado pelas afluências à usina #1, e vice-versa<sup>17</sup>.

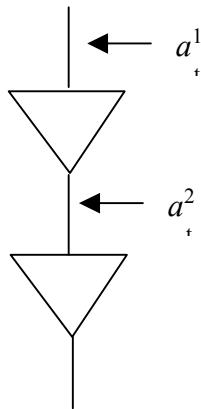


**Figura 3.2 – Usinas em paralelo**

Suponha agora que as usinas estão em série, como na Figura 3.3 abaixo, e que as vazões *incrementais* a cada usina são alocadas separadamente em cada vetor de recursos.

---

<sup>17</sup> Naturalmente, tanto as afluências da usina #1 como as da usina #2 afetam o firme *conjunto 1&2*, que é justamente o efeito da sinergia.



**Figura 3.3 – Usinas em série**

A primeira idéia seria alocar as vazões *incrementais* a cada usina nos respectivos vetores de recursos. Observe, entretanto, que o firme da usina #2 (a jusante), não estaria correto. A razão é que, se a usina #1 não existisse, a usina #2 receberia a vazão *total* afluente,  $a^1_t + a^2_t$ , e não somente a vazão incremental.

Será mostrado a seguir que o modelo de energia firme pode ser reescrito de forma a representar todas as usinas em série como usinas em paralelo. Isto permite definir os recursos de vazão alocados a cada usina de maneira mais coerente.

### 3.2.3.

#### Reformulação do problema de energia firme

O procedimento de transformação série-paralelo será ilustrado para um sistema com duas usinas. Novamente, a extensão para uma topologia geral é imediata.

As equações de balanço hídrico de duas usinas em série são:

$$v_{t+1}^1 = v_t^1 + a_t^1 - u_t^1 - w_t^1 \quad (3.19)$$

$$v_{t+1}^2 = v_t^2 + a_t^2 - u_t^2 - w_t^2 + u_t^1 + w_t^1 \quad (3.20)$$

Somando as equações (3.19) e (3.20), obtém-se:

$$v_{t+1}^{12} = v_t^{12} + a_t^{12} - u_t^2 - w_t^2 \quad (3.21)$$

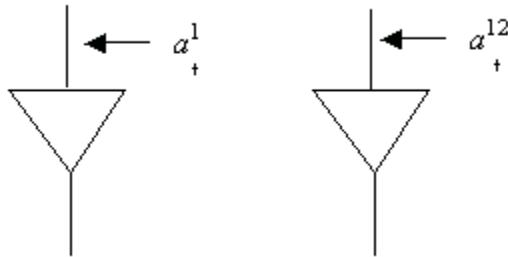
onde:

$v_{t}^{12}$  representa a soma dos armazenamentos das usinas #1 e #2.

$a_{t}^{12}$  afluência natural (soma das incrementais) à usina

As equações (3.19) e (3.21) correspondem à mesma região viável que as equações originais (3.19) e (3.20). A diferença é que a equação de balanço (3.21) não inclui as variáveis de defluência a montante,  $u_{t}^1$  e  $w_{t}^1$  (estas variáveis foram canceladas na soma).

Como mostra a Figura 3.4, é como se as usinas estivessem em paralelo, cada uma recebendo a montante uma quantidade de água igual à sua vazão natural.



**Figura 3.4 - Nova representação das usinas em série**

Por sua vez, os limites de armazenamento são reescritos como:

$$v_{1,t+1} \leq \bar{v}_1 \quad (3.22)$$

$$v_{12,t+1} - v_{1,t+1} \leq \bar{v}_2 \quad (3.23)$$

Os limites de defluência permanecem iguais:

$$u_{1,t} \leq \bar{u}_1 \quad (3.24)$$

$$u_{2,t} \leq \bar{u}_2 \quad (3.25)$$

Portanto, o cálculo da energia firme passa a ser formulado como:

Max F

Var. Duais

sujeito a

$$v_{t+1}^1 - v_t^1 - u_t^1 - w_t^1 = a_t^1 \quad \pi_{a1,t} \quad (3.26a)$$

$$v_{t+1}^{12} - v_t^{12} - u_t^2 - w_t^2 = a_t^{12} \quad \pi_{a12,t} \quad (3.26b)$$

$$v_{t+1}^1 \leq \bar{v}_1 \quad \pi_{v1,t} \quad (3.26c)$$

$$v_{t+1}^{12} - v_{t+1}^1 \leq \bar{v}_2 \quad \pi_{v2,t} \quad (3.26d)$$

$$u_t^1 \leq \bar{u}_1 \quad \pi_{u1,t} \quad (3.26e)$$

$$u_t^2 \leq \bar{u}_2 \quad \pi_{u2,t} \quad (3.26f)$$

$$F - \rho_1 u_t^1 - \rho_2 u_t^2 \leq 0 \quad \pi_F \quad (3.26g)$$

O modelo (3.26), que fornece o mesmo “firme” do primeiro modelo apresentado no capítulo 2, mostra a separação dos recursos nos vetores  $b_1$  e  $b_2$ .

O procedimento descrito acima tem alguma relação com o conceito de “Mercado Atacadista de Água”, desenvolvido em [26][27]. A idéia básica do MAA é que cada usina da cascata tem “direito” a utilizar a vazão natural afluente, e deve ser compensada por alterações neste volume afluente causadas por ações de reservatórios a montante; simetricamente, a usina deve compensar as unidades a jusante pelo efeito de seu próprio reservatório.

Neste capítulo foi provado que o cálculo da energia firme atende às condições dos jogos cooperativos, ou seja, a energia firme resultante de uma operação integrada das usinas, onde todas cooperam entre si formando uma grande coalizão, é maior que a produção firme onde cada uma maximiza isoladamente a sua produção.

O restante desta dissertação vai abordar o problema decorrente desta condição, que é como “repartir” estes benefícios de maneira justa e eficiente entre os N agentes que formam a grande coalizão.

**4****ALOCAÇÃO PELA GERAÇÃO MÉDIA NO PERÍODO CRÍTICO  
(GMPC)**

O primeiro método de alocação analisado nesta monografia é a alocação pela geração média no Período Crítico (GMPC). Este método foi a base do cálculo das energias firmes das usinas no sistema brasileiro, e, como o próprio nome diz, aloca a energia firme total do sistema entre os agentes em proporção à geração média de cada um durante o período crítico.

Conforme mencionado na seção 1.4.1, o esquema GMPC também foi a base para a repartição da energia assegurada para as usinas “existentes, os chamado certificados de energia assegurada. Esta alocação foi feita em proporção às contribuições de suas energias firmes para a energia firme total, e estas contribuições foram calculadas a partir da geração média de cada uma durante o período crítico, conforme explicado em [80] e no Anexo B.

**4.1.****Descrição do Método**

A idéia básica deste critério é que somente a geração da usina durante o período crítico tem algum valor econômico. A razão é que uma redução incremental da produção de qualquer usina neste período leva a racionamento; fora do período crítico, a redução incremental de produção de uma usina pode ser compensada pelo aumento de produção de outra, sem prejuízo para a confiabilidade de atendimento.

Como visto na seção 2.4, quando a solução ótima do modelo 3.6 é obtida as restrições (2.13d) estarão ativas, ou seja, sendo atendidas por uma igualdade para todas as etapas correspondentes ao período crítico. Portanto, neste período teremos:

$$F = \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \quad (4.1)$$

para  $i = 1, \dots, N$ ;

para toda etapa  $t \in PC$  (período crítico)

Essa igualdade diz que a geração física total em cada etapa do período crítico é igual à energia firme total calculada pelo modelo (2.13).

O GMPC consiste em alocar a cada usina uma parcela da energia firme total do sistema proporcionalmente à sua geração média durante o período crítico. Como para cada etapa a soma das gerações de todas as usinas se iguala à energia firme total do sistema, o mesmo valerá para a soma das médias das gerações de cada usina.

Portanto, para aplicar este método, basta alocar a cada usina a sua própria geração média durante o período crítico, pois isto faz com que automaticamente a soma das alocações seja igual à energia firme total do sistema.

A alocação para cada usina é então:

$$\phi(i) = \frac{\sum_{t \in PC} \rho_i u_{t,i}}{T_{PC}} \quad i = 1, \dots, I \quad (4.2)$$

onde  $T_{PC}$  é o número de etapas do período crítico.

Esta interpretação tem uma contra-partida econômica imediata: conforme observado em [23], o custo marginal de curto prazo é nulo nos intervalos fora do período crítico (pois um incremento de 1 Mwh na demanda em qualquer estágio fora do período crítico resultaria em diminuição de vertimento antes do início do período crítico) e igual ao custo de racionamento durante o período crítico (o incremento de 1 Mwh na demanda em qualquer estágio pertencente a este período resultaria num racionamento da mesma

quantidade num período posterior, pois a soma das afluências e armazenamento do reservatório nestas etapas cobrem exatamente a demanda firme). Este padrão de preços de curto prazo (zero fora do período crítico, e igual ao custo de racionamento no período crítico) se reproduz no caso em que o sistema possui mais de uma usina. Com isso, o *valor econômico* da produção (custo marginal de curto prazo vezes MWh produzido) de qualquer usina ao longo de todo o período está concentrado no período crítico, ou seja, o método GMPC pode ser interpretado como uma alocação baseada na remuneração da geração da usina no mercado “spot”.

## 4.2.

### Vantagens e Desvantagens do Método GMPC

A principal vantagem do esquema GMPC é ser intuitivo, pois valoriza a usina por sua contribuição em energia ao atendimento da energia firme global.

Entretanto, como será mostrado a seguir, o esquema GMPC é ineficiente em termos econômicos, pois favorece as usinas a jusante em detrimento das usinas a montante. Mostra-se também que o método não é justo (está fora do núcleo).

#### 4.2.1.

##### Eficiência Econômica

O método GMPC não é eficiente economicamente, pois não sinaliza corretamente o benefício adicional que o reservatório traz pela regularização das usinas a jusante. Um exemplo extremo seria um reservatório “puro”, sem geração. Este reservatório mesmo que contribua significativamente para o aumento da produção “firme” das usinas a jusante, não teria um crédito de energia firme.

Esta distorção existe mesmo quando todas as usinas têm capacidade de produção, e foi reconhecida há alguns anos pelos técnicos do setor. Ou seja, ela é geral, isto é, há uma transferência sistemática de energia firme das usinas a montante para as usinas a jusante, mesmo que todas as usinas tenham capacidade de geração.

Esta ineficiência econômica é abordada e discutida em detalhes em [23][26], onde mostra-se que o mecanismo de remuneração pelo preço “spot” só fornece sinais econômicos corretos quando as usinas hidroelétricas estão isoladas ou quando todas as usinas de uma mesma cascata pertencem a uma única empresa, além de mostrar que este é um efeito geral para usinas com reservatórios. Como a geração média no período crítico pode ser interpretada como uma remuneração da usina proporcional ao preço de curto prazo, estes trabalhos corroboram a existência desta ineficiência para este método de alocação de energia firme. Estes trabalhos propõem uma correção para esta ineficiência, através da criação de um mercado “spot” de água, ou mercado atacadista de água (MAA), que tem em relação à compra e venda deste recurso uma função análoga à do mercado “spot” de energia, e permite remunerar estes serviços de maneira a restabelecer a eficiência econômica.

#### **4.2.2.**

##### **Núcleo**

Além disso, mostra-se que o método GMPC não garante fornecer uma alocação que pertença ao núcleo, ou seja, que seja “justa”. Para provar esta proposição basta fornecer um contra-exemplo. Na seção 9.1 mais adiante, onde são apresentados os resultados da aplicação deste método, há dois contra-exemplos em que a alocação resultante não pertence ao núcleo. No caso 3, em particular, uma das usinas é um reservatório “puro”.

## 5

# ALOCAÇÃO A BENEFÍCIOS MARGINAIS (BM)

Uma vez que a Energia Firme total de um Sistema hidrelétrico é calculada através de um problema de programação linear, uma maneira clássica de alocá-la entre as usinas seria através dos benefícios marginais (BM) de seus recursos<sup>18</sup>. Portanto, o segundo método de alocação de benefícios a ser analisado será o Método de Alocação Marginalista, ou Alocação a Benefícios Marginais (BM).

### 5.1.

#### Descrição do Método

O método BM aloca a energia firme total do sistema proporcionalmente aos benefícios marginais dos recursos aportados pelas usinas para o cálculo do “firme” total. Como foi visto na seção 3.2.3, não é intuitivo atribuir vazões a uma determinada usina em um sistema em cascata. Por essa razão, usaremos a mesma transformação série-paralelo apresentada em (3.26), que fornece uma formulação em que cada usina tem como recurso da restrição de balanço hídrico a sua própria vazão natural.

Sabe-se, pelo Teorema Forte da Dualidade, que o valor ótimo da função objetivo do modelo para duas usinas (3.26) é igual ao valor ótimo da função objetivo de seu problema dual associado. A função objetivo do dual do modelo (3.26) é:

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_t \pi_{a1,t} a_{1,t} + \sum_t \pi_{v1,t} \bar{v}_1 + \sum_t \pi_{u1,t} \bar{u}_1 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_t \pi_{a12,t} a_{12,t} + \sum_t \pi_{v2,t} \bar{v}_2 + \sum_t \pi_{u2,t} \bar{u}_2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde os  $\pi$ 's são as variáveis duais associadas a cada restrição do modelo (3.26).

<sup>18</sup> A expressão usualmente utilizada na literatura é de alocação a custos marginais, mas no contexto deste trabalho estaremos utilizando o conceito de alocação a benefícios marginais. Essencialmente a idéia de ambos é análoga, ou seja, alocam o benefício total (ou custo total), proporcionalmente aos incrementos de benefício (ou decréscimos de custos), causados por variações marginais dos recursos de cada agente.

Vale notar que a variável dual  $\pi_F$ , associada à restrição de atendimento ao firme (3.26g), não aparece na fórmula porque o lado direito da sua restrição é zero.

O método BM aloca a cada usina a sua parcela da função objetivo do dual correspondente, ou seja, a soma das variáveis duais associadas a cada restrição multiplicadas pelos seus respectivos recursos (lado direito das restrições do problema primal).

A alocação para este caso com 2 usinas fica então:

$$\phi_1 = \sum_t \pi_{a1,t} a_{1,t} + \sum_t \pi_{v1,t} \bar{v}_1 + \sum_t \pi_{u1,t} \bar{u}_1 \quad (5.2a)$$

$$\phi_2 = \sum_t \pi_{a2,t} a_{12,t} + \sum_t \pi_{v2,t} \bar{v}_2 + \sum_t \pi_{u2,t} \bar{u}_2 \quad (5.2b)$$

A soma das alocações resultantes deste método é igual ao firme total do sistema. A prova de que ela é completa vem diretamente do Teorema Forte da Dualidade: esta alocação é apenas uma ponderação da função objetivo do dual, que por sua vez é igual ao valor ótimo do problema primal, e, portanto, igual ao “firme” total do sistema.

O método para mais de duas usinas seria feito de forma análoga através de uma formulação do tipo (3.26).

## 5.2.

### Alocação no Núcleo

Para provar que a alocação BM está no núcleo usaremos os mesmos procedimentos da seção 3.2 (que na ocasião provaram o atendimento à condição de superaditividade). Porém, desta vez, usaremos um caso com três usinas, ao invés de duas, já que também devemos mostrar que esta alocação atende às restrições do núcleo para todas as sub-coalizões do tipo (4.1e), (4.1f) e (4.1g). Novamente, a extensão para uma topologia geral é imediata.

Os modelos para o cálculo de Energia Firme de cada usina individualmente e das três usinas juntas podem ser simplificados da seguinte forma:

$$f(H_1) = \text{Max } cx$$

sujeito a (5.3a)

$$Ax \leq b_1$$

$$\begin{aligned} f(H_2) = & \text{ Max } cx \\ & \text{sujeito a } \end{aligned} \quad (5.3b)$$

$$Ax \leq b_2$$

$$\begin{aligned} f(H_3) = & \text{ Max } cx \\ & \text{sujeito a } \end{aligned} \quad (5.3c)$$

$$Ax \leq b_3$$

$$\begin{aligned} f(H_1, H_2, H_3) = & \text{ Max } cx \\ & \text{sujeito a } \end{aligned} \quad (5.3d)$$

$$Ax \leq b_1 + b_2 + b_3$$

Seus problemas duais correspondentes são:

$$\begin{aligned} f'(H_1) = & \text{ Min } \pi b_1 \\ & \text{sujeito a } \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\pi A \geq c$$

$$\begin{aligned} f'(H_2) = & \text{ Min } \pi b_2 \\ & \text{sujeito a } \end{aligned} \quad (5.4b)$$

$$\pi A \geq c$$

$$\begin{aligned} f'(H_3) = & \text{ Min } \pi b_3 \\ & \text{sujeito a } \end{aligned} \quad (5.4c)$$

$$\pi A \geq c$$

$$f(H_1, H_2, H_3) = \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3)$$

sujeito a (5.4d)

$$\pi A \geq c$$

Sejam  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  e  $\pi_{123}$  as soluções ótimas dos problemas (5.4a) a (5.4d), respectivamente. O método a Benefícios marginais aloca a cada usina o firme:

$$\phi_1 = \pi_{123} b_1 \quad (5.5a)$$

$$\phi_2 = \pi_{123} b_2 \quad (5.5b)$$

$$\phi_3 = \pi_{123} b_3 \quad (5.5c)$$

Provou-se na seção 4.2.1 que  $\pi_{123} b_1 \geq \pi_1 b_1$ ,  $\pi_{123} b_2 \geq \pi_2 b_2$ , e  $\pi_{123} b_3 \geq \pi_3 b_3$ . Portanto  $\phi_1 \geq f(H_1)$ ,  $\phi_2 \geq f(H_2)$  e  $\phi_3 \geq f(H_3)$ .

Nos resta provar que para qualquer sub-coalizão, a soma das alocações das usinas que nela participam é maior que a energia firme da sub-coalizão quando esta opera sozinha.

No caso de três usinas, isso equivale dizer que devemos ter:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2) \quad (5.6a)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3) \quad (5.6b)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \quad (5.6c)$$

O modelo de cálculo da energia firme da sub-coalizão das usinas 1 e 2, por exemplo, pode ser simplificado da seguinte forma:

$$f(H_1, H_2) = \text{Max} \quad cx$$

sujeito a (5.7)

$$Ax \leq b_1 + b_2$$

O modelo para uma coalizão composta por todas as três usinas, como já foi mencionado, também pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 f(H_1, H_2, H_3) = & \quad \text{Max} \quad cx \\
 & \text{sujeito a} \\
 & Ax \leq b_1 + b_2 + b_3
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Os problemas duais dos modelos (5.7) e (5.8) são:

$$\begin{aligned}
 f'(H_1, H_2) = & \quad \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2) \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
 f''(H_1, H_2, H_3) = & \quad \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3) \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Sejam  $\pi_{12}$  e  $\pi_{123}$  as soluções ótimas dos problemas (5.9) e (5.10).

Novamente o conjunto de restrições  $\pi A \geq c$  é o mesmo nos dois problemas duais, e a solução ótima de cada um é uma solução viável do outro. Em particular,  $\pi_{123}$ , é uma solução viável do problema (5.9). Como a função objetivo do problema dual é de minimização temos que:

$$\pi_{123}(b_1 + b_2) \geq \pi_{12}(b_1 + b_2) \tag{5.11}$$

O lado esquerdo da inequação (5.11) corresponde à soma das alocações das usinas 1 e 2 quando estas participam da grande coalizão, e o lado direito corresponde à energia firme da sub-coalizão das usinas quando esta opera sozinha. A inequação (5.11) corresponde a  $\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$ , que era o que desejávamos provar. Para todas as outras sub-coalizações possíveis a prova é análoga e imediata.

Provou-se, com isso, que a alocação BM pertence ao núcleo do jogo.

### 5.3.

#### Núcleo do Jogo Não Vazio

A partir da prova de que a alocação BM sempre pertence ao núcleo, e dado que é sempre possível usá-la como método de alocação, conclui-se que *o núcleo do jogo que envolve a alocação de energia firme nunca é vazio*.

### 5.4.

#### Vantagens e Desvantagens do Método

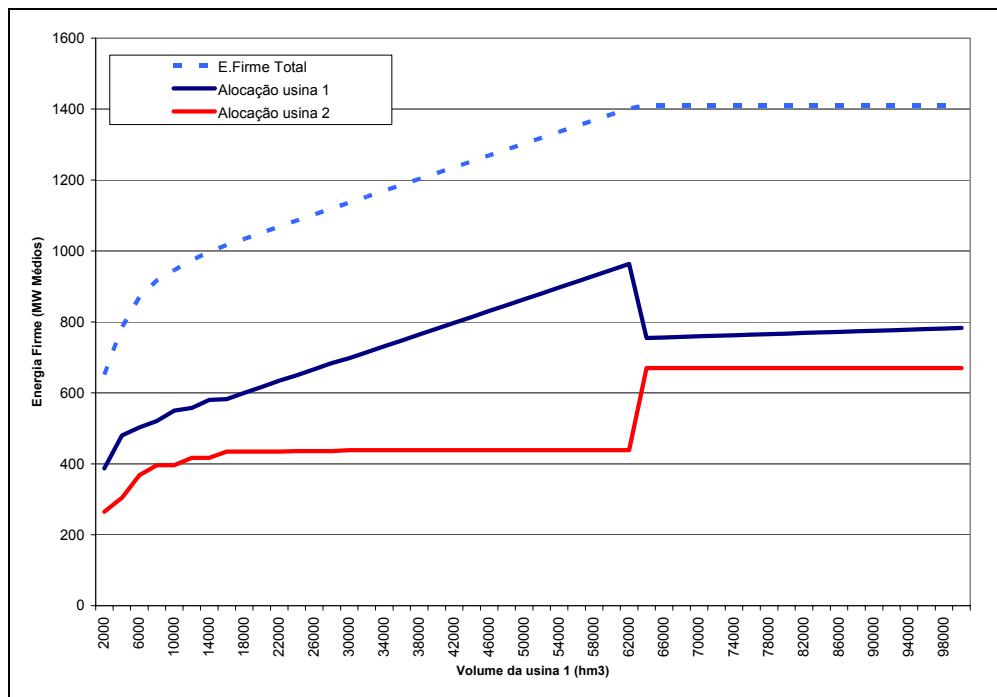
Embora a alocação BM pertença ao núcleo, e, portanto, seja “justa”, sua aplicação a sistemas em que os recursos aportados são discretos (como é o caso de usinas hidrelétricas) pode se tornar não satisfatória, uma vez que a alocação marginal é baseada em pequenas variações incrementais dos recursos.

Uma pequena variação na quantidade dos recursos aportados por cada agente (por ex. capacidade de armazenamento ou limite de turbinamento) pode levar a uma grande variação na energia firme alocada a ele, e em um caso de um aporte de “excesso” dos recursos, a sua alocação pode ser até reduzida.

Suponha, por exemplo, que uma usina aumente sua capacidade de armazenamento até um pouco antes de ter “excesso” desse recurso. Neste ponto, como a sua variável dual associada à restrição de volume máximo será maior que zero, ela receberá benefício pelo método BM. Porém, se o reservatório aumentar um pouco mais, esta variável dual passará a valer zero e fará com que a usina perca benefício, já que este “recurso” ficará em excesso. Com isso pode-se concluir que este método não é robusto em relação a pequenas variações dos recursos das usinas.

A Figura 5.1 a seguir ilustra, para um sistema com duas usinas, o efeito da não-robustez do método BM. O gráfico mostra a evolução das alocações BM das duas usinas, a medida que se aumenta o reservatório da usina 1 (eixo das abscissas). Quando o reservatório atinge um certo tamanho, e passa a estar em excesso, sua variável dual associada à restrição de volume máximo cai para zero, o que faz com que sua alocação pelo BM apresente um degrau (como mostra a Figura 5.1). Quando isso ocorre, o

aumento deste recurso passa a não ser mais capaz de aumentar a energia firme total do sistema, que a partir daí se mantém constante.



**Figura 5.1 – Exemplo do efeito do aumento do reservatório no método BM**

Por estas razões apresentadas, a alocação BM, apesar de estar no núcleo do jogo, não pode ser considerada adequada para alocar a energia firme de um sistema hidrelétrico.

**6****ALOCAÇÃO POR ÚLTIMA ADIÇÃO (UA)**

As desvantagens do método BM apresentadas no capítulo 5 sugerem que a alocação dos benefícios seja feita proporcionalmente ao prejuízo causado pela saída de cada participante da grande coalizão. Neste método, o benefício alocado a cada participante da grande coalizão é calculado através da diferença entre o benefício total da grande coalizão e o benefício total da grande coalizão sem o participante. Note que neste caso é como se a usina fosse sempre a última a entrar, daí o nome Última Adição (UA).

**6.1.****Descrição do Método**

O prejuízo para a energia firme de um sistema hidrelétrico causado pela saída de cada uma das usinas pode ser calculado por:

$$\Delta f(i) = f(S) - f(S - i) \quad (6.1)$$

$i = 1, \dots, N$

onde:

$i$  Indexa as usinas ( $N$  - número de usinas)

$\Delta f(i)$  prejuízo decorrente da saída da usina  $i$  do sistema

$f(S)$  Energia Firme total do Sistema

$f(S - i)$  Energia Firme do sistema sem usina  $i$

A alocação UA sugere então que Energia Firme alocada a cada usina seja:

$$\phi(i) = \left( \Delta f(i) / \sum_{j=1}^N \Delta(j) \right) f(S) \quad (6.2)$$

$i = 1, \dots, N$

## 6.2.

### Vantagens e Desvantagens do Método

O critério de “última adição” evita a distorção que existe no método de alocação pela geração média durante o período crítico entre os benefícios alocados às usinas com e sem reservatório. Mostrou-se que as usinas com reservatório são sistematicamente prejudicadas pela alocação GMPC, pois não “recebem” benefício por regularem as vazões das usinas a jusante.

O método UA, ao simular a retirada da usina, leva em consideração tanto o efeito da capacidade de produção, como o da regularização dos reservatórios, e por isso é considerado economicamente eficiente.

Note que esta alocação pode ser vista como uma versão discretizada da metodologia marginalista, pois os benefícios marginais correspondem ao benefício para o sistema causado por uma variação marginal nos “recursos” de cada usina. Portanto estes tipos de alocações tendem a se igualar quando os “recursos” dos agentes são pequenos em relação aos “recursos” disponíveis no sistema como um todo.

A primeira desvantagem constatada neste método é a de que nem sempre fornece uma alocação no núcleo do jogo, ou seja, nem sempre aloca a energia firme de forma “justa”. Isso será mostrado através de um exemplo:

Suponha que três usinas e suas respectivas sub-coalizões possuam as seguintes energias firmes<sup>19</sup>:

$$f(H_1) = 10$$

$$f(H_2) = 15$$

$$f(H_3) = 45$$

$$f(H_1, H_2) = 40$$

$$f(H_1, H_3) = 60$$

<sup>19</sup> As unidades das energias firmes (MW médios) são subtendidas e serão suprimidas dos valores apresentados.

$$f(H_2, H_3) = 65$$

$$f(H_1, H_2, H_3) = 100$$

Aplicando o método da última adição temos:

$$\Delta f(H_1) = 100 - 65 = 35$$

$$\Delta f(H_2) = 100 - 60 = 40$$

$$\Delta f(H_3) = 100 - 40 = 60$$

que resulta em uma alocação:

$$\phi_1 = 35 * [100 / (35 + 40 + 60)] = 25,93$$

$$\phi_2 = 40 * [100 / (35 + 40 + 60)] = 29,63$$

$$\phi_3 = 60 * [100 / (35 + 40 + 60)] = 44,44$$

O valor alocado à usina 3 por este método é 44,44 MW médios, que é um valor menor que sua energia firme individual  $f(H_3)$ , que é 45 MW médios. Portanto, o método viola a restrição do núcleo  $\phi_3 \geq f(H_3)$ .

Note que se a soma dos  $\Delta f$ 's for maior ou igual ao firme total, no caso  $f(H_1, H_2, H_3)$ , o método por última adição garante que algumas restrições do núcleo são atendidas, porque se isso ocorrer as seguintes inequações sendo satisfeitas:

$$\phi_1 \leq \Delta f(H_1) \tag{6.3}$$

$$\phi_1 \leq \Delta f(H_2) \tag{6.4}$$

$$\phi_1 \leq \Delta f(H_3) \tag{6.5}$$

Mas note que a inequação (6.3), por exemplo, equivale a:

$$\begin{aligned} \phi_1 &\leq \underline{f(H_1, H_2, H_3)} - f(H_2, H_3) \Rightarrow \phi_1 \leq \underline{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3} - f(H_2, H_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \end{aligned} \tag{6.6}$$

O mesmo vale para (6.4) e (6.5), que equivalem, respectivamente, a  $\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_3)$  e  $\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_2)$

Portanto, para um caso geral com  $N$  agentes, se a soma dos  $\Delta f$ 's for maior ou igual ao firme total, as restrições do núcleo associadas a todas as sub-coalizões com  $(N-1)$  agentes são atendidas. Porém, não se garante o atendimento de todas as outras restantes.

A soma dos  $\Delta f$ 's obtidos pelo método UA sempre será maior que o firme total do sistema, e, portanto, as restrições do núcleo citadas acima sempre serão atendidas. Para provar isso, suponha que a energia firme do sistema é formulada como o seguinte problema de programação linear:

$$F(b_1, \dots, b_m) = \text{Max } cx \quad (6.7)$$

s.a.

$$[A_i]x \leq b_i$$

para  $i = 1, \dots, m$

onde:

$c$  vetor n-dimensional de benefícios

$x$  vetor n-dimensional de variáveis de decisão

$[A_i]$  linhas da matriz A associadas à  $i$ -ésima usina

$b_i$   $i$ -ésimo subvetor de  $b$  correspondente à  $i$ -ésima usina.

De acordo com o critério de última adição, a energia alocada à usina  $i$  é:

$$\eta_i = F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_m) - F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \quad (6.8)$$

Temos que mostrar que :

$$\sum_i \eta_i \geq F(b_1, \dots, b_m) \quad (6.9)$$

ou que

$$m F(b_1, \dots, b_m) - \sum_i F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \geq F(b_1, \dots, b_m) \quad (6.10)$$

que é equivalente a:

$$(m-1) F(b_1, \dots, b_m) \geq \sum_i F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \quad (6.11)$$

Seja agora  $(\pi_1^0, \dots, \pi_m^0)$  a solução dual ótima de (6.7), então:

$$F(b_1, \dots, b_m) = \pi_1^0 b_1 + \dots + \pi_m^0 b_m \quad (6.12)$$

Considere para cada  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , o seguinte problema:

$$F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) = \text{Max } cx \quad (6.13)$$

s.a.

$$[A_j]x \leq h_j$$

para  $j = 1, \dots, m$

onde:

$$h_j = b_j, \text{ para } j \neq i \text{ e } h_i = 0.$$

Cujo dual para  $i = 1, \dots, m$  é respectivamente:

$$(D_i): \quad \text{Min} \sum_{i=1}^m \delta_i h_i \quad (6.14)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m \delta_i^t A_i \geq c$$

Como  $(\pi_1^0, \dots, \pi_m^0)$  é dual viável para (6.14) para qualquer  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , então:

$$\pi_1^0 h_1 + \dots + \pi_m^0 h_m \geq \delta_1^i h_1 + \dots + \delta_m^i h_m = F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \quad (6.15)$$

onde  $(\delta_1^i, \dots, \delta_m^i)$  é solução ótima de  $(D_i)$ :

ou,

$$\pi_1^0 b_1 + \dots + \pi_{i-1}^0 b_{i-1} + \pi_{i+1}^0 b_{i+1} + \dots + \pi_m^0 b_m \geq F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \quad (6.16)$$

por outro lado,

$$(m-1) F(b_1, \dots, b_m) = (m-1) \sum_i (\pi_1^0 b_1 + \dots + \pi_m^0 b_m) =$$

$$= \sum_i (\pi_1^0 b_1 + \dots + \pi_{i-1}^0 b_{i-1} + \pi_{i+1}^0 b_{i+1} + \dots + \pi_m^0 b_m) \quad (6.17)$$

então,

$$(m-1) F(b_1, \dots, b_m) \geq \sum_i F(b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \quad (6.18)$$

que implica que soma das energias alocadas de acordo com o critério de ultima adição nunca é inferior à energia total do sistema.

## 7

## ALOCAÇÃO PELO MÉTODO DO “NUCLEOLUS”

O quarto método abordado nesta monografia é o método do “nucleolus”[44]. Este método, diferentemente da alocação por Última Adição, garante que a alocação obtida pertence ao núcleo do jogo, se este não for vazio.

Provou-se na seção 5.3, que para o problema da energia firme, o núcleo do jogo nunca é vazio. Porém, dado que mais de uma alocação pode estar no núcleo, deve-se distinguir dentre elas qual a mais adequada. Este problema, que será discutido neste capítulo, é resolvido pelo método do “nucleolus”, que fornece uma solução que pertence ao núcleo e é única.

### 7.1.

#### Definição do “Nucleolus”

Como já foi mencionado, o conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de benefícios consideradas “justas”. Isto leva à questão se é possível identificar uma alocação que seja preferível.

Suponha, por exemplo, que foi escolhida uma alocação no núcleo  $\{\phi_1^p; \phi_2^p; \phi_3^p\}$ , através de algum critério. Suponha agora que um subconjunto de agentes, por exemplo, os agentes 1 e 3, propõem uma alocação alternativa  $\{\phi_1^q; \phi_2^q; \phi_3^q\}$ , também núcleo, mas que leva a uma maior alocação para este conjunto, isto é:

$$\phi_1^q + \phi_3^q > \phi_1^p + \phi_3^p \quad (7.1)$$

Esta nova alocação proposta *diminui* a alocação total do outro agente, no caso, o agente 2:

$$\phi_2^q < \phi_2^p \quad (7.2)$$

Neste caso, o agente 2 vai preferir a alocação original, e não concorda com a proposta do subconjunto {1, 3}.

O método do “nucleolus” resolve este tipo de problema fornecendo uma alocação através da maximização lexicográfica (conforme explicado a diante) da menor “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer ao “consórcio”, comparado com o que o mesmo subconjunto receberia fora do consórcio. Este método, além de forçar que a alocação esteja no núcleo, faz com que a alocação obtida seja única [44].

Existe uma relação interessante entre o método de "nucleolus" e a Teoria de Justiça proposta pelo jurista John Rawls [72]. O conceito de Rawls é que a maneira mais justa de construir uma sociedade é solicitar a seus participantes que formulem livremente suas propostas de organização social. Entretanto, o *papel* que cada participante terá nesta sociedade será *sorteado aleatoriamente*. Com isto, todos os participantes convergem para uma sociedade que minimiza a máxima desvantagem, isto é, que proteja o menos favorecido o máximo possível. Este critério é muito parecido com o nucleolus, e tem atraído o interesse de economistas como Kenneth Arrow (prêmio Nobel)[85] e H.P. Young[44], que trabalham em temas ligados à equidade e critérios de votação.

## 7.2.

### **Descrição do Método do “Nucleolus”**

O método do “Nucleolus” é calculado com a resolução de uma seqüência de subproblemas de programação linear. O primeiro problema a ser resolvido é mostrado abaixo para um caso com dois agentes, onde  $\delta$  e os  $\phi$ 's são variáveis, e os  $f(.)$ 's são constantes:

Max  $\delta$

sujeito a

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3)$$

$$\delta \leq \phi_1 - f(H_1)$$

$$\delta \leq \phi_2 - f(H_2)$$

$$\delta \leq \phi_3 - f(H_3) \quad (7.3)$$

$$\delta \leq \phi_1 + \phi_2 - f(H_1, H_2)$$

$$\delta \leq \phi_1 + \phi_3 - f(H_1, H_3)$$

$$\delta \leq \phi_2 + \phi_3 - f(H_2, H_3)$$

$$\delta \geq 0$$

Observa-se que os lados direitos das desigualdades representam a “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer ao “consórcio”, comparado com o que mesmo o subconjunto receberia fora do consórcio. Por exemplo, a diferença  $\phi_1 + \phi_3 - f(H_1, H_3)$  representa o adicional de firme alocado ao subconjunto  $\{H_1, H_3\}$  com relação ao firme que o mesmo teria se estivesse isolado,  $f(H_1, H_3)$ .

O escalar  $\delta$  no problema representa, portanto, a maximização da menor vantagem. A restrição  $\delta \geq 0$  garante que a “vantagem” seja não-negativa para qualquer subconjunto, o que corresponde a pertencer ao núcleo do jogo.

Note que se o procedimento fosse apenas resolver este primeiro problema, ainda assim poderia haver duas alocações diferentes e ambas com as menores “vantagens” iguais. Portanto, para que a alocação do método seja única, deve haver um critério para decidir qual das duas escolher. Isto é feito através da maximização lexicográfica das “vantagens” [44].

Esta maximização é feita da seguinte forma: suponha que todas as “vantagens” de cada coalizão são ordenadas, do menor pro maior, em um vetor  $\theta(x)$  de dimensão  $(2^n - 2)$ . O “Nucleolus” é a alocação  $x$  que maximiza  $\theta(x)$  lexicograficamente caso a seguinte

expressão seja satisfeita: se  $y$  é qualquer outra alocação e  $k$  é o primeiro índice tal que  $\theta_k(x) \neq \theta_k(y)$ , então  $\theta_k(x) > \theta_k(y)$  [77].

Outra forma de se entender a ordem lexicográfica entre alocações é fazer analogia com a ordenação das palavras em um dicionário. Esta ordem se baseia na ordenação das menores “vantagens”, da mesma forma que a ordem das palavras em um dicionário se baseia na ordenação das letras no alfabeto. Para comparar duas alocações  $x$  e  $y$ , por exemplo, procura-se a primeira posição, digamos  $k$ , em que as duas alocações diferem. Se  $\theta_k(x) > \theta_k(y)$ , então  $x$  é lexicograficamente maior que  $y$ .

Quando se resolve o primeiro problema (7.3), acha-se uma alocação cuja menor “vantagem” de todas é maximizada. Porém, o vetor ordenado de todas as “vantagens” ainda pode não estar maximizado lexicograficamente.

O próximo problema a ser resolvido é o mesmo (7.3), só que agora se fixa a restrição, ou o conjunto de restrições, que tenham atingido a igualdade no último problema resolvido<sup>20</sup>, ou seja, troca-se o “ $<$ ” por “ $=$ ” e troca-se a variável delta pelo valor obtido para ela no problema anterior. O método pára quando se chega em uma solução única, ou seja, quando o numero de restrições atendidas por igualdade for igual ao numero de variáveis. A alocação obtida dessa forma, chamada de “nucleolus”, sempre existe, é única e pertence ao núcleo do jogo, quando este não é vazio [44].

### 7.3.

#### **Definição do “Nucleolus” Proporcional**

Uma crítica feita ao “nucleolus” é fato de que a “vantagem” de cada subconjunto é calculada em termos absolutos, o que pode não ser adequado quando os benefícios têm tamanhos muito diferentes. Por exemplo, suponha a seguinte situação de alocação de energia firme:

$$\Delta(H_1, H_2) = \begin{array}{cccc} 2200 & -2000 & = & 200 \end{array}$$

$$\phi_1 + \phi_2 \quad f(H_1, H_2)$$

<sup>20</sup> Neste caso elas são as restrições das coalizões que apresentam a menor “vantagem”.

$$\begin{array}{rcccl} \Delta(H_3) = & 22 & -10 = & 12 \\ & \phi_3 & f(H_3) & \end{array}$$

A vantagem do primeiro subconjunto é 200 MW médios e, portanto, superior em termos absolutos à vantagem do segundo, de “apenas” 12 MW.

Entretanto, em termos *relativos*, a situação se inverte: o primeiro subconjunto tem um ganho de  $200/2000 = 10\%$  em relação à situação fora do consórcio. Já o segundo subconjunto tem um ganho de  $12/10 = 120\%$  em relação à situação fora do consórcio.

O “nucleolus” *proporcional*, como o nome indica, é o ponto que maximiza lexicograficamente a mínima vantagem em termos *percentuais*, de tal forma que o primeiro problema a ser resolvido, novamente para um caso de 2 agentes, passa a ser:

$$\text{Max } \delta$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 &= f(H_1, H_2, H_3) \\ \delta &\leq [\phi_1 - f(H_1)]/f(H_1) \\ \delta &\leq [\phi_2 - f(H_2)]/f(H_2) \\ \delta &\leq [\phi_3 - f(H_3)]/f(H_3) \quad (7.4) \\ \delta &\leq [\phi_1 + \phi_2 - f(H_1, H_2)]/f(H_1, H_2) \\ \delta &\leq [\phi_1 + \phi_3 - f(H_1, H_3)]/f(H_1, H_3) \\ \delta &\leq [\phi_2 + \phi_3 - f(H_2, H_3)]/f(H_2, H_3) \\ \delta &\geq 0 \end{aligned}$$

O método do “nucleolus” proporcional, por comparar “vantagens” relativas, é intuitivamente mais adequado que o método do “nucleolus”.

## 7.4.

### Vantagens e desvantagens do método

A principal desvantagem, tanto do método do “nucleolus”, quanto do “nucleolus” proporcional, está na dificuldade de seu cálculo em situações realistas. O caráter combinatório das restrições, que crescem com  $2^N$  (onde N é o número de agentes<sup>21</sup>) faz com que para um sistema com 40 agentes, por exemplo, haja cerca de um trilhão de restrições.

Para alguns problemas, a solução do “nucleolus” pode ser encontrada sem necessariamente se fazer o acréscimo de todas as restrições do problema. Isso já foi verificado, por exemplo, para jogos de redes capacitadas, como foi mostrado em [78]. Entretanto, tal solução ainda não existe para o problema da energia firme.

A vantagem de ambos os métodos, como já foi mencionado, é o fato de sempre fornecerem alocações no núcleo do jogo.

---

<sup>21</sup> Observe que o número de restrições é a soma de todas as combinações de N: 1 a 1, 2 a 2 etc. até N a N.

**8****ALOCAÇÃO PELO MÉTODO AUMANN-SHAPLEY (AS)**

Neste capítulo será apresentado o quinto método de alocação estudado nesta monografia: o Método Aumann-Shapley (AS).

Este capítulo é dividido em três partes. A primeira apresenta o método de benefícios incrementais. Este método atribui a cada agente o benefício incremental gerado por sua entrada na coalizão. Mostra-se que este método sofre total influência da ordem de entrada dos agentes, uma vez em que é calculado a medida que os agentes vão entrando na grande coalizão.

Na segunda parte é introduzido o método de Shapley (ou valor de Shapley), que foi o método que deu origem ao método AS. O método de Shapley resolve o problema do efeito da ordem de entrada do agente alocando a cada um deles a média das alocações incrementais para todas as permutações possíveis na ordem de entrada. Mostra-se que este método pode se tornar computacionalmente inviável, visto o grande número de permutações possíveis da ordem de entrada dos agentes. Mostra-se também que este método não apresenta isonomia em relação aos tamanhos de agentes do mesmo tipo, o que faz com que os maiores sejam menos sensíveis à ordem de entrada, e por isso sejam beneficiados.

A terceira e última parte deste capítulo apresenta o método AS, que resolve os problemas citados acima. Demonstra-se também que este método, para o caso da energia firme, fornece uma alocação que pertence ao núcleo do jogo.

O anexo D é um capítulo auxiliar a este. Nele encontra-se um exemplo através do qual são apresentadas algumas características dos métodos abordados neste capítulo. Além disso, contém uma interpretação intuitiva para o desenvolvimento do método AS a partir do método de Shapley.

## 8.1.

### Método por Benefício Incremental

Este primeiro método aloca a cada usina a diferença entre os benefícios à medida que os agentes são adicionados sucessivamente ao sistema. Portanto aloca-se a cada agente a *diferença* entre o benefício do conjunto quando a usina entra, e benefício total anterior, sem ela no sistema.

Por exemplo, supondo uma ordem de entrada 1-2-3, o método por benefício incremental alocaria a cada agente:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \Delta_1 = f(1) \\ \phi_2 &= \Delta_2 = f(1,2) - f(1) \\ \phi_3 &= \Delta_3 = f(1,2,3) - f(1,2)\end{aligned}\tag{8.1}$$

A questão que surge imediatamente é o porquê da ordem 1-2-3, e não, por exemplo, 3-1-2, ou qualquer outra permutação. No caso da energia firme, por exemplo, o incremento de uma usina em geral é diferente quando ela entra nas últimas posições que quando entra nas primeiras. Portanto, todas as usinas sempre “brigariam” para estar nas posições da ordenação que mais lhe favorecessem.

O efeito da ordem de entrada está apresentado, através de um exemplo, na seção 15.1 do anexo D.

## 8.2.

### Método de Shapley

O esquema proposto por Shapley [79] resolve o problema do efeito da ordem de entrada dos agentes apresentado pelo método do benefício incremental. Este método aloca a cada agente a *média* das alocações incrementais para todas as permutações possíveis nas ordens de entrada. Em outras palavras, o benefício de cada agente no critério de Shapley seria calculado pela média dos incrementos quando o agente é o primeiro a entrar, o segundo, terceiro e assim por diante.

Este método pode ser considerado uma generalização do método por última adição, pois nele o incremento de energia firme é calculado, não somente com a usina entrando na última posição, mas sim em todas as posições possíveis.

O método de Shapley (ou valor de Shapley) pode ser interpretado com sendo o valor médio dos benefícios incrementais de inclusão do agente, levando em conta todas as sub-coalizões que não contêm este determinado agente, inclusive a sub-coalizão vazia. Supondo-se que a probabilidade de ocorrência de sub-coalizões de diversos tamanhos seja igual, a alocação de Shapley é definida formalmente através da seguinte expressão analítica:

$$\Phi_i = \sum_{\forall S \subseteq N | i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [F(S) - F(S - \{i\})], \quad i \in N \quad (8.5)$$

onde:

$I$  indexa as usinas

$N$  grande coalizão

$S$  sub-coalizão

$n$  número de elementos de  $N$

$s$  número de elementos de  $S$

$F(\cdot)$  função característica para cálculo da energia firme

O valor de Shapley leva a resultados plausíveis e é intuitivamente considerado “justo” pelos agentes, pois todos têm igual oportunidade de estar nas melhores e piores posições. Entretanto, como os benefícios incrementais de todas as permutações possíveis da ordem de entrada devem ser calculados, este método se torna computacionalmente inviável. O número total de permutações, para um caso com  $n$  agentes, é igual a  $n!$ . Para um caso de 40 agentes, por exemplo, há cerca  $10^{47}$  (ou  $40!$ ) permutações possíveis.

Outro problema constatado na alocação Shapley é a “não-isonomia” com relação ao tamanho de agentes, isto é, agentes maiores são menos sensíveis à ordem de entrada que

agentes menores, e por isso são beneficiados. Esta característica está exemplificada na seção 15.2 do anexo D.

### 8.3.

#### **Método Aumann-Shapley (AS)**

Foi mostrado que a primeira dificuldade para a aplicação do valor de Shapley a sistemas realistas é de cunho computacional, pois o número de permutações cresce muito rapidamente a medida que cresce o número de agentes. Além disto, foi observado que a alocação de benefícios “por unidade” para recursos de iguais características, mas de tamanhos diferentes, poderia ser desigual, devido ao problema da “não-isonomia” exemplificado na seção 15.2 do anexo D.

Um desenvolvimento posterior, chamado de alocação Aumann-Shapley[5], permitiu que se resolvessem estes problemas. O método surgiu da idéia de “dividir” os recursos de cada agente em vários segmentos, e aplicar o esquema de Shapley como se cada segmento fosse um agente individual. Por exemplo, para o caso da energia firme, se cada usina fosse dividida em dois segmentos, uma ordem de entrada poderia ser  $\{H_3(1), H_2(1), H_1(1), H_1(2), H_3(2), H_2(2)\}$ .

À primeira vista, as dificuldades computacionais seriam ainda maiores, pois o número de agentes e, portanto, de permutações aumentaria consideravelmente. Entretanto, como é mostrado na seção 15.3 do anexo D, o método AS permite que o problema tenha uma solução analítica se cada agente for dividido em partes infinitesimais.

##### 8.3.1.

#### **Formulação**

A alocação AS (resultante da solução analítica do problema mencionado na seção anterior) é obtida a partir do cálculo da seguinte integral para cada agente:

$$\phi_i = b_i \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_i} d\lambda \quad (8.10)$$

onde:

$\lambda$  é o parâmetro de integração;

$b_i$  é o vetor de recursos aportados pelo agente  $i$ .

$f(\cdot)$  é a função que calcula o benefício a ser repartido

Para mostrar que a alocação AS recupera o firme total suponha que há dois agentes, temos que:

$$\begin{aligned}\phi_1 + \phi_2 &= b_1 \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_1} d\lambda + b_2 \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_2} d\lambda \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_1} b_1 + \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_2} b_2 \right) d\lambda = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_1} b_1 + \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_2} b_2 \right) d\lambda = \\ &= f(b_1, b_2)\end{aligned}$$

Pela expressão (8.10) nota-se que as alocações AS correspondem à média dos benefícios marginais dos recursos quando eles crescem uniformemente de zero até seus valores correntes. Esta integral pode ser calculada numericamente discretizando a variável  $\lambda$  no intervalo  $[0, 1]$ .

### 8.3.2.

#### Implementação do método AS

A seção 8.3.2.1 a seguir mostra a implementação do método AS para um caso geral em que o benefício é calculado a partir da solução de um problema de programação linear. A implementação para o caso da energia firme é feita em seguida, na seção 8.3.2.2.

### 8.3.2.1.

#### Caso Geral

Suponha que para calcular o valor da integral (8.10) o parâmetro escalar  $\lambda$  é discretizado em  $K$  valores no intervalo  $[0,1]$ , indexados por  $k = 1, \dots, K$ . Para cada valor  $\lambda_k$ , tem-se o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} z(\lambda_k) = \text{Max } & cx && \text{var. dual.} \\ \text{sujeito a } & [A_i]x \leq b_i \lambda_k && \pi_{ik} \\ & \text{para } i = 1, \dots, I && \end{aligned} \tag{8.11}$$

onde:

$c$  vetor  $n$ -dimensional de benefícios (por exemplo, energia firme)

$x$  vetor  $n$ -dimensional de variáveis de decisão

$[A_i]$   $i$ -ésima linha da matriz  $A$  ( $m \times n$ )

$b_i$   $i$ -ésimo recurso

Se o número de discretizações  $K$  for grande suficiente, os valores das variáveis duals não variam de uma discretização para outra, ou seja,  $\pi_{ik} = \pi_{i(k-1)}$ . Neste caso temos:

$$\Delta z = z(\lambda_k) - z(\lambda_{k-1}) = \sum_{i=1}^I (\pi_{ik} b_i \lambda_k - \pi_{i(k-1)} b_i \lambda_{k-1}) = \sum_{i=1}^I \pi_{ik} \Delta b_{ik} = \sum_{i=1}^I \pi_{ik} b_i (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \tag{8.12}$$

Se para cada discretização, o valor  $\Delta z$  é ponderado entre as usinas, de forma que cada uma recebe  $\pi_{ik} \Delta b_{ik}$ , o benefício total atribuído a cada recurso  $b_i$  é, portanto:

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \pi_{ik} \Delta b_{ik} \quad \text{para } i = 1, \dots, I \tag{8.13}$$

### 8.3.2.2.

#### Cálculo da energia firme

No cálculo da energia firme, cada agente  $i$  dispõe de dois recursos: a capacidade de armazenamento  $\bar{v}_i$ , e a capacidade de turbinamento  $\bar{u}_i$ , os quais serão parametrizados na integral de Almann-Shapley. O cálculo de  $z(\lambda_k)$  é dado por:

$$z(\lambda_k) = \text{Max} \quad F \quad \text{var. dual} \quad (8.14a)$$

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \quad \pi_{atik} \quad (8.14b)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \times \lambda_k \quad \pi_{vtik} \quad (8.14c)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \times \lambda_k \quad \pi_{utik} \quad (8.14d)$$

$$F - \sum_{i=1}^I u_{t,i} \times \rho_i \leq 0 \quad \pi_{Ftk} \quad (8.14g)$$

para  $t = 1, \dots, T$ ; para  $i = 1, \dots, I$

Sabemos a que a função objetivo do dual do problema (8.14) é:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [(\pi_{atik} \times a_{t,i}) + (\pi_{vtik} \times \bar{v}_i \times \lambda_k) + (\pi_{utik} \times \bar{u}_i \times \lambda_k)] \quad (8.15)$$

Novamente, se o número total de discretizações  $K$  usado for grande suficiente, os valores das variáveis duais não variam de uma discretização para outra ( $\pi_{atik} \cong \pi_{ati(k-1)}$ ,  $\pi_{vtik} \cong \pi_{vti(k-1)}$ ,  $\pi_{utik} \cong \pi_{uti(k-1)}$ ), portanto temos que:

$$\sum_{i=1}^I (\pi_{atik} \times a_{t,i}) - \sum_{i=1}^I (\pi_{ati(k-1)} \times a_{t,i}) = 0, \text{ para todo } k, \text{ para todo } t \quad (8.16)$$

A alocação final de cada agente corresponde, portanto, a:

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T [(\pi_{vtik} \Delta \bar{v}_{ik}) + (\pi_{vtik} \Delta \bar{u}_{ik})] \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (8.17)$$

onde  $\Delta\bar{v}_{ik} = \bar{v}_i(\lambda_k - \lambda_{k-1})$  e  $\Delta\bar{u}_{ik} = \bar{u}_i(\lambda_k - \lambda_{k-1})$

Note através da equação (8.16) que as parcelas referentes ao “recurso”  $a_{t,i}$  (vazões incrementais) se cancelam, e, portanto, não é preciso arbitrar a quem pertence o recurso “água”, diferente do que ocorre no método BM.

## 8.4.

### Alocação no Núcleo

Embora, como comentado, o esquema de Aumann-Shapley seja intuitivamente “justo”, para muitos tipos de problemas é possível construir contra-exemplos onde a alocação resultante não atende às restrições do núcleo; em outras palavras, haveria neste caso um ou mais subconjuntos que estariam prejudicados por pertencer ao “consórcio” global.

Porém, especificamente para o problema de alocação de energia firme, é possível provar que a alocação de Aumann-Shapley está no núcleo.

Suponha que o modelo de cálculo de energia firme é formulado como o seguinte modelo de programação linear:

$$\text{Max } cx \quad (8.18)$$

s.a.

$$[A_i]x \leq b_i$$

para  $i = 1, \dots, m$

onde:

$c$  vetor n-dimensional de benefícios

$x$  vetor n-dimensional de variáveis de decisão

$[A_i]$  linhas da matriz  $A$  associadas à  $i$ -ésimo usina

$b_i$   $i$ -ésimo sub-vetor de  $b$  correspondente à  $i$ -ésima usina.

A energia firme associada a um subconjunto de  $\Omega$  de usinas, quando consideradas isoladamente, é:

$$\text{Max } cx \quad (8.19)$$

s.a.

$$[A_i]x \leq h_i$$

para  $i = 1, \dots, m$

onde:

$h_i = b_i$ , para  $i \in \Omega$  e  $h_i = 0$ , caso contrário.

A alocação de Aumann-Shapley é dada por:

$$\phi_i = \left( \int_0^1 \pi_i(t) dt \right) b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (8.20)$$

onde:

$\pi_i(t)$  sub-vetor de multiplicadores ótimo associado à usina  $i$  do problema:

$$\text{Max } cx \quad (8.21)$$

s.a.

$$[A_i]x \leq tb_i$$

para  $i = 1, \dots, m$ ,  $0 \leq t \leq 1$

Seja  $\delta_\Omega$  o vetor multiplicador ótimo associado ao problema (8.19). Então pela igualdade primal dual a energia firme associada ao subconjunto de usinas  $\Omega$  é

$$\sum_{i=1}^m \delta_{\Omega i} h_i = \sum_{i \in \Omega} \delta_{\Omega i} b_i \quad (8.22)$$

por definição de  $h_i$ .

Observe que  $\delta_\Omega$  é solução ótima de:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \delta_i h_i \quad (8.23)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m \delta_i^t A_i \geq c \quad (8.24)$$

Por outro lado, note que  $\{\pi_i(t), i = 1, \dots, m\}$  é dual viável de (8.19) (viável para o problema (8.23)), já que (8.19) e (8.21) somente diferem entre si pelo lado direito das restrições. Logo,

$$\sum_{i=1}^m \pi_i(t) h_i \geq \sum_{i=1}^m \delta_i h_i \quad (8.25)$$

ou,

$$\sum_{i \in \Omega} \pi_i(t) b_i \geq \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i \quad (8.26)$$

Integrando (8.26a) temos,

$$\sum_{i \in \Omega} \left( \int_0^1 \pi_i(t) dt \right) b_i \geq \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i \int_0^1 dt = \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i \quad (8.27)$$

ou,

$$\sum_{i \in \Omega} \phi_i \geq \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i = \text{energia firme associada ao subconjunto de usinas } \Omega \quad (8.28)$$

Portanto, a alocação de Aumann-Shapley associada ao subconjunto de usinas  $\Omega$  é maior ou igual à energia firme associada a elas usinas quando consideradas isoladamente. Provou-se com isso que esta alocação pertence ao núcleo do jogo.

## 8.5.

### Vantagens e Desvantagens do Método AS

O método de Aumann-Shapley mostra-se o mais adequado (entre os analisados) para alocação de energia firme de um sistema hidrelétrico: é viável computacionalmente, origina-se de uma metodologia intuitiva (valor de Shapley), não há preocupação com a alocação do recurso “água” entre as usinas (conforme mostrado na seção 8.3.2.2) e, como foi demonstrado, fornece uma alocação que pertence ao “núcleo” do jogo cooperativo, o que garante que a alocação obtida é “justa”.

Outra vantagem do método AS é a robustez em relação ao tamanho dos recursos. Pequenas variações do volume ou turbinamento máximos de uma usina nunca geram bruscas variações na alocação AS (o que ocorre no método BM). O fato de a alocação AS

ser média dos benefícios marginais dos recursos quando eles crescem uniformemente de zero até seus valores correntes, mesmo que uma usina tenha algum recurso em “excesso”, em grande parte das discretizações o método creditará benefício a ela. Este método também pode ser considerado economicamente eficiente na medida em que, além de creditar benefício pelos benefícios marginais do turbinamento, também considera os benefícios gerados pelos reservatórios das usinas.

**9****RESULTADOS DA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE ALOCAÇÃO**

Neste capítulo são apresentados os resultados da aplicação ao problema da alocação de energia firme dos distintos métodos de alocação de benefícios discutidos ao longo desta dissertação.

Na primeira parte são apresentadas aplicações de cinco métodos de alocação em três sistemas hidroelétricos fictícios, cada um com quatro usinas de diferentes características e localizadas em cascata<sup>22</sup>. O objetivo é mostrar, através de um exemplo didático e simples, como cada método aloca a energia firme entre os diferentes tipos de usina (usina com reservatório, fio d'água e reservatório “puro”).

Na segunda parte tratou-se da repartição da energia firme total do parque hidrelétrico brasileiro utilizando três métodos de alocação: Alocação pela geração média durante o período crítico (GMPC); Alocação por Última Adição (UA) e Alocação Aumann-Shapley (AS).

**9.1.****Resultados da aplicação a três sistemas-exemplo fictícios**

Foram aplicados os cinco métodos de alocação discutidos nesta monografia em três sistemas-exemplo fictícios: Alocação pela geração média durante o período crítico; Alocação a benefícios marginais (BM); Alocação pelo “Nucleolus” Proporcional; Alocação por Última Adição (UA) e Alocação pelo método de Aumann-Shapley (AS).

---

<sup>22</sup> O histórico de vazões utilizados foram obtidos dos dados de quatro usinas, também em cascata, do PMO de Janeiro de 2004 do ONS.

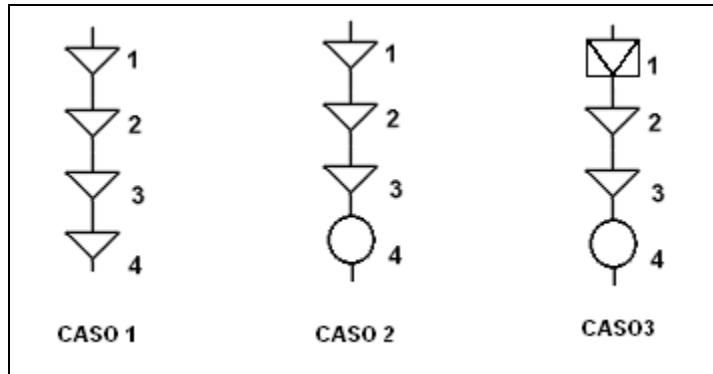
### 9.1.1.

#### Características dos Sistemas-exemplo

Os três sistemas-exemplo descritos na Tabela 9.1 têm sua topologias apresentadas na Figura 9.1.

|         | Caso 1                            |                        |                        | Caso 2                            |                        |                        | Caso 3                            |                        |                        |
|---------|-----------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|------------------------|
|         | Fator de Prod. média<br>(MW/m3/s) | Volume máximo<br>(hm3) | Turb. máximo<br>(m3/s) | Fator de Prod. média<br>(MW/m3/s) | Volume máximo<br>(hm3) | Turb. máximo<br>(m3/s) | Fator de Prod. média<br>(MW/m3/s) | Volume máximo<br>(hm3) | Turb. máximo<br>(m3/s) |
| Usina 1 | 0.8                               | 6000                   | 1500                   | 0.8                               | 20000                  | 2000                   | 0.8                               | 20000                  | 0                      |
| Usina 2 | 0.7                               | 5000                   | 1500                   | 0.7                               | 5000                   | 1500                   | 0.7                               | 5000                   | 1500                   |
| Usina 3 | 0.7                               | 5500                   | 1500                   | 0.7                               | 5000                   | 1500                   | 0.7                               | 5000                   | 1500                   |
| Usina 4 | 0.6                               | 5800                   | 1500                   | 0.6                               | 0                      | 1500                   | 0.6                               | 0                      | 1500                   |

**Tabela 9.1 - Sistemas-exemplo**



**Figura 9.1 – Topologia das cascatas dos sistemas-exemplo**

### 9.1.2.

#### Caso 1

O sistema hidroelétrico do Caso 1 apresenta uma energia firme total igual a 1649,7 MW médios, calculada com o modelo de otimização apresentado no capítulo 2. A Tabela 9.2 apresenta a alocação entre os agentes deste firme total, de acordo com a metodologia indicada.:

| <b>Geração média durante o Período Crítico (GMPC)</b> |                |                |                |
|---|----------------|----------------|----------------|
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 478,1   | 484,5          | 521,5          | 475,9          |
| 24,4%   | 24,7%          | 26,6%          | 24,3%          |
| <b>Alocação a Benefícios Marginais (BM)</b>           |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 565,4   | 501,0          | 489,4          | 404,3          |
| 28,8%   | 25,6%          | 25,0%          | 20,6%          |
| <b>“Nucleolus” Proporcional</b>                       |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 533,9   | 489,5          | 504,5          | 432,2          |
| 27,2%   | 25,0%          | 25,7%          | 22,1%          |
| <b>Última Adição (UA)</b>                             |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 528,5   | 489,6          | 502,7          | 439,3          |
| 27,0%   | 25,0%          | 25,6%          | 22,4%          |
| <b>Aumann-Shapley (AS)</b>                            |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 471,1   | 488,9          | 538,5          | 461,6          |
| 24,0%   | 24,9%          | 27,5%          | 23,5%          |

**Tabela 9.2 – Resultados dos quatro métodos de alocação aplicados ao CASO 1**

Neste primeiro caso as usinas têm características bastante semelhantes e por isso apresentam alocações de energia firme parecidas. As diferenças entre as alocações são de no máximo 4,8%. Em todos os cinco métodos a alocação obtida pertence ao núcleo do jogo.

### 9.1.3.

#### Caso 2

O sistema hidroelétrico do Caso 2 apresenta uma energia firme total igual a 2209,5 MW médios. A Tabela 9.3 apresenta os resultados da alocação dessa energia firme entre os agentes através da aplicação dos cinco métodos identificados:

| <b>Geração média durante o Período Crítico (GMPC)</b> |                |                |                |
|---|----------------|----------------|----------------|
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 559,1   | 555,3          | 587,5          | 507,4          |
| 25,3%   | 25,1%          | 26,6%          | 23,0%          |
| <b>Alocação a Benefícios Marginais (BM)</b>           |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 836,3   | 502,7          | 487,4          | 383,1          |
| 37,9%   | 22,8%          | 22,1%          | 17,3%          |
| <b>“Nucleolus” Proporcional</b>                       |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 799,3   | 499,7          | 509,1          | 401,5          |
| 36,2%   | 22,6%          | 23,0%          | 18,2%          |
| <b>Última Adição (UA)</b>                             |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 749,9   | 510,2          | 517,7          | 431,6          |
| 33,9%   | 23,1%          | 23,4%          | 19,5%          |
| <b>Aumann-Shapley (AS)</b>                            |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 704,6   | 523,0          | 536,7          | 445,1          |
| 31,9%   | 23,7%          | 24,3%          | 20,1%          |

**Tabela 9.3 - Resultados dos quatro métodos de alocação aplicados ao CASO 2**

Neste caso a usinas 1, 2 e 3 apresentam gerações médias no período crítico semelhantes e por isso a eles são atribuídas energias firmes parecidas no método GMPC. A usina que possui o reservatório de maior porte comparado com os demais, não recebe o benefício gerado com a regulação das vazões das usinas a jusante.

Por esta razão este método também não forneceu uma alocação no núcleo, pois viola a restrição  $\phi_1 \geq f(H_1)$ , uma vez que a usina 1 possui um firme isolado igual a 559,6 MW médios (maior que os 559,1 MW médios que ela recebeu neste primeiro método). É fácil observar que, neste caso, a usina 4, que é fio d'água, é beneficiada por ter suas vazões afluentes regularizadas pelos reservatórios a montante. Esta usina, por ter uma geração média durante o período crítico não muito menor que as outras, recebe uma energia firme também não muito menor que elas.

Nos outros quatro métodos a usina 1 tem uma alocação de energia firme maior, enquanto a usina 4 (fio d'água) recebe uma alocação menor. Estes quatro últimos métodos, por serem eficientes economicamente, beneficiam a usina 1 pelo fato de ela possuir um grande reservatório, que ajuda a regular as vazões das usinas a jusante, cooperando para um aumento da energia firme total do sistema.

### 9.1.4.

#### Caso 3

O sistema hidroelétrico do Caso 3 apresenta uma energia firme total igual a 1649,7 MW médios, calculada com o modelo de otimização apresentado no capítulo 2. A Tabela 9.4 apresenta os resultados da alocação desta energia firme entre os agentes através da aplicação dos cinco métodos de alocação identificados:

| <b>Geração média durante o Período Crítico (GMPC)</b> |                |                |                |
|---|----------------|----------------|----------------|
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 0,0   | 535,8          | 586,9          | 526,9          |
| 0,0%  | 32,5%          | 35,6%          | 31,9%          |
| <b>Alocação a Benefícios Marginais (BM)</b>           |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 276,6   | 502,7          | 487,4          | 383,1          |
| 16,8%   | 30,5%          | 29,5%          | 23,2%          |
| <b>“Nucleolus” Proporcional</b>                       |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 209,1   | 510,4          | 520,0          | 410,1          |
| 12,7%   | 30,9%          | 31,5%          | 24,9%          |
| <b>Última Adição (UA)</b>                             |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 260,9   | 485,5          | 492,7          | 410,7          |
| 15,8%   | 29,4%          | 29,9%          | 24,9%          |
| <b>Aumann-Shapley (AS)</b>                            |                |                |                |
| <i>Usina 1</i>  | <i>Usina 2</i> | <i>Usina 3</i> | <i>Usina 4</i> |
| 148,5   | 522,5          | 536,2          | 442,5          |
| 9,0%  | 31,7%          | 32,5%          | 26,8%          |

**Tabela 9.4 - Resultados dos quatro métodos de alocação aplicados ao CASO 3**

Neste caso a usina 1 tem apenas reservatório (sem potência instalada) e a usina 4 é fio d'água. Os resultados são parecidos com os do caso 2.

A usina 1, que não tem capacidade de geração, recebe um “firme” igual a zero no primeiro método (GMPC). Mais uma vez este método não a beneficiou por possuir um grande reservatório que regula as vazões das três usinas a jusante. A usina 4, a fio d'água, novamente é beneficiada por este método, e recebe um “firme” não muito menor que as usinas 2 e 3.

Nos outros quatro métodos a usina 1 tem uma alocação de energia firme maior que zero. Estes quatro últimos métodos, por serem eficientes economicamente, beneficiam a usina 1 pelo fato de ela possuir um grande reservatório, e que, apesar de não gerar energia fisicamente, coopera para um aumento da energia firme total do sistema ajudando a regular as vazões das usinas a jusante.

## 9.2.

### **Resultados: Sistema Interligado Brasileiro**

Três métodos de alocação descritos nesta dissertação foram aplicados na repartição da energia firme total do Parque Hidrelétrico Brasileiro. Foram eles: Alocação pela geração média durante o período crítico (GMPC); Alocação por Última Adição (UA) e Alocação Aumann-Shapley (AS).

Foram utilizados dados e a configuração do sistema hidrelétrico existente do Programa Mensal de Operação<sup>23</sup> do ONS (Operador Nacional do Sistema [75]) do mês de Janeiro de 2004 e seus históricos de vazões incrementais de 1932 a 2001. Este conjunto de dados é de domínio público e pode ser obtido na Internet através do website do Mercado Atacadista de Energia [76]

---

<sup>23</sup> A usina Quebra Queixo, que possui três máquinas, apresenta no Programa Mensal de Operação do ONS de Janeiro de 2004 apenas uma delas como existente, e por isso foi retirada da simulação. O restante do sistema hidrelétrico foi mantido inalterado.

### 9.2.1.

#### Energia Firme do Sistema Brasileiro

Utilizando o modelo descrito em (2.13) e os dados mencionados acima foi calculada a energia firme do sistema interligado brasileiro. O resultado obtido foi 39648,7 MW médios, com um período crítico que se estendeu de maio de 1952 até novembro de 1955.

Comparando esta energia firme total obtida com o montante total dos certificados de energia assegurada homologados pela ANEEL das respectivas usinas (apresentados no anexo E), obtivemos os seguintes resultados:

| Total dos Certificados de Energia Assegurada ANEEL(MW médios) | Energia Firme Total (MW médios) |
|---|---------------------------------|
| 40690,7   | 39648,7                         |

Ou seja, observa-se que a soma dos certificados de energia assegurada excede o montante de energia firme em cerca de 1000 MW médios. Esta tendência de sobre-estimação dos certificados de energia assegurada já havia sido identificada anteriormente em alguns relatórios[1][21]. O resultado obtido nesta dissertação apenas corrobora as conclusões dos estudos mencionados.

### 9.3.

#### Alocação da Energia Firme do Sistema Interligado Brasileiro

Uma vez tendo calculado a energia firme “total” do sistema interligado Brasileiro, o problema colocado é como alocar este total entre os agentes. Foram então implementados os métodos de alocação GMPC; UA e AS. Os resultados de cada método serão apresentados nesta seção.

### 9.3.1.

#### Resultados por usina

Os resultados obtidos nos três métodos de alocação aplicados podem ser vistos na Tabela 9.5 a seguir, onde também são mostrados, na última coluna, os respectivos certificados de energia assegurada (CEA) de cada usinas simulada. O conjunto de certificados corresponde à configuração do sistema existente em Janeiro de 2004 e os dados indicados no anexo E foram extraídos de resoluções da ANEEL ou dos contratos de concessão das hidrelétricas.

Na coluna *EA “ajustada”* foi feito um ajuste nos certificados de energia assegurada das usinas de forma que a soma se igualasse à energia firme total do sistema brasileiro, e mantendo as mesmas proporções em relação à soma dos certificados de energia assegurada do país. Este valor, que serve apenas para comparação qualitativa das alocações em cada usina, é obtido através da expressão [ (EA ANEEL) ÷ (Soma das EA ANEEL do Brasil)] \* (E.Firme total do Brasil ).

| <b>Usina</b> | <b>GMPC</b> | <b>UA</b> | <b>AS</b> | <b>EA ANEEL</b> | <b>EA ANEEL<br/>“ajustada”</b> | <b>Obs</b>   |
|--------------|-------------|-----------|-----------|-----------------|--------------------------------|--------------|
| A A LAYDNER  | 52.9        | 123.5     | 128.9     | 47.0            | 45.8                           |              |
| A S LIMA     | 51.7        | 45.6      | 43.9      | 66.0            | 64.3                           | fio d'água   |
| A S OLIVEIRA | 11.2        | 9.8       | 12.8      | 15.0            | 14.6                           | fio d'água   |
| A VERMELHA   | 640.9       | 641.2     | 725.4     | 746.0           | 726.9                          |              |
| BARRA BONITA | 39.8        | 88.3      | 91.9      | 45.0            | 43.8                           |              |
| BILLINGS     | 0.0         | 51.6      | 119.1     |                 |                                | reservatório |
| CACH DOURADA | 405.5       | 357.1     | 386.2     | 415.0           | 404.4                          | fio d'água   |
| CACONDE      | 27.2        | 38.7      | 46.4      | 33.0            | 32.2                           |              |
| CAMARGOS     | 17.3        | 46.9      | 40.2      | 21.0            | 20.5                           |              |
| CANA BRAVA   | 347.6       | 307.4     | 367.6     | 273.5           | 266.5                          | fio d'água   |
| CANOAS I     | 60.8        | 53.8      | 59.1      | 57.0            | 55.5                           | fio d'água   |
| CANOAS II    | 50.2        | 44.5      | 47.1      | 48.0            | 46.8                           | fio d'água   |
| CAPIVARA     | 340.7       | 370.7     | 319.3     | 330.0           | 321.5                          |              |
| CHAVANTES    | 186.9       | 219.3     | 208.3     | 172.0           | 167.6                          |              |
| CORUMBA I    | 178.0       | 184.4     | 199.2     | 209.0           | 203.6                          |              |
| E DA CUNHA   | 39.7        | 34.9      | 44.4      | 49.0            | 47.7                           | fio d'água   |
| EMBORCACAO   | 489.5       | 775.7     | 798.5     | 497.0           | 484.3                          |              |
| ESTREITO     | 444.2       | 392.5     | 559.0     | 495.0           | 482.3                          | fio d'água   |
| FONTES       | 59.8        | 52.9      | 58.3      | 104.0           | 101.3                          | fio d'água   |
| FUNIL        | 96.4        | 86.9      | 98.2      | 121.0           | 117.9                          |              |
| FUNIL-GRANDE | 74.0        | 65.4      | 82.1      | 89.0            | 86.7                           | fio d'água   |
| FURNAS       | 523.7       | 1082.8    | 1052.6    | 598.0           | 582.7                          |              |
| GUapore      | 60.5        | 53.6      | 61.7      | 60.2            | 58.7                           | fio d'água   |
| GUARAPIRANGA | 0.0         | 8.7       | 20.0      |                 |                                | reservatório |
| GUILMAN-AMOR | 67.3        | 59.5      | 70.1      | 65.9            | 64.2                           | fio d'água   |

| Usina        | GMPC   | UA     | AS     | EA ANEEL | EA ANEEL<br>“ajustada” | Obs          |
|--------------|--------|--------|--------|----------|------------------------|--------------|
| HENRY BORDEN | 125.6  | 112.6  | 136.0  | 147.0    | 143.2                  | fio d'água   |
| I SOLT EQV   | 1643.3 | 1556.5 | 2047.2 | 1949.0   | 1899.1                 |              |
| IBITINGA     | 60.2   | 53.1   | 51.1   | 74.0     | 72.1                   | fio d'água   |
| IGARAPAVA    | 124.3  | 109.8  | 118.9  | 136.0    | 132.5                  | fio d'água   |
| ILHA POMBOS  | 67.6   | 59.7   | 74.3   | 115.0    | 112.1                  | fio d'água   |
| ITAIPU       | 7249.9 | 6619.6 | 6831.7 | 8612.0   | 8391.5                 | fio d'água   |
| ITIQUIRA I   | 41.5   | 36.7   | 41.8   | 42.2     | 41.1                   | fio d'água   |
| ITIQUIRA II  | 63.4   | 56.0   | 64.2   | 65.1     | 63.4                   | fio d'água   |
| ITUMBIARA    | 899.5  | 1055.0 | 1213.6 | 1015.0   | 989.0                  |              |
| ITUTINGA     | 23.7   | 20.9   | 24.8   | 28.0     | 27.3                   | fio d'água   |
| JAGUARA      | 321.6  | 284.2  | 287.9  | 336.0    | 327.4                  | fio d'água   |
| JAGUARI      | 12.7   | 16.3   | 20.9   | 14.0     | 13.6                   |              |
| JAURU        | 61.7   | 54.6   | 60.8   | 66.0     | 64.3                   | fio d'água   |
| JUPIA        | 894.2  | 792.6  | 896.8  | 886.0    | 863.3                  | fio d'água   |
| L N GARCEZ   | 57.4   | 50.8   | 52.3   | 55.0     | 53.6                   | fio d'água   |
| LAJEADO      | 550.2  | 485.4  | 613.0  | 510.1    | 497.0                  | fio d'água   |
| LAJES        | 0.0    | 10.7   | 11.6   | 28.0     | 27.3                   | reservatório |
| M DE MORAES  | 245.5  | 301.1  | 282.7  | 295.0    | 287.4                  |              |
| MANSO        | 92.6   | 82.0   | 96.1   | 92.0     | 89.6                   |              |
| MARIMBONDO   | 576.5  | 602.5  | 747.5  | 726.0    | 707.4                  |              |
| MASCARENHAS  | 115.0  | 101.7  | 116.9  | 103.1    | 100.5                  | fio d'água   |
| MIRANDA      | 183.1  | 165.8  | 206.2  | 202.0    | 196.8                  |              |
| N PECANHA    | 379.2  | 335.7  | 379.5  | 335.0    | 326.4                  | fio d'água   |
| NAVANHANDAVA | 113.6  | 100.6  | 84.4   | 139.0    | 135.4                  | fio d'água   |
| NOVA PONTE   | 259.2  | 550.3  | 512.3  | 276.0    | 268.9                  |              |

| Usina        | GMPC   | UA     | AS     | EA ANEEL | EA ANEEL<br>“ajustada” | Obs          |
|--------------|--------|--------|--------|----------|------------------------|--------------|
| P COLOMBIA   | 187.7  | 165.8  | 199.6  | 185.0    | 180.3                  | fio d'água   |
| P ESTRELA    | 58.1   | 51.6   | 55.5   | 55.8     | 54.4                   |              |
| P PASSOS     | 67.5   | 59.7   | 62.4   | 51.0     | 49.7                   | fio d'água   |
| P PRIMAVERA  | 806.0  | 714.2  | 789.6  | 1017.0   | 991.0                  |              |
| PARAIBUNA    | 47.4   | 65.6   | 64.6   | 50.0     | 48.7                   |              |
| PIRAJU       | 43.9   | 38.9   | 33.8   | 42.5     | 41.4                   | fio d'água   |
| PROMISSAO    | 82.2   | 107.2  | 98.7   | 104.0    | 101.3                  |              |
| ROSAL        | 30.5   | 27.0   | 34.9   | 30.0     | 29.2                   | fio d'água   |
| ROSANA       | 187.7  | 167.0  | 100.6  | 177.0    | 172.5                  | fio d'água   |
| SA CARVALHO  | 58.8   | 52.0   | 60.4   | 58.0     | 56.5                   | fio d'água   |
| SALTO GRANDE | 85.8   | 75.8   | 88.8   | 75.0     | 73.1                   | fio d'água   |
| SANTA BRANCA | 26.8   | 25.8   | 25.0   | 32.0     | 31.2                   |              |
| SÃO SIMAO    | 1171.0 | 1112.8 | 1137.2 | 1281.0   | 1248.2                 |              |
| SERRA MESA   | 814.0  | 1195.7 | 1005.0 | 671.0    | 653.8                  |              |
| SOBRAGI      | 35.0   | 31.0   | 37.0   | 38.7     | 37.7                   | fio d'água   |
| STA CLARA MG | 26.4   | 23.4   | 33.8   | 28.1     | 27.4                   | fio d'água   |
| TAQUARUCU    | 218.5  | 194.4  | 123.6  | 201.0    | 195.9                  | fio d'água   |
| TRES MARIAS  | 211.4  | 517.6  | 368.2  | 239.0    | 232.9                  |              |
| VOLTA GRANDE | 208.8  | 184.5  | 197.1  | 229.0    | 223.1                  | fio d'água   |
| D FRANCISCA  | 118.1  | 104.5  | 94.4   | 78.0     | 76.0                   | fio d'água   |
| ERNESTINA    | 0.0    | 4.4    | 6.2    |          |                        | reservatório |
| G B MUNHOZ   | 735.3  | 862.9  | 701.4  | 576.0    | 561.3                  |              |
| G P SOUZA    | 108.7  | 96.2   | 96.8   | 109.0    | 106.2                  |              |
| ITA          | 897.1  | 795.1  | 381.9  | 720.0    | 701.6                  | fio d'água   |
| ITAUBA       | 268.4  | 237.4  | 120.3  | 190.0    | 185.1                  | fio d'água   |

| Usina               | GMPC           | UA             | AS             | EA ANEEL       | EA ANEEL<br>“ajustada” | Obs          |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------------|--------------|
| JACUI               | 186.5          | 164.4          | 159.0          | 123.0          | 119.9                  | fio d'água   |
| JORDAO              | 0.0            | 0.8            | 1.7            |                |                        | reservatório |
| MACHADINHO          | 649.5          | 625.6          | 373.8          | 529.0          | 515.5                  |              |
| PASSO FUNDO         | 175.7          | 155.1          | 147.2          | 119.0          | 116.0                  |              |
| PASSO REAL          | 90.2           | 174.4          | 138.2          | 68.0           | 66.3                   |              |
| SALTO CAXIAS        | 798.0          | 708.2          | 378.1          | 605.0          | 589.5                  | fio d'água   |
| SALTO OSORIO        | 686.7          | 609.5          | 319.6          | 522.0          | 508.6                  | fio d'água   |
| SEGREDO             | 876.2          | 783.4          | 474.9          | 603.0          | 587.6                  |              |
| SLT SANTIAGO        | 890.0          | 864.2          | 607.9          | 723.0          | 704.5                  |              |
| B ESPERANCA         | 127.3          | 112.8          | 129.1          | 143.0          | 139.3                  |              |
| COMP PAF-MOX        | 2334.7         | 2066.3         | 2317.6         | 2225.0         | 2168.0                 | fio d'água   |
| ITAPARICA           | 1008.4         | 950.9          | 972.9          | 959.0          | 934.4                  |              |
| ITAPEBI             | 175.6          | 155.2          | 221.4          | 196.5          | 191.5                  | fio d'água   |
| SOBRADINHO          | 505.0          | 1017.7         | 776.8          | 531.0          | 517.4                  |              |
| XINGO               | 2485.2         | 2199.4         | 2355.3         | 2139.0         | 2084.2                 | fio d'água   |
| CURUA-UNA           | 23.2           | 20.5           | 23.2           | 24.0           | 23.4                   |              |
| TUCURUI             | 3713.9         | 3320.2         | 3722.7         | 4140.0         | 4034.0                 |              |
| <b>TOTAL Brasil</b> | <b>39648.7</b> | <b>39648.7</b> | <b>39648.7</b> | <b>40690.7</b> | <b>39648.7</b>         |              |

**Tabela 9.5 - Resultados dos métodos GMPC, UA, AS aplicados ao sistema hidrelétrico brasileiro e seus respectivos Certificados de Energia Assegurada**

Em uma primeira análise, os resultados mostram uma clara diferença existente entre os métodos aplicados. Como visto ao longo dessa dissertação, há *critérios* para verificar se uma dada metodologia de repartição apresenta algum aspecto inadequado, e um destes critérios é o de “justiça”. Conforme visto em capítulos anteriores, os critérios de alocação GMPC e UA nem sempre pertencem ao núcleo do jogo e, portanto, não

caracterizam uma alocação “justa”. Isto já não ocorre, por exemplo, com o critério de alocação AS, cuja alocação foi demonstrada pertencer ao núcleo.

De uma forma geral, as usinas reservatório “puro”, que pelo método GMPC não recebem benefício algum, nos métodos AS e UA passam a receber. As usinas a fio-d’água, que geram energia durante o período crítico, são favorecidas pelo método GMPC, em detrimento das usinas que possuem reservatório e estão localizadas mais a montante das cataratas.

Na próxima seção os resultados obtidos serão analisados por bacia hidrográfica, permitindo que se identifique com mais clareza os aspectos adequados e inadequados do critério de alocação atual em relação aos demais propostos nesta dissertação.

#### **9.4.**

#### **Resultados por cascata**

Os resultados da alocação de energia firme de usinas para um mesmo rio (localizadas em cascata) foram analisados para as hidrelétricas do rio Iguaçu, rio Tocantins e rio São Francisco.

Em seguida, realizou-se uma análise focando exclusivamente a usina de Itaipu. Devido ao fato de Itaipu estar localizada ao final de uma cascata com muitas usinas, para efeito de análise de resultados foi feita uma agregação das diversas usinas localizadas a montante. A avaliação compara a energia firme atribuída à Itaipu com aquela alocada à agregação das usinas de cada rio afluente e das demais usinas do rio Paraná.

A comparação dos três métodos aplicados foi feita através das diferenças entre as porcentagens de energia firme alocada da usina em relação à soma das alocações de todas as usinas do rio e da porcentagem de seu respectivo certificado de energia assegurada em relação à soma dos certificados de todas as usinas do rio.

Por exemplo, suponha que a análise seja feita para uma cascata com 4 usinas e que o firme total seja 40 MW médios. Supondo que uma das usinas no primeiro método recebe 10 MW, que representa **25%** do total, no segundo recebe 15 MW médios, que representa **37,5%** do total, e no terceiro 18 MW médios, que representa **45%** do total.

Suponha também que seu certificado de energia assegurada seja 15MW médios, o que corresponde a 30% do total de energia assegurada das 4 usinas, que é de, por exemplo, 50 MW médios.

O resultados para esta usina seria calculado da seguinte forma:

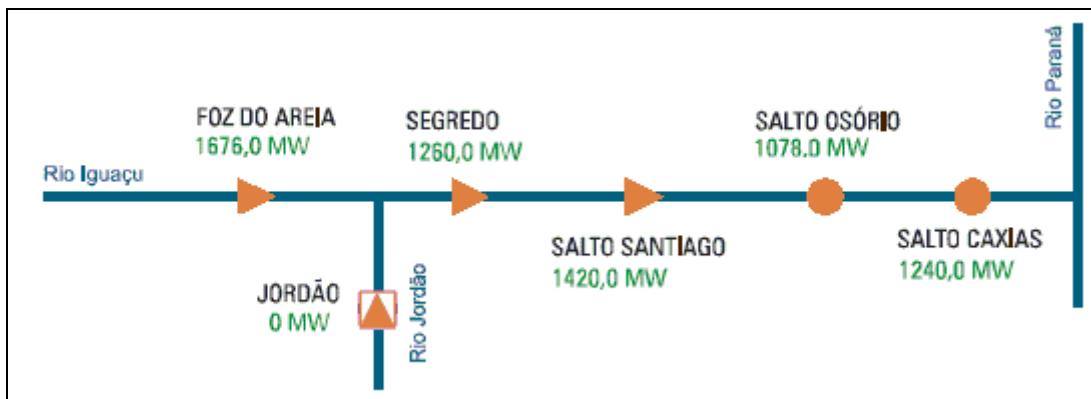
| Método | Diferença entre porcentagens de energia firme alocada no método e a porcentagem de seu certificado de energia assegurada |
|--------|--|
| GMPC   | $(25\% - \underline{30\%}) = -5\%$   |
| UA     | $(37,5\% - \underline{30\%}) = 7,5\%$  |
| AS     | $(45\% - \underline{30\%}) = 15\%$   |

Esta forma de apresentação dos resultados faz com que possam ser feitas comparações entre os três métodos de alocação mesmo entre usinas de tamanhos e características diferentes, como poderá ser melhor visualizado nas próximas seções.

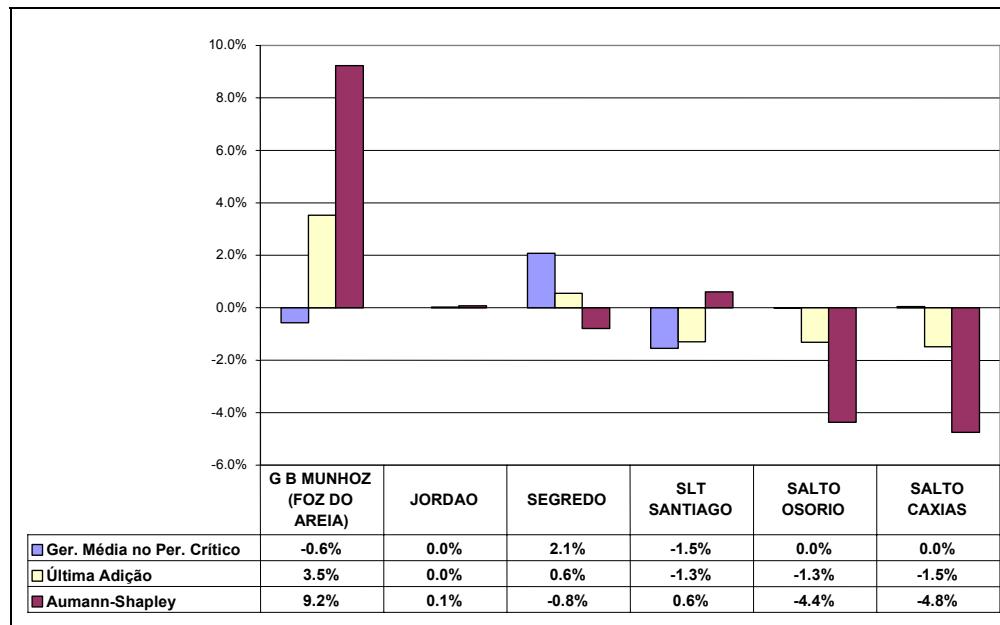
#### 9.4.1.

#### Resultados para a Cascata do Rio Iguaçu

A primeira cascata a ser analisada é a do rio Iguaçu. A Figura 9.2 mostra as usinas e a topologia da cascata do rio Iguaçu. Os resultados obtidos (conforme descritos na seção 9.4) são mostrados na Figura 9.3:



**Figura 9.2 – Cascata do rio Iguaçu**



**Figura 9.3 - Resultados dos três métodos de alocação das usinas do rio Iguaçu**

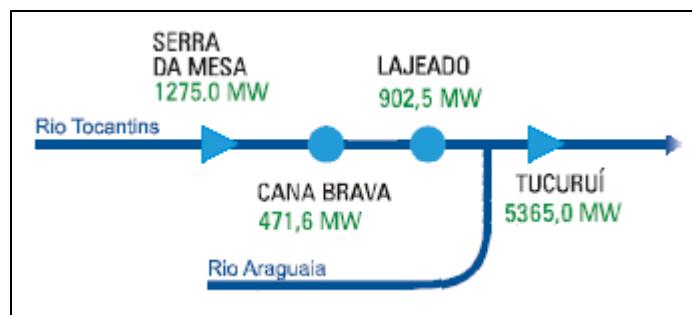
Observa-se uma transferência na alocação de energia firme das usinas a jusante para usinas a montante (em relação aos valores utilizados pela Aneel) nos métodos AS e UA. Isto significa que, em relação a estes dois critérios, as usinas a jusante desta cascata

estariam “capturando” (segundo o critério utilizado pela Aneel) parte de um benefício que deveria ser atribuído às usinas a montante.

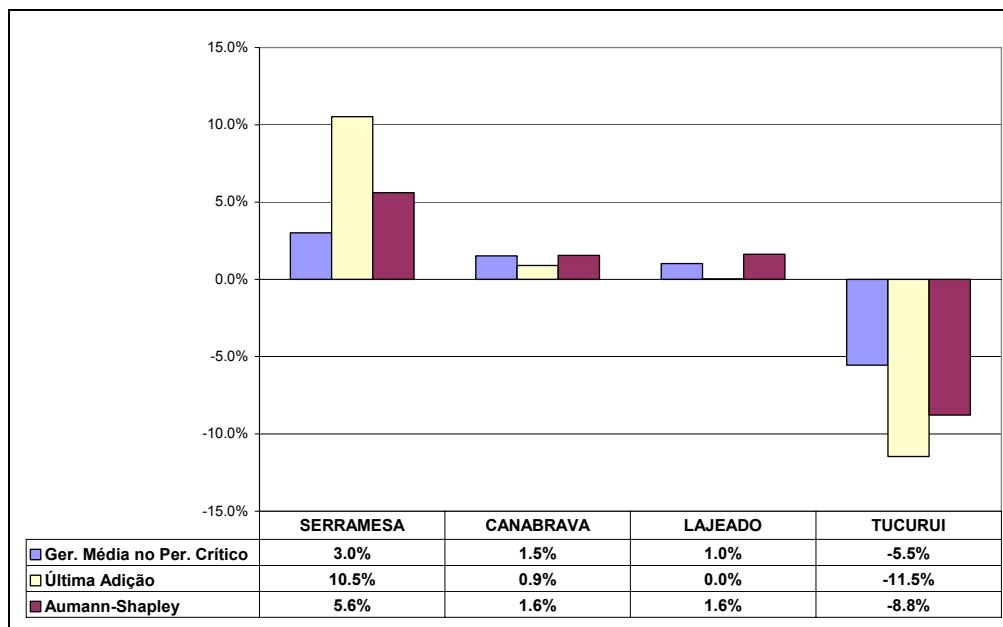
### 9.4.2.

#### Resultados para a Cascata do Rio Tocantins

A Figura 9.4 mostra as usinas e a topologia da cascata do rio Tocantins. Os resultados obtidos (conforme descritos na seção 9.4) são mostrados na Figura 9.5:



**Figura 9.4 - Cascata do rio Tocantins**



**Figura 9.5 - Resultados dos três métodos de alocação das usinas do rio Tocantins**

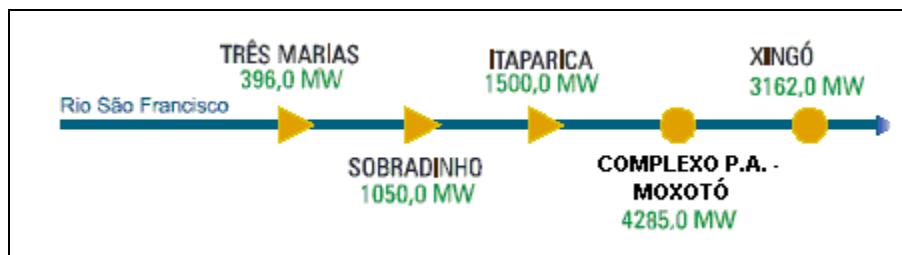
Observa-se que há uma transferência significativa na alocação da energia firme da usina de Tucuruí para as usinas a montante, em todos os critérios aplicados. Isto significa que esta usina está “capturando” um benefício que deveria ser atribuído às usinas a montante e, portanto, deveria receber um firme proporcionalmente menor. Esta usina,

apesar de possuir reservatório, se encontra mais perto da foz do Rio Tocantins e dessa forma é beneficiada pela regularização das usinas a montante. O oposto é observado com a usina Serra da Mesa, que está localizada a montante da cascata e recebe um firme maior por exercer papel importante na regularização das vazões das usinas a jusante.

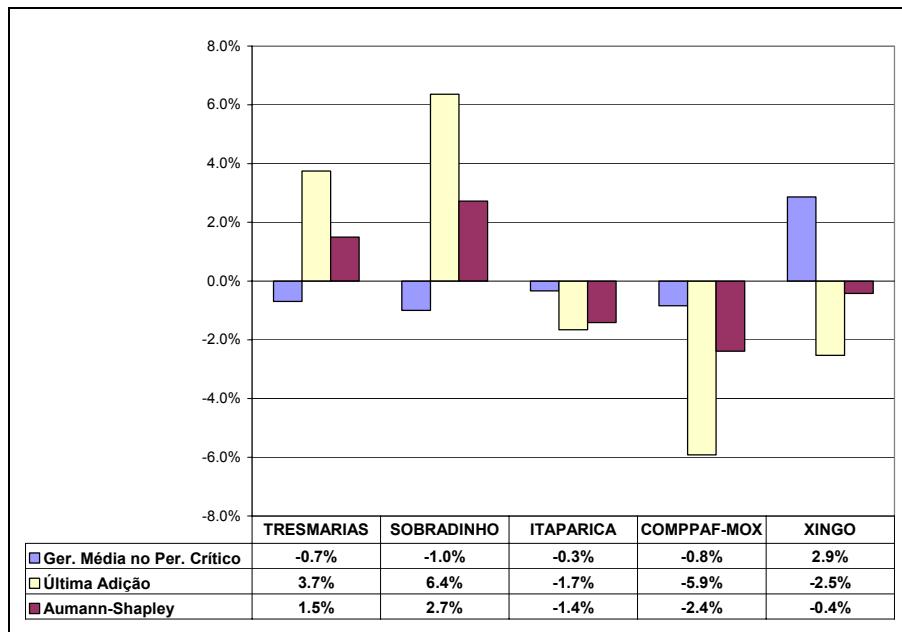
### 9.4.3.

#### Resultados da Cascata do Rio São Francisco

A Figura 9.6 mostra as usinas e a topologia da cascata do rio São Francisco. Os resultados obtidos (conforme descritos na seção 9.4) são mostrados na Figura 9.7:



**Figura 9.6 - Cascata do rio São Francisco**



**Figura 9.7 - Resultados dos três métodos de alocação das usinas do rio Tocantins**

Analogamente ao observado no caso da cascata do Rio Tocantins, observa-se para o caso do rio São Francisco uma evidente transferência de alocação de energia firme de usinas mais a montante para usinas a jusante. Em particular, as usinas Xingó e Complexo Paulo Afonso, que são fio-d'água, recebem tanto no método AS, quanto no método UA, uma energia firme proporcionalmente menor que as usinas de Três Marias e Sobradinho. Estas duas possuem reservatório e ajudam na regularização das vazões a jusante, e por

isso recebem neste dois métodos, que são mais eficientes economicamente, energias firmes maiores.

#### 9.4.4.

#### Resultados para o Caso de Itaipu

Conforme explicado na seção 9.4, para análise específica da usina de Itaipu foi feita uma comparação dos resultados da alocação de Itaipu com as usinas do rio Paraná, ao qual ela pertence, e com os valores agregados das usinas dos demais rios afluentes.

A Figura 9.9 mostra as usinas e a topologia da cascata do rio Paraná e seus afluentes. Os resultados obtidos (conforme descritos na seção 9.4) são mostrados na Figura 9.7:

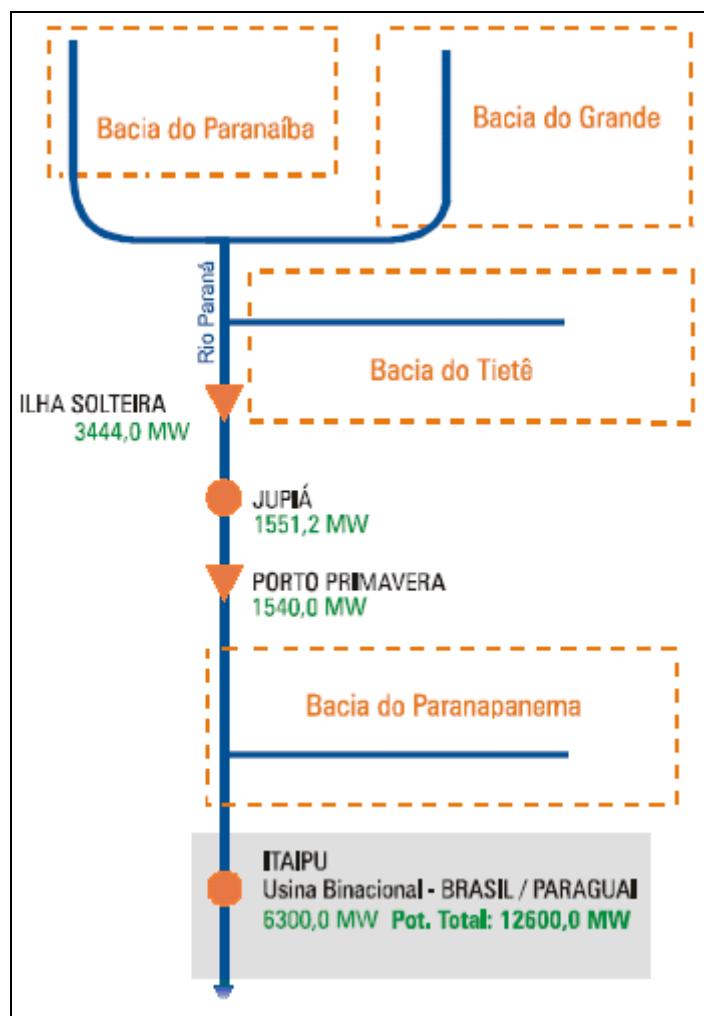
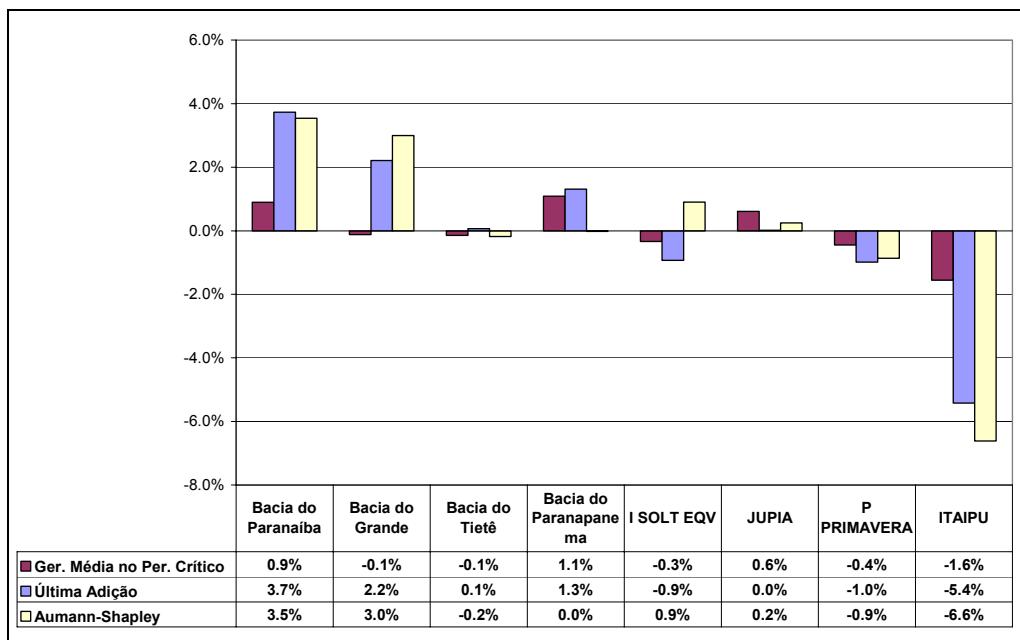


Figura 9.8 – Cascata do rio Paraná e seus afluentes



**Figura 9.9 - Resultados dos três métodos de alocação das usinas do rio Paraná e dos valores agregados das usinas de seus rios afluentes.**

Observa-se que há uma notável transferência de alocação da energia firme de Itaipu, que está localizada mais a jusante, para as usinas e bacias localizadas a montante. Em outras palavras, no critério atual a usina de Itaipu é visivelmente beneficiada com sua energia assegurada. Ressalta-se ainda que a energia assegurada de Itaipu, atualmente igual a 8612 MW médios, não foi calculada com a mesma metodologia das demais. A razão é que, à época, não estava ainda definido que Itaipu participaria do MRE<sup>24</sup>

## 9.5.

### Análise dos resultados: síntese geral

Os resultados apresentados e discutidos neste capítulo permitem concluir que a aplicação de distintos critérios de alocação conduz a alocações diferenciadas, e permite constatar que não existe uma única maneira de se executar esta repartição. Entretanto, há critérios para verificar se uma dada metodologia de repartição é adequada sob a ótica da chamada “justiça” da alocação. Portanto, embora possam, à primeira vista, parecer

<sup>24</sup> Mecanismo de Realocação de Energia. Ver anexo C para mais detalhes sobre seu funcionamento.

atrativos, os critérios de alocação GMPC e UA nem sempre pertencem ao núcleo do jogo e, portanto, há argumentos para não os caracterizarem alocações “justas”.

Os resultados permitem concluir ainda, que, em relação ao método AS, o critério de alocação atualmente em vigor no sistema Brasileiro tende a, proporcionalmente, sobreestimar os direitos de energia firme das usinas localizadas mais a jusante e de subestimar os das usinas localizadas mais a montante. Esta alocação “atual”, que como mostrada no anexo B e [80] foi baseada no método GMPC, poderia não pertencer ao núcleo do jogo<sup>25</sup> e seria, portanto, “injusta” sob a ótica da teoria da justiça.

A razão para analisar os resultados comparando os certificados de energia assegurada “em relação” ao método de Aumann-Shapley é que este método se mostra o mais adequado (entre os analisados) para refletir uma alocação “justa” dos direitos de energia firme: é um método que origina-se de uma metodologia intuitiva (valor de Shapley), não há a preocupação com a atribuição do recurso “água” (conforme mostrado na seção 8.5) e, como foi demonstrado nesta monografia, fornece uma alocação que pertence ao “núcleo” do jogo.

---

<sup>25</sup> Note que para testar se a alocação atual pertence ao núcleo, deveria se calcular o firme de cerca de  $10^{30}$  sub-coalizões.

**10****CONCLUSÕES**

A repartição da energia firme total entre as usinas de um sistema hidrelétrico pode ser vista como uma repartição do benefício da sinergia existente da operação integrada das usinas. Este é um exemplo do problema geral de repartição de benefícios entre agentes que cooperam para a maximização do recurso compartilhado: como a “união” dos agentes para produzir, conjuntamente, o recurso de uso compartilhado é mais eficiente do que o desenvolvimento do recurso em separado por cada agente, surge o problema de alocar de forma “justa” os “bônus” entre os participantes. Em outras palavras, os benefícios da operação conjunta devem ser repartidos de forma que nenhum dos agentes tenha incentivo a sair da grande coalizão, o que resultaria em uma Energia Firme total do sistema fosse que a da operação integrada. Este tipo de problema é estudado na *teoria de jogos cooperativos* e foi o foco de análise desta dissertação.

Mostrou-se que não existe uma maneira “ótima”, única, de se fazer esta repartição. Por outro lado, há critérios para verificar se uma dada metodologia de repartição apresenta algum aspecto inadequado. Um destes critérios é a chamada “justiça”: uma repartição é “injusta” se o benefício alocado à usina como participante do “grande conjunto” (no caso, todas as usinas hidrelétricas e térmicas) é menor do que a usina receberia se estivesse operando isoladamente, ou como parte de um subconjunto.

Mostrou-se que este critério equivale a pertencer ao chamado “núcleo” de um jogo cooperativo, isto é, o núcleo formaliza a idéia de “justiça” em uma alocação de benefícios entre agentes.

A partir da formulação do problema de energia firme como um modelo de otimização, esta dissertação investigou distintas alternativas para a sua distribuição entre os agentes, sempre sob a ótica da “justiça” da alocação resultante. Entre os distintos métodos investigados, mostrou-se que os que foram utilizados como base para o cálculo das energias firmes das usinas no sistema brasileiro (GMPC), podem não ser “justos”, isto é, podem não pertencer ao núcleo do jogo. Em particular, mostrou-se que o método

GMPC não é eficiente, pois não credita corretamente a contribuição dos reservatórios à energia firme, isto é, há uma transferência sistemática de energia firme das usinas a montante para as usinas a jusante. Esta “ineficiência” foi exemplificada para o sistema Brasileiro nos resultados desta dissertação, onde os certificados de energia assegurada vigentes e homologados pela ANEEL (calculados, em sua grande maioria pelo critério de geração média no período crítico) foram comparados proporcionalmente com a alocação AS. Verificou-se que há uma sucessiva transferência de benefícios das usinas a jusante para as usinas a montante na alocação Aumann-Shapley em relação aos valores vigentes.

Mostrou-se que o método de Aumann-Shapley origina-se de uma metodologia intuitiva, o método de Shapley. Além disso, o método de Aumann-Shapley supera as duas grandes dificuldades do método de Shapley (não-isonomia e dificuldade computacional) e demonstrou-se nesta dissertação que, além de robusto em relação ao tamanho dos recursos e eficiente computacionalmente, a alocação da energia firme por este método está no núcleo do jogo e, portanto, atende à condição de “justiça”.

No Brasil, é utilizada uma versão probabilística da energia firme, denominada energia assegurada

Embora não haja nenhuma dúvida sobre o poder e a relevância das técnicas utilizadas para seu cálculo, acredita-se que há a possibilidade de se utilizar a energia firme total como um critério “suplementar” à energia assegurada global, o que pode ser um importante mecanismo para garantir a confiabilidade de suprimento. A lógica por detrás deste critério suplementar é simples: caso ocorra um racionamento, este será causado por evento excepcional, ou seja, por condições hidrológicas mais severas que as piores até então registradas no histórico. Neste caso, a ocorrência de um racionamento poderia ser atribuída a um “Ato de Deus”, o que reduziria a pressão da Sociedade em busca dos responsáveis. Esta proposta é respaldada com estudos que sugerem que a energia firme do sistema hidrelétrico é inferior à energia assegurada, e este foi o resultado desta dissertação.

Dois exemplos recentes do bom uso de ferramentas suplementares são: (i) a gerência do racionamento, onde o monitoramento das metas era feito por “curvas críticas” baseadas na ocorrência de eventos tão severos quanto a pior seca observada; e

(ii) as chamadas “curvas de aversão a risco”, que complementam o critério de operação econômica (minimizar o valor esperado do custo de operação) com um critério de segurança baseado, novamente, na proteção contra a ocorrência de eventos tão severos quanto a pior seca observada.

Uma crítica freqüente a este tipo de critério é a de que ele é “baseado na ocorrência da pior seca do histórico, que é um evento que não se repetirá”. É evidente que a pior seca não se repetirá *exatamente*, assim como é evidente que nenhuma das milhares de séries utilizadas nos estudos probabilísticos ocorrerá *exatamente*. O ponto chave, tanto para critérios baseados no histórico como para critérios probabilísticos, é que há a possibilidade da ocorrência de eventos cuja *severidade* é igual à severidade da pior seca observada no histórico; ou igual à severidade das 5%<sup>26</sup> piores secas observadas nas séries produzidas sinteticamente. Em outras palavras, tanto os critérios históricos, como os probabilísticos, funcionam porque não estão restritos à ocorrência dos cenários utilizados na simulação, e sim da ocorrência de cenários diferentes que levam à mesma severidade global.

Finalmente, a metodologia de cálculo e repartição da energia assegurada é um tema de grande complexidade técnica e de grande interesse regulatório/institucional. De um lado, cada mudança de metodologia acarreta ganhadores e perdedores em termos comerciais, e levará possivelmente a questionamentos sobre “respeito a contratos” e “direitos adquiridos”. Por esta razão, qualquer alteração de metodologia deve ser amplamente debatida e suas consequências técnicas e comerciais, amplamente analisadas, antes de se efetivar uma implementação. Por outro, a manutenção de metodologias que levam a distorções importantes fere o princípio da máxima eficiência/mínimo custo global para o consumidor, que é uma responsabilidade básica do governo.

---

<sup>26</sup> Critério vigente para cálculo da energia assegurada, como mostra o anexo B

**11****REFERÊNCIAS**

- [1] Agência Nacional das Águas (ANA) – Metodologia de Cálculo da Energia Firme de Sistemas Hidrelétricos levando em Consideração usos Múltiplos da Água (2002)
- [2] Agência Nacional de Energia Elétrica – <http://www.aneel.gov.br>
- [3] Avaliação da Metodologia de Cálculo de Energia Assegurada de Usinas Hidrelétricas: Relatório Técnico do Comitê de Revitalização do Modelo do Setor Elétrico (disponível em <http://www.energiabrasil.gov.br/>)
- [4] Amboni M.K., Silva E.L., Alocação do Sobrecusto operativo via teoria dos jogos cooperativos, XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, 2001
- [5] Aumann, R.J. and L.S. Shapley (1974). Values of Non-Atomic Games. Princeton University Press.
- [6] Barros J.R.P. e Melo A.C.G., Usando Teoria dos Jogos Cooperativos para Repartir Custos associados a serviços anciliares – os casos da reserva de transformação e da potência reativa, XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, 2001
- [7] Barroso, L.A., Trinkenreich J., Granville S., Lino P., Pereira M.V., “Avaliação de estratégias de redução de risco hidrológico para empresas com portfólios predominantemente hidroelétricos” – XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [8] Billera, L. J. and David C. Heath (1982), Allocation of Shared Costs: A Set of Axioms Yielding A Unique Procedure, Mathematics of Operations Research, Vol.7, No.1, 32-39.
- [9] Binato S., Pereira M.V., Decentralized Planing of Hydroelectric Power Systems, IEEE Transactions on Power Systems Vol. 10, No. 1, Fevereiro 1995.
- [10] Bonneville Power Administration, “the Draft Guide to the Tools and Principles for a Dry Year Strategy”, disponível em <http://www.bpa.gov/power/pgp/dryyear/>
- [11] Bonneville Power Administration, BPA Power Business Line, <http://www.bpa.gov/power/>
- [12] Campodonico N., Pereira M.V., Kelman R., “Long-term hydro scheduling based on stochastic-models”, Proceedings of EPSOM 1998.
- [13] Contreras J., Wu F., Coalition Formation in Transmission Expansion Planning, IEEE Transactions on Power Systems Vol. 14, No. 3, Agosto 1999.
- [14] Contreras, J., Klusch, M., Vielhalk, T. Y Wu, F. (1999) Multi-Agent Coalition Formation in Transmission Planning: Bilateral Shapley Value and Kernel Approaches. Proceedings of the 13th Power Systems Computation Conference PSCC'99.
- [15] Comissão de Análise do Sistema Hidrotérmico de Energia Elétrica: Relatório da Comissão de Análise do Sistema Hidrotérmico de Energia Elétrica – Brasília, Julho 2001
- [16] Descritivo das Regras do Mercado Atacadista de Energia 3.5: Mecanismo de Realocação de Energia – disponível em <http://www.mae.org.br>
- [17] Ente Regulador de los Servicios Públicos – Panamá: <http://www.ersp.gob.pa/>

- [18] Fortunato L.A.M., Neto T.A.A., Albuquerque J.R., Pereira M.V.F. - Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica. ELETROBRÁS/Editora Universitária da UFF, 1990
- [19] Hobbs, B. Y Kelly, K. (1992) Using Game Theory To Analyze Electric Transmission Pricing Policies in the United States. European Journal of Operational Research, no. 56, pp. 154-170.
- [20] Kahan, J.P. Rapoport A., Theories of Coalition Formation, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ, 1995
- [21] Kelman, J. – Modelos Estocásticos no Gerenciamento de Recursos Hídricos, capítulo d Modelos de Gerenciamento de Recursos Hídricos vol.1, da, Coleção ABRH, 1987.
- [22] Kelman J., Kelman R., Water allocation for the economic production in a semi-arid region, Water Resources Development, Vol18, No 3, 2002.
- [23] Kelman, Rafael. Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Eficiência Econômica e Comportamento Estratégico. Monografia (Tese M.Sc.), COPPE/UFRJ, 1999
- [24] Kelman J., Kelman R., Pereira M., “Energia Firme Sistemas Hidrelétricos e Usos múltiplos dos recursos hídricos”, Revista da Associação Brasileira de Recursos Hídricos (ABRH), 2003
- [25] Lemaire J., An application pof Game Thepry: Cost Allocation, Astin Bulletin Vol. 14, No 1
- [26] Lino P., “Operação Descentralizada de Sistemas Hidrotérmicos em Ambiente de Mercado”, tese de MSc, IM-NCE-UFRJ, 2001.
- [27] Lino P., Barroso L.A., Fampa M., Kelman R., Pereira M.V., “Bid-based dispatch of hydrothermal systems in competitive markets”, Annals of Operations Research, 120, pp.81-97, 2003.
- [28] Maschler, M, Peleg, B. Y Shapley, L. (1979) Geometric Properties Of The Kernel, Nucleolus, And Related Solutions Concepts. Mathematics of Operations Research, vol. 4, no. 4, pp. 303-338.
- [29] Marangon, Lima, Pereira, J. M. Y Pereira, J. (1995) An Integrated Framework For Cost Allocation in a Multi-Owned Transmission System. IEEE Transaction on Power Systems, vol. 10, no. 2, pp. 971-977.
- [30] Medeiros A, Salgado R., Zurn H.. Uma metodologia para obtenção de fatores de perdas nodais via jogos cooperativos, XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Campinas, 2001
- [31] Myerson, R. (1991) Game Theory Analysis Of Conflict. Harvard University Pres, London, Inglaterra.
- [32] Meehan G, Fraser H., “Evaluation of compulsory dry-year generation reserve proposals for New Zealand”, NERA Economic Consulting, 2003 (disponível em <http://www.med.govt.nz/ers/electric/supply-security/submissions/17/nera/>)
- [33] Ministry of Economic and Development of New Zealand: Supply Security Issues: <http://www.med.govt.nz/ers/electric/supply-security/index.html>
- [34] Oliveira G. C., Granville S., Pereira M., Applications in Energy: Electrical Power, Handbook of Applied Optimization, Edited by P. M. Pardalos and M. G. C. Resende, Oxford University Press, 2002
- [35] Owen G., On the Core of Linear Production Games, Mathematical Programming, Vol. 9, pp. 358-370, 1975
- [36] S.H.F. Cunha, S. Prado and J.P. da Costa, “Modelagem da produtividade variável de usinas hidrelétricas com base na construção de uma função de produção energética”, XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Vitória, Brasil, 16-20 Nov. 1997
- [37] Rippl W., Capacity of Storage Reservoirs for Water Supply, Proceedings of Institution of Civil Engineers v. 71, 1883
- [38] Regras Algébricas do Mercado Atacadista de Energia 3.5, capítulo 7: Mecanismo de Realocação de Energia – disponível em <http://www.mae.org.br>
- [39] Silva E.L.; Morales J.C.; Melo A.C.G.; Allocating congestion cost using game theory, Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto, Volume: 1 , 10-13 Sept. 2001 Pages:5 pp. vol.1.

- [40] Shapley L.S., Cores of convex games, *Int. J. Game Theory* 1 (1971), 11–26.
- [41] Vieira, X. and Granville, S. and Pereira, M. and Gorenstein, B. and. Mello, J. and Melo, A., “Ancillary Services: How to Allocate Costs in an Optimization-Based Framework”, Proceedings of the CIGRÉ Symposium, Neptun, 1997.
- [42] von NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton Press, 1947. ISBN 0691003629
- [43] WU, F., YEUNG, C. y POON, A. (1999) Game Theoretical Multi-Agent Modelling of Coalition Formation For Multilateral Trades. *IEEE Transaction on Power Systems*, vol. 14, no. 3, pp. 929-934.
- [44] Young, H., “Cost allocation”, Handbook of game theory with economic applications”, edited by Robert Aumann and Sergiu Hart. N.H Elsevier, 1994
- [45] Young, H., Okada, N. Y Hashimoto, T. (1982) Cost Allocation In Water Resource Development. *Water Resources Research*, vol. 18, no. 3, pp. 463-475.
- [46] Zapata C., Muñoz J., “Contratos de suministro electrico. Realidad Chilena, Boliviana y Argentina. Realidad, estímulo al desarrollo de contratos. Contratos y confiabilidad” Pontificia Universidad Católica de Chile, Escuela de Ingeniería – Departamento de Ingeniería Eléctrica, (2000). Disponible em: <http://www2.ing.puc.cl/power/alumno%2000/contratos/trabajo.htm>
- [47] Zolezzi, J., Rudnick, H., "Tarificación del sistema de transmisión eléctrica: aproximación mediante juegos cooperativos", VII Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning, VII SEPOPE - May 23-28, 2000, Curitiba.
- [48] Zolezzi, J., Rudnick, H., "Transmission Cost Allocation by Cooperative Games and Coalition Formation", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol 17, November 2002, pp. 1008-1015
- [49] Zolezzi, J., Rudnick, H., " Consumers coordination and cooperation in transmission cost allocation", IEEE Powertech, Bologna, Italy, June 2003
- [50] IEEE Power Engineering Society, “IEEE Tutorial On Game Theory Applications in Eletric power markets”, IEEE Winter Meeting, NY, 1999.
- [51] J.F.Nash, “Non cooperative games”, *Annals of Mathematics*, 54, pp. 286-295, 1951
- [52] R. Kelman, L.A.Barroso, M.V.Pereira, “Market power assessment in hydrothermal systems”, *IEEE Trans. Power Syst*, Vol. 16, No.3, 2001
- [53] S. Borenstein, J. Bushnell, C. Knittel, “Market power in electricity markets: beyond concentration measures”, PWP-059R, UCEI, 1999.
- [54] C. Metzler, B.F. Hobbs, and J.-S. Pang, “Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC Network with Arbitrage: Formulations and Properties”, *Networks and Spatial Theory*, 3(2), 2003.
- [55] Hobbs, B. F. and Helman, U., “Complementarity-based equilibrium modeling for electric power markets”, in D. Bunn, ed., *Modeling Prices in Competitive Electricity Markets*, J. Wiley, in press (2004).
- [56] J. Bushnell, “A mixed complementarity model of hydrothermal electricity competition in the western United States”, *Operations research*, Vol. 51, No. 1, pp. 80-93, 2003.
- [57] L.B.Cunningham, R. Baldick, M.L. Baughman. “An Empirical Study of applied game theory : transmission constrained Cournot behavior”, *IEEE Trans. on Power Syst.*, Vol.17, No.1, 2002.
- [58] Pereira M.V., Granville S., Dix R., Barroso, L., “Nash Equilibrium in Strategic Bidding: a binary expansion approach”, (submetido) *IEEE Trans. Power Syst*, 2004.

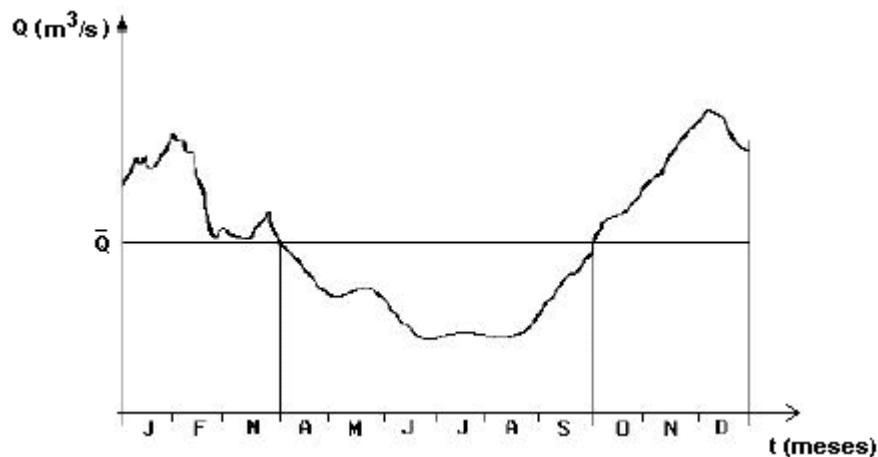
- [59] Vieira F.X., Pereira M., Gorenstein B., Mello J., Melo A., Granville S., "Transmission System cost allocation based on cooperative game theory" Brasil, 1997.
- [60] Tsukamoto Y., Iyoda I., "Allocation of fixed transmission cost to wheeling transactions by cooperative game theory", IEEE Trans. on power systems, vol. 11, No. 2, 1996.
- [61] Ransmeier, J., "The Tennessee Valley Authority: a case study in the economics of multiple purpose stream planning", Vanderbilt Univ. press, Nashville, Tennessee, 1942
- [62] Verrechia R., "An analysis of two cost allocation cases", Acc ver 579-593, 1982.
- [63] Billera, L., Heath, D., Raanan J., "Internal telephone billing rates: a novel application of non atomic game theory", Operations Research, 956-965, 1978.
- [64] Bres E., Charnes A., Cole E., Hitt S., Lyders R., Rousseau J., Russell K., Shoeman M., "Costs and their assessment to users of a medical library: a game theoretic method for allocating joint fixed costs", Applied Game theory Physica verlag, 334-351, 1979.
- [65] Straffin P., Heaney J., "Game theory and the Tennessee Valley Authority", International journal on Game Theory, pp. 35-43, 1981
- [66] Inter Agency Committee on Water Resources, "Proposed Practices for economic analysis of river-basins projects", US Government Printing Officee, 1958.
- [67] Littlechild S., Thompson G., "Aircraft Landing Fees: a game theory approach", Bell Journal of Economics, 186-207, 1977.
- [68] CPLEX - <http://www.ilog.com/products/cplex/>
- [69] XPRESS-MP - <http://www.dashoptimization.com/products.html?locale=english>
- [70] Scott,T. ; Read,E. – *Modelling Hydro Reservoir Operation in a Deregulated Electricity Market*, International Transactions in Operational Research 3 (3-4):243-253, 1996
- [71] Power Systems Research, Inc. (PSR) – "Estimativa dos benefícios da operação hidrotérmica coordenada" (2000) - estudo realizado para o ONS. Disponível em <http://www.psr-inc.com.br>
- [72] Rawls, John, A Theory of Justice, Princeton University Press; Revised edition (September 1999)
- [73] Rawls, John e Freeman, Samuel, Collected Papers, Harvard Univ Pr; (March 2001)
- [74] Binato, Silvio, Análise de Diferentes Alternativas de Alocação de Custos e Benefícios Aplicadas à Operação e ao Planejamento de Sistemas Hidrelétricos. Monografia (Tese M.Sc.), PUC-RJ, 1992
- [75] ONS – Operador Nacional do Sistema - <http://www.ons.org.br>
- [76] MAE – Mercado Atacadista de Energia - <http://www.mae.org.br>
- [77] Schmeidler, D. (1969), The Nucleolus of a characteristic function game, SIAM Journal on Applied Mathematics, 17: 1963-70
- [78] Kapov, D.S. & Beltrán, H.F. (1994). An Efficient Characterization of Some Cost Allocation Solutions Associated with Capacitated Network Design Problems. Telecommunication Systems, 3, 91-107.
- [79] Shapley, LS (1953) A values for n-person games, H.W. Kuhn and A.W Tucker, eds., *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II. Annal of Mathematics Studies No. 28 Princeton, NJ: Princeton University Press
- [80] Relatório Técnico da Câmara de Gestão da Crise de Energia (CGE) – (2002) - Grupo de Trabalho para Avaliação do Cálculo de Energia Assegurada.
- [81] Barber, C.B., Dobkin, D.P., and Huhdanpaa, H.T., "The Quickhull algorithm for convex hulls," ACM Trans. on Mathematical Software, 22(4):469-483, Dec 1996.

- [82] R. Kelman, M.V.Pereira, “Short Term Model for Hydrothermal Scheduling”, IEEE (submetido), 2003
- [83] Aumann, R. J., and Maschler, M., The bargaining set for cooperative games. In M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker (Eds.), Advances in game theory. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1964.
- [84] Kovalenkov, A. e Wooders, M. Holtz “Epsilon Cores of Games with Limited Side Payments, Nonemptiness and equal treatment” (2000)
- [85] Kenneth J. Arrow - <http://cepa.newschool.edu/het/profiles/arrow.htm>
- [86] Novo Modelo do Setor Elétrico Brasileiro – Cartilha institucional – Dez de 2003. Disponível em <http://www.mme.gov.br>

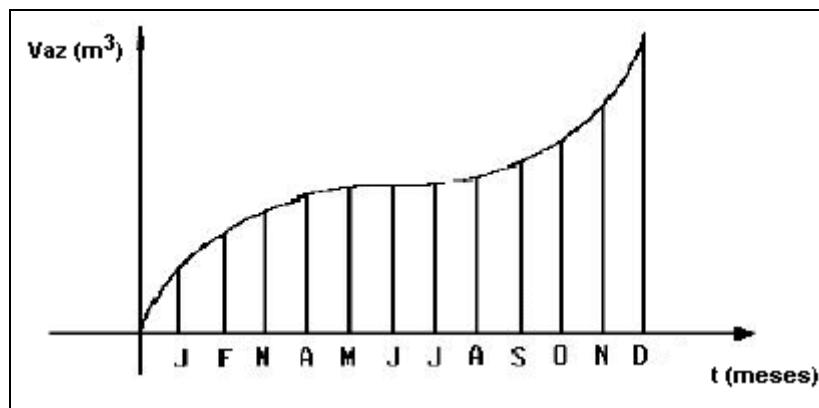
**12**
**ANEXO A – MÉTODO DO DIAGRAMA DE MASSAS (ou  
DIAGRAMA DE RIPPL).**

O volume útil de um reservatório pode ser entendido como o volume de armazenamento necessário para garantir uma vazão regularizada constante durante o período de estiagem mais crítico. Os métodos de cálculo deste volume baseiam-se no diagrama de massas, ou diagrama de Rippl, originalmente desenvolvido no final do século XIX.

O Diagrama de massas corresponde à integral de um histograma de vazões afluentes e, portanto, é um diagrama de volumes acumulados que afluem ao reservatório. Um histograma, como o mostrado na figura 12.1, dá origem ao diagrama de massas como o da figura 12.2.

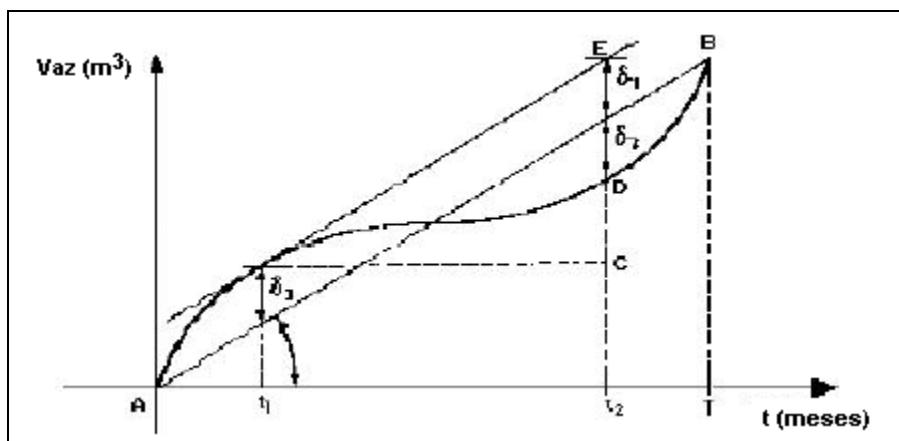


**Figura 12.1 : Histograma afluente ao reservatório.**



**Figura 12.2 : Diagrama de Massas.**

Como o diagrama de massas é a integral do histograma afluente ao reservatório, as retas tangentes a esta curva correspondem às vazões naturais do curso d'água em cada instante considerado, conforme ilustra a figura 12.3 a seguir.



**Figura 12.3: Elementos do diagrama de massas.**

Na figura 12.3, a vazão média de longo termo é dada pela inclinação da reta AB. As vazões a serem regularizadas são referenciadas como porcentagem da vazão média.

Considere que se a vazão a ser regularizada é a própria vazão média. O período mais crítico de estiagem na figura 12.3 é o intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$ . Para manter a vazão média durante este intervalo, será necessário descarregar do reservatório um volume  $V_n$ , dado por:

$$V_n = \bar{Q}(t_2 - t_1)$$

Como o diagrama da figura 12.3 é um diagrama integral, o volume  $Vn$  fica representado pelo segmento EC.

O volume  $Va$  que aflui ao reservatório no período de tempo ( $t1, t2$ ) é:

$$Va = \int_{t1}^{t2} Q dt$$

Este volume é representado pelo segmento DC na figura 12.3.

Assim, a capacidade necessária para o reservatório, isto é ( $Vn-Va$ ), é representada pelo segmento ED, que por sua vez é a soma de  $\delta 1$  e  $\delta 2$ .

Desta forma, utilizando-se o diagrama de massas, é possível determinar graficamente o volume útil do reservatório para uma determinada vazão regularizada. Para tanto, deve-se traçar uma reta passando pela origem e com inclinação igual à vazão desejada, ou seja, traçar a curva de vazões acumuladas de regularização. Passa-se então a traças retas paralelas a esta e tangente à curva do diagrama de massas. O maior afastamento entre essas tangentes corresponde ao máximo déficit existente na série histórica natural, definindo, portanto, o volume útil a ser armazenado no reservatório.

Da análise do diagrama, observa-se que, nos pontos em que a reta tangente à curva tem inclinação maior que a vazão regularizada, haverá o enchimento do reservatório. Caso contrário, ocorrerá o seu esvaziamento.

Desta forma o diagrama de massas é um método determinístico (já que se baseia apenas na série histórica existente) que determina a capacidade do reservatório a ser construído que garanta uma vazão regularizada constante.

Caso o diagrama de massas não possua tangentes com inclinação menor que a vazão a ser regularizada, não existe a necessidade de construção do reservatório, já que neste caso fica claro que a vazão a ser regularizada é sempre atendida apenas com as vazões naturais afluentes.

## 12.1.

### Algoritmo recursivo

A valor da capacidade necessária para o reservatório obtido graficamente pelo diagrama de massas pode também ser calculado através de uma recursão inversa,

Suponha que estejamos simulando a operação de um reservatório para um histórico de vazões naturais  $a_t$  com  $T$  períodos e que uma demanda de água igual a  $d$  deve ser atendida em todos eles.

Sabe-se que no início do período  $T$ , ou seja, o último, seria necessário um reservatório que armazenasse uma quantidade de água  $v_T$  igual a  $\text{Max}\{0, (d - a_T)\}$ , onde  $a_T$  é o volume afluente no período  $T$ . Se  $a_T$  for maior que  $d$ , não seria necessário ter água alguma armazenada no início deste período e neste caso  $v_T$  seria igual a zero.

No período  $(T-1)$  o mesmo raciocínio pode ser aplicado, ou seja, seria necessário haver armazenada no início deste período uma quantidade de água  $v_{T-1}$  igual a  $\text{Max}\{0, (d - a_{T-1})\} + v_T$ .

Repetindo o mesmo procedimento até o primeiro período obtém-se todos os montantes de água que devem estar armazenados no início de cada período. O maior valor dentre eles, portanto, é o tamanho mínimo que o reservatório deve ter para atender continuamente à demanda  $d$ .

## 13

### ANEXO B – ENERGIA ASSEGURADA E O SISTEMA BRASILEIRO

Este capítulo resume as principais questões sobre o tema “energia assegurada” no Sistema Brasileiro. Serão discutidos, de maneira resumida, a metodologia atual de cálculo de energia assegurada e seus critérios de alocação entre os agentes. Uma descrição mais detalhada do seu procedimento de cálculo pode ser encontrada em [3].

#### 13.1.

##### Certificados de Energia Assegurada (CEA)

No Sistema Elétrico Brasileiro, a confiabilidade de suprimento é obtida de maneira indireta, através de dois requisitos principais[86]: 100% da demanda deve estar contratada com geradores e cada contrato deve estar *respaldado* por uma capacidade de produção física de energia.

Há, portanto, uma ligação vital entre os respaldos e a confiabilidade de suprimento: para qualquer combinação de geradores cuja soma de respaldos é igual à demanda total, a confiabilidade física de suprimento deveria ser igual (ou melhor) do que o padrão estabelecido.

A capacidade de respaldo de uma usina hidrelétrica é conhecida como certificado de energia assegurada (CEA). O cálculo dos CEAs para as hidrelétricas é o tema deste anexo, e será discutido em detalhe mais adiante<sup>27</sup>.

---

<sup>27</sup> Já as usinas térmicas, na regulamentação atual, têm um respaldo igual à chamada potência efetiva (potência nominal ajustada pela disponibilidade média, incluindo manutenção programada e saídas forçadas). As interconexões internacionais também possuem respaldos, que são iguais à capacidade nominal da interconexão. Entretanto o foco desta monografia é no cálculo de CEAs para usinas hidroelétricas.

### 13.2.

#### **Importância comercial dos CEAs**

Além da importância para a confiabilidade de suprimento e expansão eficiente, os CEAs têm grande importância comercial, pois formam o limite máximo para contratação bilateral e também atuam diretamente no chamado Mecanismo de Realocação de Energia (MRE), que aloca os benefícios da operação integrada entre as usinas e está diretamente relacionado com o fluxo de pagamentos à usina no mercado de energia.

### 13.3.

#### **Cálculo dos CEAs – Sistema 100% hidroelétrico**

Como discutido ao longo desta monografia, a energia firme de um conjunto de usinas hidrelétricas é a máxima demanda que pode ser suprida continuamente (sem racionamento) na ocorrência das vazões registradas no histórico. Conforme mostrado no capítulo 2, a energia firme pode ser calculada de maneira iterativa, até que um critério de convergência seja atendido; um procedimento típico seria:

- (a) defina uma demanda firme inicial EF;
- (c) simule a operação do sistema para atender a esta demanda EF;
  - a. se ocorreu algum racionamento durante a simulação, reduza EF e volte ao passo (b); se não ocorreu nenhum racionamento, aumente EF e volte ao passo (b) ; se o critério de convergência é atendido, pare.

Alternativamente, a energia firme pode ser calculada diretamente como a solução de um problema de otimização, conforme apresentado no capítulo 2.

Suponhamos agora que, ao invés de um histórico de vazões de, por exemplo, setenta anos, dispõe-se de um “histórico” de milhares de anos. A energia assegurada é a máxima demanda que pode ser atendida (quase) continuamente ao longo destes milhares de anos: em  $x\%$  dos anos simulados, permite-se que haja algum racionamento. O parâmetro  $x\%$  é o risco de racionamento considerado aceitável para o sistema. Na regulamentação atual, este risco é de 5%. Portanto a energia assegurada é sempre calculada para um dado nível de risco de déficit.

O procedimento de cálculo da energia assegurada é conceitualmente análogo ao da energia firme:

- (a) defina uma demanda assegurada inicial EA
- (b) simule a operação do sistema visando o atendimento contínuo desta demanda
  - a. contabilize a porcentagem ( $x\%$ ) de anos simulados em que houve falha no atendimento; se  $x\%$  é inferior ao critério de risco (atualmente, 5%), aumente a demanda assegurada EA e volte ao passo (b); se  $x\%$  é superior ao critério de risco, reduza a energia assegurada EA e volte para (b); se  $x\%$  é igual ao critério (dentro de uma tolerância), EA é a energia assegurada.

### **13.3.1.**

#### **Repartição da energia assegurada**

No sistema brasileiro, foram aplicadas duas metodologias básicas de repartição da energia assegurada total: geração média no período crítico e “última adição”.

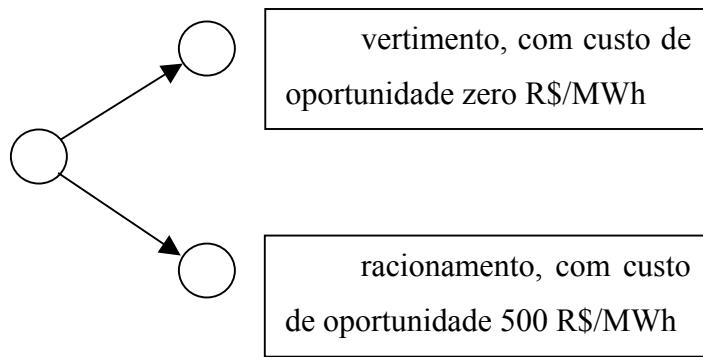
### **13.3.2.**

#### **Geração média no período crítico**

Como visto nesta monografia, no caso da energia firme, onde não há rationamento, existe um único período crítico, correspondente ao intervalo em que os reservatórios vão de cheios a vazios (“rasparam o fundo”). No caso probabilístico, em que  $x\%$  dos anos simulados ocorre um rationamento, existiriam vários “períodos críticos”, definidos de maneira análoga. A extensão natural do critério seria definir a energia assegurada de uma usina como sua geração média ao longo dos vários “períodos críticos”. Esta metodologia foi, de fato, proposta por algumas empresas do Setor.

Entretanto, verificou-se que havia uma maneira *equivalente*, e mais prática, de estender o critério de geração média. A energia garantida de uma usina seria proporcional ao *valor econômico da usina*, dado pela média dos produtos do custo marginal de curto prazo e da produção da mesma, para todos os estágios e cenários hidrológicos simulados.

A equivalência entre os dois critérios resulta do cálculo do custo marginal de curto prazo. Como é de conhecimento geral [12], este custo marginal representa a média do *custo de oportunidade* da geração hidrelétrica. A Figura a seguir ilustra um caso muito simples, onde só há dois cenários:



O primeiro cenário hidrológico, com probabilidade 90%, corresponde a uma vazão elevada que leva a vertimento. Neste caso, o custo de oportunidade futuro da água é zero. O segundo cenário, com probabilidade 10%, corresponde a uma vazão muito reduzida, que leva a racionamento. Neste caso, o custo de oportunidade é o custo de racionamento, suposto 500 R\$/MWh.

O custo marginal de curto prazo de hoje é dado pela média ponderada dos custos de oportunidade futuros:  $90\% \times \text{zero} + 10\% \times 500 = 50 \text{ R\$/MWh}$ . Pelo critério de valor econômico, a contribuição da usina seria igual à produção de hoje ( $y \text{ MWh}$ ) multiplicada pelo custo marginal (50 R\$/MWh).

Entretanto, a “árvore” acima poderia ser igualmente interpretada como a simulação de 90 cenários “não críticos”, onde uma redução incremental da geração da usina poderia ser compensada pelo aumento da produção de outra, sem problemas de suprimento; e 10 cenários “críticos”, onde a redução da produção da usina aumentaria o racionamento. Se contabilizarmos somente a produção média destes “períodos críticos”, o efeito é o mesmo do valor econômico, a menos da constante que representa o custo de racionamento. Em resumo, há uma equivalência metodológica entre os critérios “físicos”, baseados na produção média de cada usina nos períodos secos; e os critérios “econômicos”, baseados

na ponderação da produção pelo custo marginal de curto prazo. Esta relação é detalhada em [23][74].

### **13.3.3.**

#### **Última adição**

Como visto ao longo desta dissertação, neste critério a energia firme de cada usina é proporcional à *diferença* que esta usina causaria no firme total, se retirada do sistema. A extensão do critério de última adição para o caso de energia assegurada é imediata:

$$EA_i = ET \times [\Delta EA_i / (\sum_j \Delta EA_j)]$$

onde:

$EA_i$  energia assegurada da usina  $i$

$ET$  energia assegurada total do sistema (conjunto de usinas)

$\Delta EA_i$  diferença  $ET - EA_{-i}$

$EA_{-i}$  energia assegurada do sistema quando a usina  $i$  é retirada do mesmo

$\sum_j \Delta EA_j$  somatório das energias asseguradas de todas as usinas (fator de ajuste para garantir que a soma das asseguradas individuais é igual à assegurada total)

### **13.3.4.**

#### **Critérios de repartição adotados**

Como visto ao longo desta dissertação, o critério de geração média “subestima” as energias asseguradas das usinas a montante e “superestima” a das usinas a jusante, pois não reconhece adequadamente a contribuição dos reservatórios para a regularização das vazões a jusante. O critério de “última adição” evita esta distorção, pois ao simular a retirada da usina, leva em consideração tanto o efeito da capacidade de produção como o de regularização do reservatório.

Como a valoração correta da contribuição da usina é essencial para a expansão eficiente do sistema, a ANEEL adotou o critério de última adição para calcular a energia assegurada das *novas usinas* (licitação de concessões).

Entretanto, havia uma dificuldade *comercial* importante para a aplicação do mesmo critério às usinas existentes na época da atribuição inicial das energias asseguradas: os contratos bilaterais vigentes eram baseados no critério de geração média<sup>28</sup>. Decidiu-se então usar um critério misto: os certificados de energia assegurada das existentes – que serviram de base para os Contratos Iniciais - foram baseados na geração média; os certificados das usinas novas foram baseados na última adição.

Em resumo:

os certificados de energia assegurada das usinas novas foram baseados no critério de última adição, mas os das existentes se basearam na geração média de período crítico.

Devido à importância comercial dos CEAs, a existência de diferentes critérios de alocação deveria ser reconhecida na revisão dos mesmos.

#### 13.4.

#### Cálculo dos CEAs – sistema hidrotérmico

Na seção anterior, foi discutido o cálculo dos CEAs quando é utilizada uma configuração somente hidroelétrica. O procedimento de cálculo da energia assegurada quando há usinas hidrelétricas e térmicas é idêntico ao do sistema 100% hidrelétrico visto na seção anterior:

- (a) defina uma demanda assegurada inicial EA
- (b) simule a operação do sistema visando o atendimento contínuo desta demanda
- (c) contabilize a porcentagem ( $x\%$ ) de anos simulados em que houve falha no atendimento

---

<sup>28</sup> Observa-se que a energia assegurada é anterior à primeira reforma do setor. Nesta época, o sistema era todo de propriedade estatal, e sua expansão do sistema era baseada no planejamento determinístico. Portanto, a alocação das energias asseguradas era menos importante, pois só tinha efeito para balanço

(d) se  $x\%$  é inferior ao critério de risco (atualmente 5%), aumente a demanda assegurada EA e volte ao passo (b); se  $x\%$  é superior ao critério de risco, reduza a energia assegurada EA e volte para (b); se  $x\%$  é igual ao critério (dentro de uma tolerância), EA é a energia assegurada.

### 13.4.1.

#### **Repartição da energia assegurada**

Assim como no caso 100% hidrelétrico, haveria duas maneiras de repartir a energia assegurada total: (i) proporcional ao valor econômico da usina (geração média no período crítico); e (ii) última adição.

### 13.4.2.

#### **Critério do valor econômico – geração média no período crítico**

Como visto na seção anterior, o critério de valor econômico é equivalente ao da geração média nos períodos secos. Esta equivalência permanece quando se introduzem usinas térmicas, pois o despacho da térmica depende, em última análise, do custo de oportunidade da geração hidrelétrica<sup>29</sup>.

##### 13.4.2.1.

###### **Procedimento adotado**

Como já mencionado, o cálculo da energia assegura antecede por vários anos a primeira reforma do setor. Na época, por limitação das ferramentas computacionais, foi adotado o seguinte procedimento simplificado:

- (a) calcule a energia assegurada total ET como descrito em 13.4, usando um modelo *agregado* das usinas hidrelétricas.

---

contratual. Com a reforma do setor, como mencionado, a energia assegurada passou a ser o elemento central da expansão e contratação.

<sup>29</sup> Se o custo variável de operação da térmica for inferior ao custo de oportunidade das hidrelétricas, a térmica é despachada; em caso contrário, não é.

- (b) simule a operação do sistema para vários cenários hidrológicos; para cada estágio e para cada cenário, calcule o valor econômico da *geração hidrelétrica total*, como o produto do custo marginal de curto prazo naquele estágio e cenário com a respectiva energia gerada pelo sistema agregado. Calcule o valor econômico da geração térmica total como a soma dos valores econômicos de cada usina térmica.
- (c) Reparta ET em EA<sub>H</sub> (relativo às hidrelétricas, como um todo) e EA<sub>T</sub> (relativo às térmicas como um todo):

$$EA_H = ET \times [VE_H / (VE_H + VE_T)]$$

onde VE<sub>H</sub> e VE<sub>T</sub> são respectivamente os valores econômicos associados ao “bloco” hidrelétrico e ao “bloco” térmico.

- (d) simule a operação detalhada do sistema hidrelétrico para o período crítico histórico, usando como demanda EA<sub>H</sub>. Defina a energia assegurada de cada usina hidrelétrica como:

$$EA_i = EA_H \times [GP_i / (\sum_j GP_j)]$$

onde:

EA<sub>i</sub> energia assegurada da usina hidrelétrica *i*

EA<sub>H</sub> energia assegurada do “bloco” hidrelétrico

GP<sub>i</sub> geração média da usina *i* no período crítico

$\sum_j GP_j$  somatório das gerações médias de todas as usinas (fator de ajuste para garantir que a soma das asseguradas individuais é igual à assegurada total)

Portanto,

O procedimento atualmente adotado é uma mistura do critério econômico probabilístico e energia firme histórica. O critério econômico probabilístico é usado para calcular a energia assegurada total e separar esta energia assegurada total em “bloco” hidrelétrico e “bloco” térmico. Por sua vez, a repartição da energia assegurada hidrelétrica entre as usinas individuais é feita pelo critério da energia firme histórica.

Além disto, observa-se que

A energia assegurada das térmicas não é usada como respaldo de contratos. A regulamentação atual dá como respaldo térmico a capacidade instalada efetiva (nominal ajustada pela indisponibilidade por manutenção e saída forçada). Isto significa que a soma dos montantes contratados por hidrelétricas e térmicas pode exceder a energia assegurada total do sistema.

### **13.5.**

#### **Outros Temas para Discussão na metodologia atual**

Nesta seção serão brevemente apresentados temas para discussão que se referem ao cálculo e a repartição dos certificados de energia assegurada.

##### **13.5.1.**

###### **Energia Assegurada e Usos Múltiplos da Água**

Um fator importante que necessita ser levado em consideração no cálculo do certificado de energia assegurada é a evolução futura dos usos múltiplos dos recursos hídricos da correspondente bacia hidrográfica, o que em geral implica em diminuição da disponibilidade de água para geração de energia.

Embora não existam ainda planos de bacia hidrográfica devidamente aprovados pelos respectivos comitês, a Agência Nacional de Águas – ANA já vem atuando no sentido de permitir o uso múltiplo dos recursos hídricos. Exemplos disso são a continuidade de navegação no reservatório de Ilha Solteira, como ocorreu durante a crise de 2001, e a retirada de água para irrigação na bacia do rio São Francisco. Entretanto, os atuais certificados de energia assegurada não consideram a evolução futura do uso múltiplo dos recursos hídricos em seu dimensionamento. Em outras palavras, se crescer a área irrigada a montante de uma usina, nada acontece com o certificado desta usina, mesmo que na prática a capacidade de produção sustentada tenha diminuído.

Se a capacidade física de produção sustentada das usinas não corresponder de fato ao indicado comercialmente pelos respectivos certificados, o risco de racionamento será superior ao projetado pelos estudos de planejamento.

Este tema é analisado em [1][21], onde é proposta a utilização de um “fator de redução” no valor do CEA que traduza a expectativa de uso múltiplo dos recursos hídricos na bacia hidrográfica onde a usina estiver localizada. Este “fator” constaria segundo o correspondente plano da bacia hidrográfica, quanto maior for esta expectativa, maior deverá ser este fator de redução. Em outras palavras, há que reconhecer que a produção de energia elétrica é um dos usos múltiplos que o plano de bacia deve considerar.

### **13.5.2.**

#### **Repartição da Energia Assegurada – Critérios não Homogêneos**

Como mencionado neste anexo, os critérios de rateio da energia assegurada para as usinas existentes na época da primeira alocação são diferentes dos usados para as usinas a construir (geração média no período crítico para as existentes e última adição para as novas).

Este tema é de grande importância tendo em vista a perspectiva de uma revisão dos certificados a curto prazo e a realização de revisões quinquenais dos mesmos. A existência de critérios distintos para usinas (novas e existentes) implica na necessidade de definir uma metodologia de repartição que leve em conta a metodologia original de alocação. Por exemplo, se na revisão for mantido o critério de geração média no período crítico, estaria sendo “desfeita” a alocação correta da energia assegurada das usinas novas.

### 13.5.3.

#### **Energia Assegurada das Térmicas e interconexões internacionais**

A regulamentação atual prevê que o respaldo das térmicas é sua potência efetiva<sup>30</sup>, não sua energia assegurada. A consequência é não haver aderência entre o montante total contratado e a energia assegurada total.

A mesma preocupação referente às térmicas se aplica às interconexões. Como caso concreto, sabe-se que há limitações estruturais de exportação da Argentina para o Brasil nos meses de julho a agosto, que podem não estar refletidas nos respaldos destas interconexões.

### 13.5.4.

#### **Uso da Energia Firme como Critério Suplementar**

Como visto neste anexo, o cálculo da energia assegurada é um tema tecnicamente complexo, que envolve o uso encadeado de uma série de modelos computacionais e critérios probabilísticos.

Embora não haja nenhuma dúvida sobre o poder e a relevância destas técnicas, a experiência de alguns técnicos em estudos tanto no Brasil como no exterior sugere que modelos conceitualmente mais simples, mas que capturam aspectos essenciais do problema, são uma ferramenta suplementar muito eficaz.

Dois exemplos recentes do bom uso de ferramentas suplementares são: (i) a gerência do racionamento, onde o monitoramento das metas era feito por “curvas críticas” baseadas na ocorrência de eventos tão severos quanto a pior seca observada; e (ii) as chamadas “curvas de aversão a risco”, que complementam o critério de operação econômica (minimizar o valor esperado do custo de operação) com um critério de segurança baseado, novamente, na proteção contra a ocorrência de eventos tão severos quanto a pior seca observada.

---

<sup>30</sup> Como visto anteriormente, a potência efetiva é a nominal, ajustada pelos fatores de indisponibilidade média por manutenção e saída forçada.

Portanto, dentro da mesma lógica de proteção contra os eventos mais severos observados, foi proposto em [1][21] a possibilidade de se utilizar a energia firme global como um “teto” para a energia assegurada global. Esta proposta foi respaldada com estudos [1][21] que sugerem que a energia firme do sistema hidrelétrico é inferior à energia assegurada.

**14****ANEXO C –O MECANISMO DE REALOCAÇÃO DE ENERGIA**

O Mecanismo de Realocação de Energia (MRE) é um mecanismo financeiro que objetiva o compartilhamento dos riscos hidrológicos que afetam os geradores na busca de garantir a otimização dos recursos hidrelétricos do sistema elétrico interligado e a correção de uma distorção econômica na remuneração econômica de geradores hidroelétricos e reservatórios. O objetivo deste anexo é apresentar uma breve descrição do MRE e de seu funcionamento. O detalhamento completo das regras do MRE pode ser encontrado em [38][16].

**14.1.****MRE: Motivação****14.1.1.****Riscos Hidrológicos de Usinas Hidrelétricas**

Os contratos bilaterais entre empresas no Setor Elétrico Brasileiro constituem apenas instrumentos financeiros. Isto significa que a produção física das usinas é completamente desvinculada dos contratos firmados por seus proprietários.

No caso de usinas térmicas, os contratos bilaterais permitem gerenciar adequadamente a volatilidade: se o preço “spot” é reduzido, a usina não é despachada e atende seu contrato através da compra de energia no mercado “spot”, evitando assim os custos de produção; se o preço “spot” é elevado, a usina é despachada e atende seu contrato através de geração própria, evitando assim compras onerosas de energia.

No caso de usinas hidrelétricas, entretanto, a contratação não é suficiente para reduzir os riscos a um nível adequado. Devido à predominância da produção hidroelétrica no sistema brasileiro, os preços “spot” são mais elevados em situações de seca, quando as hidroelétricas necessitam comprar energia para cumprir seus contratos. Como

conseqüência, a hidroelétrica contratada corre riscos em ambos os extremos: se estiver pouco contratada, está exposta a preços baixos no “spot”; e se estiver muito contratada, está exposta ao risco de ser obrigada a comprar energia a preços elevados[7]. Este risco é conhecido como “risco hidrológico”. Em particular, no caso de racionamento de energia, as hidroelétricas teriam que pagar o equivalente à diferença entre a energia contratada e produzida multiplicada pelo custo de racionamento.

A situação se agrava devido à variabilidade da produção de cada usina individual, uma vez que a energia produzida por cada hidroelétrica em cada período depende do nível de armazenamento dos demais reservatórios e das condições hidrológicas nas diversas bacias do sistema. Como consequência, a produção individual da usina é muito variável em relação ao valor contratado, o que leva a compras e vendas freqüentes das diferenças no “spot” e afeta o fluxo de caixa da mesma, fato que é indesejável para a viabilização de qualquer “project finance”.

#### **14.1.2.**

#### **Eficiência Econômica da remuneração “spot”**

A implementação do esquema “spot” em sistemas hidrotérmicos não deveria apresentar dificuldades conceituais: uma vez calculado o despacho ótimo do sistema, no balanço de pagamentos no mercado “spot” cada agente receberia (pagaria) o produto do preço “spot” e sua produção (consumo) de energia. Uma das justificativas básicas para a implantação de um esquema de pagamento “spot” é a eficiência de seus sinais econômicos. Mostra-se em [23] que, sob condições de concorrência perfeita, a expansão descentralizada do sistema, onde os agentes tentam maximizar seu lucro, coincide com a expansão centralizada do sistema, onde um agente central (o planejador) procura encontrar a solução de mínimo custo total.

Entretanto, conforme mostrado em [23][27], o mecanismo de remuneração “spot” só fornece sinais econômicos corretos quando as usinas hidroelétricas estão isoladas ou quando todas as usinas de uma mesma cascata pertencem a uma única empresa. Num caso extremo podemos imaginar um sistema composto de um reservatório “puro”, isto é, sem geração associada, a montante de usinas a fio d’água. Este reservatório é obviamente

benéfico para o sistema, pois regula a vazão afluente às usinas e, portanto, aumenta sua capacidade de produção firme de energia. Entretanto, dado que o esquema “spot” remunera somente a *energia gerada*, o reservatório não seria remunerado, enquanto as usinas a jusante ficariam com toda a renda. Isto indica que há uma distorção na alocação dos benefícios econômicos aos agentes.

É importante observar que esta distorção ocorre mesmo se as usinas com reservatório têm capacidade de turbinamento, isto é, estamos discutindo um efeito *geral* para as usinas em cascata, não um caso particular para reservatórios sem máquina. A compensação pelo serviço de regularização prestado pelos reservatórios numa cascata é essencial para corrigir os sinais econômicos. Conforme discutido em [23][27], esta distorção pode ser corrigida através da criação de um mercado “spot” de água, que tem com relação à compra a venda deste recurso uma função análoga à do mercado “spot” de energia, e permite remunerar estes serviço de maneira a restabelecer a eficiência econômica.

## 14.2.

### O Mecanismo de Realocação de Energia

O Mecanismo de Realocação de Energia apresenta uma proposta de solução para os dois tópicos anteriores.

O MRE é um mecanismo de “hedging” compulsório entre as usinas hidrelétricas que compõe o sistema. No contexto do MRE, cada usina hidroelétrica recebe a cada período um *crédito de energia* (MWh) proporcional à produção hidroelétrica *total* (soma da produção de todas as usinas hidroelétricas) nesta mesma etapa. O fator de proporção é dado pela razão entre o *certificado de energia assegurada* da hidroelétrica e a soma dos certificados de todas as usinas participantes do MRE. Este crédito de energia, e não a energia produzida fisicamente pela mesma, é então utilizado para atender o contrato da usina.

Como a produção *total* de energia hidroelétrica (e portanto o crédito de energia) é muito mais constante que a produção individual das usinas hidroelétricas, conclui-se que o MRE é um esquema eficiente de redução da volatilidade e risco hidrológico<sup>31</sup>.

Por outro lado, conforme mostrado em [23], o MRE procura corrigir a distorção econômica da remuneração “spot” das hidroelétricas através de uma representação *implícita* do mercado ‘spot’ de água. A razão é que este esquema de compensação se baseia na observação de que se todas as usinas numa cascata pertencem ao mesmo agente, a renda “spot” total da cascata (soma dos pagamentos “spot” a todas as usinas da cascata) está correta. Portanto, pode-se interpretar o MRE como uma empresa *fictícia* chamada “Mecanismo de Realocação de Energia” cujos “acionistas” são as usinas da cascata. As “ações” da “empresa” MRE são os *Certificados de Energia Assegurada (CEA)* e tudo funciona como se a “empresa” MRE recebesse o pagamento “spot” total e o distribuísse entre seus acionistas como “lucros”, em proporção às ações que cada um possui, e não à produção individual. Com isto, um reservatório puro, por exemplo, é remunerado com base no seu *Certificados de Energia Assegurada* e não com base na sua produção individual (que é nula).

Portanto, conclui-se que o MRE atinge os dois objetivos a que se propõe. Finalmente, o valor do CEA de cada usina (i.e. a quantidade de MWs) é determinado pela ANEEL e pode ser revisto a cada 5 anos. Em cada revisão, o mesmo não pode ser alterado em mais (menos) de 5% e o limite para sua alteração total ao longo de toda a concessão do empreendimento é 10%.

### 14.3.

#### **Exemplo de Aplicação do MRE**

Como visto anteriormente, no esquema MRE, a geração *total* da cascata a cada hora é *alocada* entre as usinas *na proporção* de seus CEAs. O pagamento “spot” se aplica então à energia *alocada* a cada usina, e não à produzida fisicamente pela mesma. Em outras

---

<sup>31</sup> Entretanto, conforme discutido em [40], o MRE não mitiga o risco hidrológico global: se a produção total de energia das UHEs for inferior à soma das suas certificados de energias asseguradas, os créditos do MRE distribuídos às UHEs serão inferiores às suas certificados energias asseguradas.

palavras, tudo funciona como se a “empresa” MRE recebesse o pagamento “spot” total e o distribuísse entre seus acionistas como “lucros”, em proporção às ações que cada um possui.

### 14.3.1.

#### Sistema Exemplo

Os conceitos apresentados acima serão ilustrados através de um exemplo com dois geradores térmicos, três hidroelétricas e duas demandas, com as seguintes características:

**Tabela D.1 – Geradores**

| Nome           | Cap.<br>(MW) |
|----------------|--------------|
| H <sub>1</sub> | 20           |
| H <sub>2</sub> | 50           |
| H <sub>3</sub> | 30           |
| T <sub>1</sub> | 10           |
| T <sub>2</sub> | 20           |

**Tabela D.2 – Demandas**

| Nome           | Carga<br>(MWh) |
|----------------|----------------|
| D <sub>A</sub> | 50             |
| D <sub>B</sub> | 30             |

### 14.3.2.

#### Despacho Ótimo

Suponhamos que o despacho ótimo para uma dada etapa (1 hora) é o apresentado a seguir:

**Tabela D.3 – Despacho Ótimo**

| gerador | prod. |
|---------|-------|
|         | (MWh) |
| $H_1$   | 5     |
| $H_2$   | 40    |
| $H_3$   | 25    |
| $T_1$   | 10    |
| $T_2$   | 0     |

**14.3.3.****Balanço de Pagamentos no mercado “spot” - sem MRE**

No balanço de pagamentos no mercado “spot”, os geradores recebem o produto de sua geração física (Mwh) pelo preço “spot” (\$/Mwh). Por sua vez, as demandas pagam o produto de seu consumo (Mwh) pelo preço “spot”. A Tabela D.4 apresenta o balanço no mercado “spot” para o caso exemplo, supondo um preço “spot” de \$10/Mwh.

**Tabela D.4a - Balanço no mercado “spot” - Geração - sem MRE**

| Agente               | geração | remuner.   |
|----------------------|---------|------------|
|                      | (MWh)   | (\$)       |
| $H_1$                | 5       | 50         |
| $H_2$                | 40      | 400        |
| $H_3$                | 25      | 250        |
| <b>subtotal H</b>    |         | <b>700</b> |
| $T_1$                | 10      | 100        |
| $T_2$                | 0       | 0          |
| <b>subtotal T</b>    |         | <b>100</b> |
| <b>total geração</b> |         | <b>800</b> |

**Tabela D.4b - Balanço no mercado “spot” – Demanda**

|                | demand | consumo     | pgto. |
|----------------|--------|-------------|-------|
|                | (MWh)  | \$          |       |
| D <sub>A</sub> | -50    | -500        |       |
| D <sub>B</sub> | -30    | -300        |       |
| <b>Total</b>   |        | <b>-800</b> |       |

#### 14.3.4.

#### O Mecanismo de Realocação de Energia (MRE)

Como mencionado anteriormente, cada agente hidro possui uma quantidade de “cotas” numericamente igual a seu CEA. A Tabela D.5 apresenta os CEAs associados a cada usina no exemplo.

**Tabela D.5 – CEAs e Cotas da “Empresa” MRE**

| agente         | CEA  | cota   |
|----------------|------|--------|
|                | (MW) | (p.u.) |
| H <sub>1</sub> | 10   | 0.2    |
| H <sub>2</sub> | 25   | 0.5    |
| H <sub>3</sub> | 15   | 0.3    |
| total          | 50   | 1.0    |

Também como mencionado, o procedimento MRE transforma a geração *física* {H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>, H<sub>3</sub>} de cada usina (MWh) em *créditos de geração* {E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub>} (também em MWh). Estes créditos são calculados como o produto da participação da usina na “empresa” (em p.u.) pela geração hidrelétrica *total*. No exemplo acima, a geração hidrelétrica total (soma das gerações das três usinas hidrelétricas) é 70 MWh. Os créditos são portanto:

**Tabela D.6 – Créditos de Geração das Hidrelétricas**

| agente       | geração    | cota       | crédito                    |
|--------------|------------|------------|----------------------------|
| adiro        | física     | (p.u.)     | de ger.                    |
|              |            | (MWh)      | (MWh)                      |
| 1            | $H_1 = 5$  | 0.2        | $E_1 = 0.2 \times 70 = 14$ |
| 2            | $H_2 = 40$ | 0.5        | $E_2 = 0.5 \times 70 = 35$ |
| 3            | $H_3 = 25$ | 0.3        | $E_3 = 0.3 \times 70 = 21$ |
| <b>total</b> | <b>70</b>  | <b>1.0</b> | <b>70</b>                  |

**14.3.5.****Balanço de Pagamentos no mercado “spot” - com MRE**

A única diferença no balanço do mercado “spot” com MRE é que os geradores hidrelétricos recebem o produto de seu crédito de geração (Mwh) pelo preço “spot” (\$/MWh). Todos os demais elementos (remuneração das térmicas, das demandas, total dos geradores etc.) permanecem idênticos. Em outras palavras, o MRE é um ajuste *interno* ao conjunto de geradores hidrelétricos, e não tem efeito nos demais agentes. A Tabela D.7 ilustra este pagamento.

**Tabela 8.7 - Balanço no mercado “spot” - Geradores Hidrelétricos - com MRE**

| Agente            | Geração   | remuner.   |
|-------------------|-----------|------------|
|                   | (MWh)     | (\\$)      |
| $E_1$             | 14        | 140        |
| $E_2$             | 35        | 350        |
| $E_3$             | 21        | 210        |
| <b>subtotal H</b> | <b>70</b> | <b>700</b> |

Finalmente, observa-se que, como o crédito de energia de uma usina é fração da produção total do “sistema MRE”, os créditos podem ser localizados em regiões (sub-mercados) distintas às de origem da usina, uma vez que o “sistema MRE” está localizado

em diferentes regiões e bacias. Esta possibilidade não foi considerada no exemplo anterior e o conjunto de regras que a define pode ser encontrado em [16]<sup>32</sup>.

#### 14.4.

#### Vantagens e Limitações do MRE

O MRE apresenta vários aspectos atraentes:

1. Desvincula a produção física da usina do seu crédito de geração. Isto permite que o Operador do Sistema despache os recursos hidroelétricos do sistema de maneira ótima global (por exemplo, mantendo um grande reservatório cheio por vários meses, com geração reduzida, para aumentar a segurança futura do sistema) sem afetar o fluxo de caixa do proprietário.
2. O crédito de geração de cada usina, por ser proporcional à geração hidrelétrica total na cascata, apresenta menos variabilidade que a geração individual da mesma. Em outras palavras, há menos risco do crédito de geração ser inferior ao contrato, o que evita a compra de energia no “spot”.
3. Os investidores em usinas hidrelétricas na realidade não estão comprando ativos físicos, mas “cotas” de uma “empresa” fictícia. Isto torna possível vender as usinas hidrelétricas como simples “papéis” financeiros, isto é, não é necessário dividir as empresas por bacia, etc. para sua venda.

Uma possível desvantagem do MRE seria o desincentivo que o proprietário teria para operar e manter em boas condições sua usina. Prevê-se no marco regulatório a aplicação de multas por não manter um nível adequado de disponibilidade dos equipamentos, que seriam inspecionados periodicamente.

Em resumo:

---

<sup>32</sup> Conforme discutido em [40], um crédito de uma UHE alocado em um sub-mercado diferente daquele em que ela se situa gera uma despesa adicional devida à diferença entre o preços dos sub-mercados em pauta. É claro que teoricamente esta realocação poderia gerar lucro para a UHE afetada se o preço do MAE da região onde ela recebeu o crédito fosse maior que a da região de origem, mas o que acontece normalmente é o contrário, pois as regiões de alto preço do MAE são aquelas onde se observam piores condições hidrológicas e onde é mais difícil a alocação de créditos.

- o MRE é um mecanismo cujos objetivos principais são (i) reduzir o risco hidrológico individual e (ii) restaurar a eficiência econômica dos sinais “spot” do mercado “spot” de energia para usinas em cascata, de maneira análoga à do mercado “spot” de água;
- as “ações” de cada usina hidrelétrica na “empresa MRE” são os certificados de energia assegurada, que portanto influenciam diretamente a rentabilidade da mesma. Isto ilustra a importância do seu cálculo e de sua correta alocação entre os agentes evitando transferências incorreta de rendas entre agentes.

## 15

### ANEXO D – MÉTODO AUMANN-SHAPLEY: SEÇÕES AUXILIARES

#### 15.1.

##### Efeito da ordem de entrada na alocação por benefício incremental

Nesta seção é apresentada, através de um exemplo, o efeito da ordem de entrada dos agentes na alocação por benefício incremental.

Seja um conjunto de  $N$  agentes e uma função característica,  $f(b)$ , que calcula o benefício de qualquer sub-coalizão, onde  $b$  é um vetor  $n$ -dimensional  $\{b_i, i=1,\dots,n\}$  dos  $n$  agentes que fazem parte da coalizão. O benefício total do sistema é igual a  $f(\{b_i, i=1,\dots,N\})$ .

O objetivo da alocação é repartir o benefício total do sistema entre os  $N$  agentes de maneira a recuperar o benefício total e induzir o uso eficiente dos recursos do sistema.

A abordagem proposta será ilustrada através de um exemplo simples com três agentes, representados no seguinte vetor:

$$b = \{b_1 = 1; b_2 = 2; b_3 = 1\}; \quad (17.1)$$

Supõe-se que a função  $f(b)$  que calcula o benefício é dada pelo seguinte polinômio<sup>33</sup>:

$$f(b) = b_1 + (b_2 + b_3)^3 \quad (17.2)$$

Neste exemplo, o benefício total a ser repartido é:

$$f(\{1,2,1\}) = 1 + (2 + 1)^3 = 28 \quad (17.3)$$

---

<sup>33</sup> É imediato verificar que esta função característica representa um exemplo plausível de jogo cooperativo, uma vez que atende à condição de superaditividade apresentada na seção 3.1.2.

Como visto, uma maneira de resolver o problema é calcular a diferença entre os benefícios à medida que os agentes são adicionados sucessivamente ao sistema. A Tabela 15.1 mostra os incrementos nos benefícios para a ordem de entrada 1-2-3:

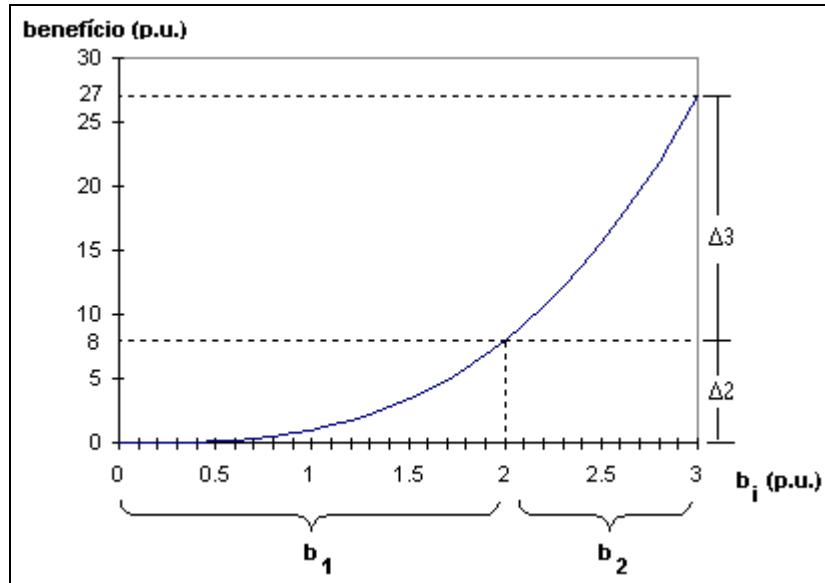
| agentes | $f(b)$         | $\Delta_i = \Delta f(b)$ |
|---------|----------------|--------------------------|
| 1       | 1              | $\Delta_1 = 1$           |
| 1,2     | $1 + 2^3 = 9$  | $\Delta_2 = 8$           |
| 1,2,3   | $1 + 3^3 = 28$ | $\Delta_3 = 19$          |

**Tabela 15.1– Incrementos nos benefícios: ordem 1-2-3**

Observa-se que o benefício recebido pelo agente 1 é igual ao seu benefício individual, que é igual a 1. O mesmo ocorre com o agente 2, que recebe um benefício de 8. Já o agente 2 recebe uma benefício de 19, bem maior que seu benefício individual, que é igual a 1.

Como mostra a

Figura 15.1 (mostra os benefícios recebidos apenas pelos agentes 2 e 3), isto está relacionado com a convexidade da função característica  $f(\cdot)$  em relação aos agentes 2 e 3:



**Figura 15.1 – Incrementos no benefício pela entrada dos elementos  $b_2$  e  $b_3$ .**

Observa-se que, entre os agentes 2 e 3, o benefício ( $\Delta$  na figura) do primeiro a entrar será sempre inferior ao segundo. Por exemplo, a Tabela 15.2 mostra os incrementos de benefício se a ordem de entrada for alterada para 1-3-2.

| agentes | $f(b)$         | $\Delta_i = \Delta f(b)$ |
|---------|----------------|--------------------------|
| 1       | 1              | $\Delta_1 = 1$           |
| 1,3     | $1 + 1^3 = 2$  | $\Delta_3 = 1$           |
| 1,2,3   | $1 + 3^3 = 28$ | $\Delta_2 = 26$          |

**Tabela 15.2 - Incrementos nos benefícios: ordem 1-3-2**

Vê-se que o benefício do agente 3 é reduzida de 19 para 1. Por sua vez, o do agente 2 aumenta de 8 para 26. Em resumo, o esquema de incrementos de benefícios, apesar de recuperar o montante total, pode ser muito sensível à ordem de entrada dos agentes.

## 15.2.

### Efeito do tamanho dos agentes no método de Shapley

#### 15.2.1.

##### Cálculo de todas as permutações de ordem de entrada

O método de Shapley tenta eliminar as limitações do método de incremento de benefícios através do cálculo de todas as permutações de ordem de entrada possíveis, como mostrado na Tabela 15.3.

| Ordem | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ |
|-------|--------|--------|--------|
| 1,2,3 | 1      | 8      | 19     |
| 1,3,2 | 1      | 26     | 1      |
| 2,1,3 | 1      | 8      | 19     |
| 2,3,1 | 1      | 8      | 19     |

|              |          |           |           |
|--------------|----------|-----------|-----------|
| 3,1,2        | 1        | 26        | 1         |
| 3,2,1        | 1        | 26        | 1         |
| <b>Média</b> | <b>1</b> | <b>17</b> | <b>10</b> |

**Tabela 15.3 – Alocação de Shapley**

Dado que, no exemplo da seção 15.1, os agentes 2 e 3 têm a mesma função de benefício, é de se esperar que suas alocações de Shapley unitárias fossem também iguais. Entretanto, observa-se na Tabela 15.3 que a alocação unitária para estes agentes é respectivamente 8.5 p.u. (lembre que  $b_2 = 2$ ) e 10 p.u.

A razão para esta diferença é que agentes com maiores valores de  $b$  são menos sensíveis à ordem de entrada que os agentes de menor valor. Como um exemplo extremo deste efeito, suponha que:

$$f(b_1, b_2) = (b_1 + b_2)^3 \quad (17.4)$$

$$b_1 = \varepsilon; b_2 = 1 - \varepsilon$$

onde  $\varepsilon$  é um número muito pequeno. Neste caso, a alocação de Shapley unitária para o agente 1 é a média dos benefícios marginais para as posições primeira e última na ordem de entrada:

$$\begin{aligned} f(1)/\varepsilon &= \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b_1} \Big|_{b=0} + \frac{\partial f(b)}{\partial b_1} \Big|_{b=0} \right) \times 0.5 \\ &= (3 \times (0)^2 + 3 \times (1)^2) \times 0.5 = 1.5 \end{aligned} \quad (17.5)$$

Por sua vez, a alocação Shapley para o agente 2 em qualquer ordem de entrada seria igual ao benefício total,  $(1)^3 = 1$ . Em outras palavras, a alocação Shapley não é “isonômica” com relação ao tamanho de agentes com características semelhantes<sup>34</sup>, ou seja, pode conduzir a subsídios cruzados.

---

<sup>34</sup> Esta característica pode levar ao chamado problema de “aditividade”. Por exemplo, um agente de “tamanho” 10 poderia ter uma alocação de 30 “benefícios” (3 por unidade), enquanto um agente de mesmas características, mas de “tamanho” 8, poderia ter uma alocação de 16 “benefícios” (2 por unidade). Esta

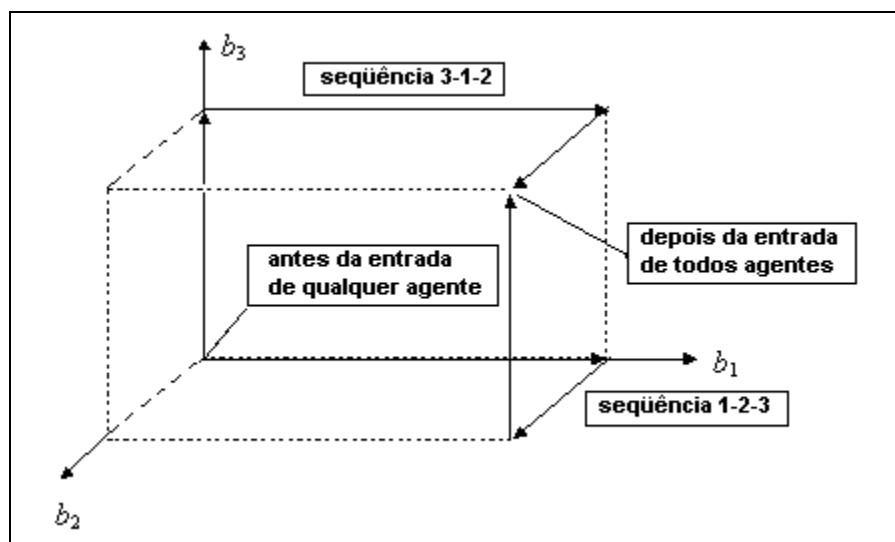
### 15.3.

**Desenvolvimento do método AS a partir do método de Shapley: uma interpretação intuitiva.**

#### 15.3.1.

##### Interpretação geométrica do método de Shapley

O esquema de Shapley pode ser interpretado como uma média sobre todas as “trajetórias” que vão do ponto anterior à entrada de qualquer agente até o ponto onde todos os agentes já entraram. A Figura 15.2 ilustra as trajetórias para as seqüências 1-2-3 e 3-1-2.



**Figura 15.2 – A ordem de entrada é uma trajetória no espaço de agentes**

Para se tentar evitar o problema da inviabilidade computacional existente no método de Shapley, uma possibilidade é utilizar o seguinte procedimento de Monte-Carlo para obter um valor de Shapley estimado, onde os “caminhos” são sorteados aleatoriamente e a alocação de cada agente é o valor esperado sobre as alocações incrementais de todos os caminho sorteados.

“não-isonomia” faz com que os proprietários dos recursos tenham incentivos para “juntá-los” como se eles fossem indivisíveis.

1. inicialize o vetor de alocações estimadas  $\tilde{f}(i) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$
2. repita para cada sorteio de Monte Carlo  $s = 1, \dots, NS$ 
  - 2.1. sorteie aleatoriamente uma *permutação* da ordem de entrada representada pelo vetor  $P_s$  (p.ex.  $P_s(1) = 3; P_s(2) = 1$  etc.)
  - 2.2. repita para  $i = 1, \dots, n$ 
    - 2.2.1. calcule o custo incremental  $\Delta f = f^i - f^{i-1}$ , onde  $f^i$  é o benefício após a entrada dos primeiros  $i$  agentes no vetor de permutações  $P_s$  (o benefício quando não há nenhum agente,  $f^0$ , é feito = 0)
    - 2.2.2. seja  $j$  o  $i$ -ésimo agente no vetor de permutações (i.e.  $j = P_s(i)$ ); adicione o benefício incremental  $\Delta f$  a sua estimativa de alocação:

$$\tilde{f}(j) \leftarrow f(j) + \Delta f / NS \quad (17.6)$$

### 15.3.2.

#### **Método de Shapley “modificado”**

A “não-isonomia” da alocação Shapley pode ser corrigida permitindo-se que agentes menores entrem depois que uma *fração* do agente maior tenha entrado. Em termos do exemplo da Tabela 15.3, o agente 2 é “partido” em dois sub-agentes, 2a e 2b, de tamanho = 1. A Tabela 15.4 resume os resultados da alocação. Novamente, por simplicidade de apresentação, são mostrados somente os benefícios dos agentes 2 e 3:

| Ordem        | $f(2a)$  | $f(2b)$  | $f(3)$   |
|--------------|----------|----------|----------|
| 2a,2b,3      | 1        | 7        | 19       |
| 2a,3,2b      | 1        | 19       | 7        |
| 3,2a,2b      | 7        | 19       | 1        |
| 3,2b,2a      | 19       | 7        | 1        |
| 2b,2a,3      | 7        | 1        | 19       |
| 2b,3,2a      | 19       | 1        | 7        |
| <b>Média</b> | <b>9</b> | <b>9</b> | <b>9</b> |

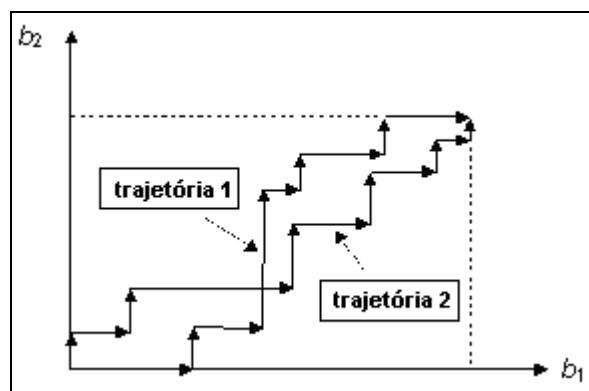
**Tabela 15.4 – Alocação Shapley com “subdivisão” de agentes**

Observa-se que, como desejado, o benefício p.u. é o mesmo para os agentes 2 e 3.

### 15.3.3.

#### Interpretação geométrica do método de Shapley “modificado”

O método Shapley “modificado” também pode ser interpretado como uma média sobre trajetórias no espaço de agentes, só que agora há mais trajetórias possíveis. A Figura 15.3 ilustra duas possíveis trajetórias para um sistema onde há dois agentes que foram subdivididos em vários “sub-agentes”.



**Figura 15.3 – “Trajetórias” do método de Shapley modificado**

A primeira vista, um esquema de Monte Carlo semelhante ao descrito na seção 0 poderia ser usado, ajustando-se o vetor de permutações para acomodar todos os “sub-

agentes”. Entretanto, há uma alternativa mais eficiente que resultante da divisão do de cada sub-agente em pedaços “infinitesimais”.

Suponha que o tamanho de cada sub-agente vai para zero, isto é, há uma divisão em um número infinito de sub-agentes. Neste caso, o esquema de Shapley modificado descrito na seção anterior pode ser simplificado em dois aspectos importantes:

- suponha que uma fração  $b^*$  de todos os agentes já entrou no sistema, e que uma partição  $\varepsilon_i$  do agente  $i$  é a próxima a entrar. O incremento do benefício se reduz neste caso ao *benefício marginal*, isto é

$$\Delta f(b^*, \varepsilon_i) = f(b^*, \varepsilon_i) - f(b^*) \quad (17.7)$$

$$\approx \left. \frac{\partial f(b)}{\partial b_i} \right|_{b=b^*} \times \varepsilon_i$$

- como mostra a Figura 15.4, todas as trajetórias sorteadas *convergem* para uma *única* trajetória, que corresponde à “diagonal” do espaço de agentes.



**Figura 15.4 – Trajetórias no espaço de agentes quando seus tamanhos vão para zero**

A razão é que a probabilidade de sortear um sub-agente passa a ser igual à razão entre os tamanhos dos agentes. Por exemplo, se o agente 1 tem tamanho  $b_1 = 3$  e o agente 2 tem tamanho  $b_2 = 5$ , a razão entre as partições sorteadas será 3:5. A probabilidade de

haver uma proporção diferente se reduz a zero à medida que cresce o número de sub-agentes.

Conclui-se que o esquema de Monte Carlo (17.6) se reduz a uma integral de linha da função benefício, onde todos os agentes entram no sistema simultaneamente, seguindo uma mesma proporção dos respectivos tamanhos:

$$\phi_i = b_i \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_i} d\lambda \quad (17.8)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de integração. O esquema de alocação (17.8) é conhecido como Aumann-Shapley.

**16**

**Anexo E – Certificados de energia assegurada das usinas do Sistema Interligado Brasileiro.**

A tabela a seguir mostra os certificados de energia assegurada – CEA's das usinas simuladas no cálculo da energia firme do Sistema Brasileiro, ou seja, as usinas existentes no PMO<sup>35</sup> (Programa Mensal de Operação, obtido em [76]) de Janeiro de 2004 do ONS (Operador Nacional do Sistema[75]). Estes certificados correspondem à situação das usinas em Janeiro de 2004.

| SISTEMA SUDESTE |                         |  |
|-----------------|-------------------------|--|
| UHE             | ENERGIA ASSEGURADA (MW) | FONTE  |
| A.A. LAYDNER    | 47                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| A.S. LIMA       | 66                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| A.S.OLIVEIRA    | 15                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| A.VERMELHA      | 746                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| BARRA BONITA    | 45                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| BILLINGS        | 0                       | *valor não divulgado oficialmente                  |
| CACH.DOURADA    | 415                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| CACONDE         | 33                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| CAMARGOS        | 21                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| CANA BRAVA      | 273.5                   | Contrato de concessão                              |
| CANOAS I        | 57                      | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |

---

<sup>35</sup> A usina Quebra Queixo, que possui três máquinas e apresenta no PMO de Janeiro de 2004 do ONS apenas uma delas existente, foi retirada da simulação.

| <b>SISTEMA SUDESTE</b> |  |   |
|------------------------|--|---|
| <b>UHE</b>             | <b>ENERGIA<br/>ASSEGURADA<br/>(MW)</b> | <b>FONTE</b>  |
| CANOAS II              | 48                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| CAPIVARA               | 330                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| CHAVANTES              | 172                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| CORUMBA I              | 209                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| E. DA CUNHA            | 49                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| EMBORCACAO             | 497                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| ESTREITO               | 495                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| FONTES                 | 104                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| FUNIL                  | 121                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| FUNIL-GRANDE           | 89                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| FURNAS                 | 598                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| GUapore                | 60.2                                   | Contrato de concessão                                   |
| GUARAPIRANGA           | 0                                      | *valor não divulgado oficialmente                       |
| GUILMAN-AMOR           | 65.9                                   | Contrato de concessão                                   |
| HENRY BORDEN           | 147                                    | Resolução 425 da Aneel, de 26 de agosto de 2003         |
| I.SOLT. EQV.           | 1949                                   | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| IBITINGA               | 74                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| IGARAPAVA              | 136                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| ILHA POMBOS            | 115                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |
| ITAIPU                 | 8612                                   | Soma das "cotas" de Itaipu + mercado de Ande (Paraguai) |
| ITIQUIRA I             | 42.2                                   | Contrato de concessão                                   |
| ITIQUIRA II            | 65.1                                   | Contrato de concessão                                   |
| ITUMBIARA              | 1015                                   | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998.      |

| <b>SISTEMA SUDESTE</b> |  |  |
|------------------------|--|--|
| <b>UHE</b>             | <b>ENERGIA<br/>ASSEGURADA<br/>(MW)</b> | <b>FONTE</b>                                       |
| ITUTINGA               | 28                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| JAGUARA                | 336                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| JAGUARI                | 14                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| JAURU                  | 66                                     | Contrato de concessão                              |
| JUPIA                  | 886                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| L N GARCEZ             | 55                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| LAJEADO                | 510.1                                  | Contrato de concessão                              |
| LAJES                  | 28                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| M DE MORAES            | 295                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| MANSO                  | 92                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| MARIMBONDO             | 726                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| MASCARENHAS            | 103.1                                  | Resolução 559 da Aneel, de 22 de outubro de 2003   |
| MIRANDA                | 202                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| N PECANHA              | 335                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| NAVANHANDAVA           | 139                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| NOVA PONTE             | 276                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| P COLOMBIA             | 185                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| P ESTRELA              | 55.8                                   | Contrato de concessão                              |
| P PASSOS               | 51                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| P PRIMAVERA            | 1017                                   | Resolução 244 da Aneel, de 23 de maio de 2003.     |
| PARAIBUNA              | 50                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| PIRAJU                 | 42.5                                   | Contrato de concessão                              |
| PROMISSAO              | 104                                    | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |

| <b>SISTEMA SUDESTE</b> |                                |  |
|------------------------|--------------------------------|--|
| <b>UHE</b>             | <b>ENERGIA ASSEGURADA (MW)</b> | <b>FONTE</b>                                       |
| ROSAL                  | 30                             | Resolução 232, da Aneel, de 27 de julho DE 1999.   |
| ROSANA                 | 177                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| SA CARVALHO            | 58                             | *valor não divulgado oficialmente                  |
| SALTO GRANDE           | 75                             | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| SANTA BRANCA           | 32                             | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| SAO SIMAO              | 1281                           | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| SERRA MESA             | 671                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| SOBRAGI                | 38.7                           | Contrato de concessão                              |
| STA CLARA MG           | 28.1                           | Contrato de concessão                              |
| TAQUARUCU              | 201                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| TRES MARIAS            | 239                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| VOLTA GRANDE           | 229                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| <b>SUBTOTAL SE</b>     | <b>25368.2</b>                 |  |

| <b>SISTEMA SUL</b> |                                |   |
|--------------------|--------------------------------|---|
| <b>UHE</b>         | <b>ENERGIA ASSEGURADA (MW)</b> | <b>FONTE</b>                                    |
| D FRANCISCA        | 78                             | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| ERNESTINA          | 0                              | *valor não divulgado oficialmente               |
| G B MUNHOZ         | 576                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| G.P SOUZA          | 109                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| ITA                | 720                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |

| <b>SISTEMA SUL</b> |                                |   |
|--------------------|--------------------------------|---|
| <b>UHE</b>         | <b>ENERGIA ASSEGURADA (MW)</b> | <b>FONTE</b>                                    |
| ITAUBA             | 190                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| JACUI              | 123                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| JORDAO             | 0                              | *valor não divulgado oficialmente               |
| MACHADINHO         | 529                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| PASSO FUNDO        | 119                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| PASSO REAL         | 68                             | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| SALTO CAXIAS       | 605                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| SALTO OSORIO       | 522                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| SEGREDO            | 603                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| SLT SANTIAGO       | 723                            | Resolução 268 da Aneel, de 13 de agosto de 1998 |
| <b>SUBTOTAL S</b>  | <b>4965.0</b>                  |   |

| <b>SISTEMA NORDESTE</b> |                                |  |
|-------------------------|--------------------------------|--|
| <b>UHE</b>              | <b>ENERGIA ASSEGURADA (MW)</b> | <b>FONTE</b>                                       |
| B ESPERANCA             | 143                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| COMP PAF-MOX            | 2225                           | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| ITAPARICA               | 959                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| ITAPEBI                 | 196.5                          | Contrato de concessão                              |
| SOBRADINHO              | 531                            | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| XINGO                   | 2139                           | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| <b>SUBTOTAL NE</b>      | <b>6193.5</b>                  |  |

| <b>SISTEMA NORTE</b> |  |  |
|----------------------|--|--|
| <b>UHE</b>           | <b>ENERGIA<br/>ASSEGURADA<br/>(MW)</b> | <b>FONTE</b>                                       |
| CURUA-UNA            | 24                                     | Resolução 453 da Aneel, de 30 de dezembro de 1998. |
| TUCURUI              | 4140                                   | Resolução 118 da Aneel, de 19 de março de 2002.    |
| <b>SUBTOTAL N</b>    | <b>4164.0</b>                          |  |
| <b>TOTAL BRASIL</b>  | <b>40690.7</b>                         |  |